

Г. Н. Черкесов

НАДЕЖНОСТЬ АППАРАТНО- ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ



С Е Р И Я

УЧЕБНОЕ

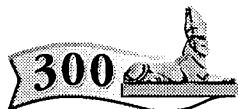
ПОСОБИЕ



Г. Н. Черкесов

НАДЕЖНОСТЬ АППАРАТНО-ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия по дисциплине «Надежность, эргономика
и качество» для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению подготовки дипломированных специалистов
654600 «Информатика и вычислительная техника» и направлению
подготовки бакалавров и магистров 552800
«Информатика и вычислительная техника»



300.piter.com

Издательская программа

**300 лучших учебников для высшей школы
в честь 300-летия Санкт-Петербурга**

осуществляется при поддержке Министерства образования РФ

ПИТЕР®

**Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2005**

ББК 32.973-04я7
УДК 681.3(075)
Ч-48

Рецензенты:
Кафедра «Системный анализ и управление» СПбГПУ
Половко А. М., доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ

Черкесов Г. Н.

Ч48 Надежность аппаратно-программных комплексов. Учебное пособие. — СПб.: Питер, 2005. — 479 с.: ил.

ISBN 5-469-00102-4

В учебном пособии дается систематическое изложение аналитических методов оценки надежности аппаратно-программных комплексов и практических методов обеспечения надежности. Данная книга является усовершенствованным вариантом учебного пособия Г. Н. Черкесова «Основы теории надежности АСУ», которое было опубликовано в 1975 году и прошло многолетнюю апробацию в учебном процессе СПбГТУ и других вузов.

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия по дисциплине «Надежность, эргономика и качество» для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 654600 «Информатика и вычислительная техника» и направлению подготовки бакалавров и магистров 552800 «Информатика и вычислительная техника».

ББК 32.973-04я7
УДК 681.3(075)

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Информация, содержащаяся в данной книге, получена из источников, рассматриваемых издательством как надежные. Тем не менее, имея в виду возможные человеческие или технические ошибки, издательство не может гарантировать абсолютную точность и полноту приводимых сведений и не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

Краткое содержание

Предисловие	11
Введение	13
От издательства	16
Глава 1. Основные понятия	17
Глава 2. Факторы, влияющие на надежность аппаратно- программного комплекса	35
Глава 3. Надежность элемента	57
Глава 4. Надежность последовательных систем	83
Глава 5. Способы повышения надежности	98
Глава 6. Надежность невосстанавливаемых резервированных систем	126
Глава 7. Надежность восстанавливаемых резервированных систем	172
Глава 8. Надежность систем с резервом времени	238
Глава 9. Надежность систем с ограниченным ЗИП	302
Глава 10. Оценка надежности АПК с учетом характеристик программного и информационного обеспечения	359
Глава 11. Практические методы статистической оценки надежности	403
Математическое приложение	439
Алфавитный указатель	474

Содержание

Предисловие	11
Введение	13
От издательства	16
Глава 1. Основные понятия	17
1.1. Надежность	17
1.2. Работоспособность. Отказ. Неисправность. Восстановление	18
1.3. Безотказность. Ремонтопригодность. Сохраняемость. Долговечность	20
1.4. Система и элемент	22
1.5. Критерии и показатели надежности	23
1.5.1. Невосстанавливаемые изделия	25
1.5.2. Восстанавливаемые изделия	28
Список литературы	33
Вопросы для самоконтроля	34
Глава 2. Факторы, влияющие на надежность аппаратно-программного комплекса	35
2.1. Общие сведения	35
2.2. Климатические факторы	36
2.2.1. Характеристика влияния климатических факторов	36
2.2.2. Защита изделий от климатических воздействий	41
2.3. Ударно-вибрационные факторы	42
2.3.1. Характеристика вибрационных факторов	43
2.3.2. Последствия воздействий механических нагрузок	45
2.3.3. Защита изделий от воздействий механических нагрузок	45
2.4. Профилактическое обслуживание	46
2.4.1. Классификация методов профилактики	46
2.4.2. Виды профилактических работ	48
2.4.3. Характеристики и оптимизация профилактического обслуживания	49
2.5. Тренировки, отработочные и предпусковые испытания	49
2.6. Контроль качества и входной контроль надежности	51
2.7. Уровень автоматизации проектирования	52
2.8. Факторы, влияющие на надежность ПО	53
Список литературы	55
Вопросы для самоконтроля	56

Глава 3. Надежность элемента 57

3.1. Модели надежности невозстанавливаемого элемента с учетом условий эксплуатации . . . 57

 3.1.1. Понятие о математической модели надежности 57

 3.1.2. Модели безотказности элемента 58

 3.1.3. Учет условий эксплуатации 64

3.2. Модели надежности восстанавливаемого элемента 66

 3.2.1. Модели безотказности 66

 3.2.2. Характеристики потоков отказов 69

 3.2.3. Модели восстанавливаемости 73

 3.2.4. Модели контроля и диагностирования 75

3.3. Расчет показателей надежности 76

 3.3.1. Марковская модель 76

 3.3.2. Полумарковская модель 78

Список литературы 81

Вопросы для самоконтроля 82

Глава 4. Надежность последовательных систем 83

4.1. Основные расчетные соотношения для показателей безотказности 83

 4.1.1. Модели надежности 83

 4.1.2. Понятие о последовательном соединении элементов 84

 4.1.3. Расчетные формулы для показателей безотказности 86

4.2. Нормирование надежности 88

4.3. Расчет комплексных показателей надежности 91

 4.3.1. Марковская модель, идеальный контроль 91

 4.3.2. Марковская модель, неидеальный контроль 95

 4.3.3. Полумарковская модель, идеальный контроль, ненагруженный режим 96

 4.3.4. Полумарковская модель, неидеальный контроль, ненагруженный режим 96

Список литературы 97

Вопросы для самоконтроля 97

Глава 5. Способы повышения надежности 98

5.1. Основные этапы и программа обеспечения надежности 98

5.2. Способы повышения надежности последовательных систем 101

 5.2.1. Уменьшение наработки 102

 5.2.2. Уменьшение интенсивности отказов 102

 5.2.3. Улучшение восстанавливаемости 103

 5.2.4. Резервирование (введение избыточности) 104

5.3. Виды резервирования 105

 5.3.1. Структурное резервирование 105

 5.3.2. Функциональное резервирование 106

 5.3.3. Временное резервирование (резервирование времени) 106

 5.3.4. Информационное резервирование 108

 5.3.5. Алгоритмическое резервирование 109

5.4. Методы структурного и временного резервирования 109

 5.4.1. Методы структурного резервирования 109

 5.4.2. Методы временного резервирования 112

5.5. Методы и технология обеспечения надежности программных комплексов 114

 5.5.1. Основные направления обеспечения надежности программных комплексов . . . 114

 5.5.2. Правила обеспечения отказоустойчивости 118

 5.5.3. Уровни деградации, парируемые неисправности и ошибки 119

 5.5.4. Уровни защиты от неисправностей 120

 5.5.5. Методы, средства и процедуры парирования ошибок и неисправностей 121

 5.5.6. Методы обеспечения сохранности данных 124

Список литературы 124

Вопросы для самоконтроля 125

Глава 6. Надежность невосстанавливаемых резервированных систем	126
6.1. Модели и методы анализа надежности систем с последовательно-параллельным соединением элементов	126
6.1.1. Исчисление вероятностей в схеме независимых событий	127
6.1.2. Марковская модель	129
6.1.3. Композиция распределений	132
6.2. Расчет надежности систем с последовательно-параллельной структурой	133
6.2.1. Принцип декомпозиции	133
6.2.2. Схемы резервирования систем с последовательно-параллельной структурой	136
6.2.3. Основное свойство резервирования. Сравнение способов резервирования	140
6.2.4. Учет надежности переключателей резерва	143
6.2.5. Учет характеристик системы контроля и диагностирования	146
6.3. Расчет надежности систем со сложной структурой	160
6.3.1. Метод перебора гипотез	161
6.3.2. Метод эквивалентных схем	163
6.3.3. Логико-вероятностный метод	165
6.4. Расчет надежности систем при двух типах отказов	168
Список литературы	170
Вопросы для самоконтроля	171
Глава 7. Надежность восстанавливаемых резервированных систем	172
7.1. Модели надежности восстанавливаемых резервированных систем	172
7.2. Методы анализа надежности восстанавливаемых резервированных систем	174
7.2.1. Методы исчисления вероятностей. Методы анализа сложных структур	174
7.2.2. Метод, основанный на использовании обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова	175
7.2.3. Метод, основанный на использовании интегральных уравнений	177
7.3. Расчет надежности систем с последовательно-параллельной структурой	180
7.3.1. Марковская модель надежности	181
7.3.2. Полумарковская модель надежности	189
7.4. Расчет надежности систем со сложной структурой	198
7.4.1. Коэффициент готовности систем	199
7.4.2. Средняя наработка системы до отказа	199
7.4.3. Средняя наработка на отказ	203
7.4.4. Вероятность безотказной работы	205
7.5. Учет конечного времени подключения резерва	207
7.6. Расчет надежности систем с ветвящейся структурой	212
7.6.1. Постановка задачи	212
7.6.2. Расчет надежности и выбор структурных параметров многосвязных систем при полном оповещении о состоянии сети	218
7.6.3. Расчет надежности многосвязных систем при неполном оповещении о состоянии сети	224
7.6.4. Распределение числа работоспособных ветвей при полном оповещении о состоянии сети	228
7.6.5. Распределение числа работоспособных ветвей при неполном оповещении о состоянии сети	233
Список литературы	236
Вопросы для самоконтроля	237
Глава 8. Надежность систем с резервом времени	238
8.1. Особенности систем с резервом времени и показатели их надежности	238
8.2. Одноканальные системы с мгновенно пополняемым резервом времени (класс GG11)	241
8.2.1. Восстанавливаемый элемент	241
8.2.2. Последовательная система	250
8.3. Одноканальные системы с непополняемым резервом времени	251
8.3.1. Восстанавливаемый элемент с необесценивающими отказами	251
8.3.2. Последовательная система с необесценивающими отказами	262
8.3.3. Восстанавливаемый элемент с обесценивающими отказами	265
8.3.4. Система с периодическим контролем работоспособности	272

8.4. Многоканальные системы с непополняемым резервом времени	275
8.5. Многофазные системы	283
8.5.1. Расчет показателей безотказности двухфазной системы	285
8.5.2. Расчет коэффициента готовности двухфазной системы	292
8.5.3. Расчет коэффициента готовности многофазной системы при одинаковой производительности устройств	298
Список литературы	300
Вопросы для самоконтроля	301
Глава 9. Надежность систем с ограниченным ЗИП	302
9.1. Постановка задачи	302
9.2. Расчет показателей достаточности комплекта одиночного ЗИП	308
9.2.1. Периодическое пополнение ($\alpha = 1$)	309
9.2.2. Пополнение с экстренными доставками ($\alpha = 2$)	309
9.2.3. Пополнение по уровню ($\alpha = 3$)	311
9.2.4. Непрерывное пополнение ($\alpha = 4$)	313
9.3. Расчет надежности однофункциональных систем с одиночным ЗИП при периодическом пополнении запасов	314
9.4. Расчет надежности многофункциональных систем с одиночным или групповым ЗИП при периодическом пополнении запасов	320
9.4.1. Приближенные оценки первого типа	321
9.4.2. Приближенные оценки второго типа	321
9.4.3. Точные методы расчета надежности	322
9.4.4. Расчетные формулы для типовых структур	324
9.5. Расчет надежности многофункциональных систем при непрерывном пополнении запасов	338
9.6. Оптимизация комплекта ЗИП	346
9.6.1. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям достаточности	347
9.6.2. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при заданных способах пополнения запасов	353
9.6.3. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при варьировании стратегии пополнения запасов	355
Список литературы	357
Вопросы для самоконтроля	358
Глава 10. Оценка надежности АПК с учетом характеристик программного и информационного обеспечения	359
10.1. Постановка задачи	359
10.2. Общая схема проектной оценки надежности программного комплекса	361
10.2.1. Расчет исходного числа дефектов	361
10.2.2. Расчет остаточного числа дефектов после автономной отладки	362
10.2.3. Расчет остаточного числа дефектов после комплексной отладки	363
10.2.4. Оценка вероятности проявления дефекта при однократном выполнении ФСО	363
10.2.5. Оценка вероятности проявления дефектов при многократном выполнении ФСО	364
10.2.6. Оценка характеристик потоков инициирующих событий	365
10.2.7. Оценка показателей надежности системы с учетом случайного потока инициирующих событий	365
10.3. Факторные модели	365
10.3.1. Модели распределения числа дефектов в алгоритмах и базах данных	365
10.3.2. Модели распределения дефектов в базах данных	366
10.3.3. Модели эффективности отладки	367
10.3.4. Модели потоков инициирующих событий	371
10.4. Проектная оценка надежности программного комплекса при выполнении ФСО	372
10.4.1. Вероятность проявления дефекта при однократном выполнении ФСО	372
10.4.2. Вероятность проявления дефекта при многократном выполнении ФСО	374

10.4.3. Вероятность безотказной работы ПК в режиме МКЦП при случайном потоке инициирующих событий	375
10.4.4. Учет процедур парирования ошибок	375
10.5. Пример проектной оценки надежности программного комплекса	376
10.5.1. Краткое описание аппаратно-программного комплекса	376
10.5.2. Оценка исходного числа дефектов	377
10.5.3. Оценка числа дефектов ФПО по подсистемам до автономной отладки	379
10.5.4. Оценка остаточного числа дефектов после автономной отладки	380
10.5.5. Оценка остаточного числа дефектов после комплексной отладки	382
10.5.6. Оценка вероятности проявления дефекта при однократном и многократном выполнении ФСО после КО	384
10.5.7. Поток инициирующих событий	388
10.5.8. Вероятность безотказной работы ПК	388
10.6. Оценка надежности программного комплекса по результатам отладки и нормальной эксплуатации	390
Список литературы	400
Вопросы для самоконтроля	402
Глава 11. Практические методы статистической оценки надежности	403
11.1. Роль эксперимента в оценке надежности	403
11.2. Классификация методов статистических испытаний надежности	404
11.3. Задачи определительных испытаний	407
11.4. Оценка вероятности отказа по биномиальному плану. Точечная оценка. Доверительные интервалы	410
11.5. Оценка параметра экспоненциального распределения. Точечная оценка. Доверительный интервал	416
11.6. Постановка задачи контроля надежности	424
11.7. Контроль надежности по однократной выборке	427
11.8. Последовательный контроль надежности	431
Список литературы	436
Вопросы для самоконтроля	437
Математическое приложение	439
П1. Преобразование Лапласа—Карсона и Лапласа—Стилтьеса	439
П2. Вычисление вычетов	440
П3. Тауберovy теоремы	441
П4. Вывод формул для потоков случайных событий	442
П4.1. Вывод формул для простейшего потока	442
П4.2. Вывод формул нестационарного пуассоновского потока	444
П4.3. Теоремы об асимптотическом поведении функции интенсивности и ведущей функции рекуррентного потока	446
П4.4. Вывод формул обобщенного пуассоновского потока	447
П5. Модифицированный логико-вероятностный метод. Основные теоремы	449
П6. Методы математической статистики	453
П6.1. Точечное оценивание параметров распределений	453
П6.2. Интервальное оценивание параметров распределений	460
П6.3. Проверка параметрических гипотез	462
П6.4. Критерии согласия	466
П7. Таблицы стандартных распределений	470
Список литературы	473
Алфавитный указатель	474

Предисловие

Одной из центральных проблем при проектировании, производстве и эксплуатации автоматизированных систем обработки информации управления (АСОИУ) является проблема обеспечения надежности. Как и многие другие технические системы, АСОИУ имеют в своем составе сложные комплексы технических средств. Поэтому многие вопросы теории и практики надежности АСОИУ могут рассматриваться как общетехнические. Вместе с тем специфика АСОИУ требует в ряде случаев особого подхода и специальных методов анализа и повышения надежности.

К особенностям АСОИУ следует отнести прежде всего то, что они являются сложными техническими комплексами и оснащаются разнообразными программными средствами, образующими функциональное (ФПО) и системное (СПО) программное обеспечение. Программное обеспечение (ПО) является наиболее развитой по структуре и функциональным связям составной частью аппаратно-программных комплексов (АПК) АСОИУ. Дефекты ПО могут проявляться случайным образом в случайные моменты времени и иметь последствия, аналогичные последствиям, вызванным отказом техники, а именно: потерю отдельных функций или задержку их выполнения, искажение информации или управляющих воздействий. Более того, при сложном взаимодействии технических и программных средств часто трудно идентифицировать первоисточник нарушения правильного функционирования АПК. Поэтому важно не только обеспечить высокую надежность ПО, но и учесть ее при оценке надежности АСОИУ в целом.

Особенностью АСОИУ является также то, что не все отказы ее элементов проявляются явно и могут быть обнаружены визуально, как это происходит, например, при отказах двигателей или генераторов тока. Чтобы обнаруживать отказы в АСОИУ, создают специальные средства контроля и диагностирования (СКД). От их характеристик зависят доля своевременно и достоверно обнаруживаемых отказов и, как следствие, уровень надежности и его количественные оценки. Вопросы контроля и диагностирования являются предметом рассмотрения самостоятельной учебной дисциплины и здесь подробно не излагаются. Но элементарные сведения из этой дисциплины активно используются.

При изложении вопросов повышения надежности учитывается современная тенденция проектирования АСОИ, состоящая в компоновке сложных систем из

агрегированных средств вычислительной и информационной техники, серийно изготавливаемых промышленностью. Принимается во внимание также подтвержденный практикой проектирования факт, состоящий в том, что многие системы не могут эффективно функционировать без включения в них специализированной аппаратуры. Поэтому значительное место в книге занимает изложение методов повышения надежности отдельных приборов и устройств, входящих в состав АСОИУ.

Особое внимание уделено изложению общих принципов и методик анализа надежности систем, а также общих свойств основных методов ее повышения. Поскольку для повышения надежности АСОИУ используются различные методы резервирования, подробно излагаются методы и технические приемы не только традиционного структурного, но и других видов резервирования: функционального, информационного, временного, алгоритмического. Схемотехнические вопросы реализации методов повышения надежности имеют здесь подчиненное значение, так как они подробно изучаются в других учебных дисциплинах.

Для понимания приводимых в книге результатов анализа и оценки надежности читателю необходимы знания по математике в объеме стандартного курса технического вуза, в том числе по комбинаторике, операционному исчислению, интегральным преобразованиям, теории вероятности и математической статистике, теории случайных процессов, а также элементарные сведения из специальных разделов теории и техники АСОИУ.

Введение

Автоматизированные системы обработки информации и управления представляют собой совокупность технических средств, алгоритмов управления, методов и средств информационного и программного обеспечения, объединенных для выполнения функций управления. Технические средства включают в себя сложные комплексы измерительной, вычислительной техники, средств связи, автоматики, отображения, регистрации и архивирования информации, исполнительных механизмов, вспомогательной и обеспечивающей аппаратуры.

Для того чтобы технические средства воспроизводили алгоритмы функционирования так, как это было предусмотрено разработчиками при проектировании, аппаратура должна быть достаточно надежной, приспособленной к своевременному обнаружению и устранению отказов. От того, насколько в АСОИУ удалось исключить отказы или уменьшить их количество и вероятность появления, устранить или уменьшить их влияние на процесс управления, зависит не только качество, но и безопасность управления. Система управления принимает участие в предупреждении и устранении аварийных ситуаций в объекте управления и сама не должна провоцировать негативные процессы в автоматизированном технологическом комплексе (АТК), состоящем из двух тесно взаимодействующих составных частей: объекта управления и системы управления. Поэтому задача обеспечения высокой надежности становится одной из ключевых задач теории и практики проектирования, производства и эксплуатации АСОИУ.

Современная теория надежности занимается в основном вопросами надежности техники, за более чем 50-летнюю историю своего развития она накопила большое количество полезных, проверенных на практике результатов. Казалось бы, это может служить залогом успешного и беспроблемного решения задачи обеспечения надежности АСОИУ. Однако это не так. В последние десятилетия проблема повышения надежности не только не ослабела, но, напротив, значительно обострилась. Это связано с действием ряда объективных причин, обусловленных бурным техническим прогрессом в новой области техники — информатике и вычислительной технике. Одна из причин — непрерывный рост сложности аппаратуры, который значительно опережает рост качества элементной базы, хотя последний, по абсолютным оценкам, тоже настолько велик, что производит большое впечатление при сравнении с некоторыми другими областями техники.

Второй причиной можно считать значительное расширение диапазона условий эксплуатации техники. В зависимости от назначения она работает в условиях высокой или низкой температуры окружающей среды, при повышенном или пониженном давлении, высокой или низкой влажности, при больших механических нагрузках вибрационного и ударного типов, в условиях действия повышенной радиации, агрессивных сред, негативных биологических факторов.

Безусловно, не все отказы аппаратуры являются неизбежными, каждый из них имеет свою причину или группу причин. Если причины известны, на них можно воздействовать с целью предупреждения отказа. Однако сведения о процессах, происходящих в аппаратуре, не всегда оказываются достаточными. Чтобы такие сведения получить, систематизировать и учесть при проектировании и производстве, необходимы немалое время и немалые средства, которыми создатели систем часто не располагают. Многие системы стареют морально раньше, чем физически. Поэтому зачастую инженеры вместо совершенствования уже созданных систем разрабатывают новые. Исходя из опыта предыдущей работы они исключают одни ошибки, но вместо них появляются другие, вызываемые различием систем и условий их эксплуатации. По меткому выражению Д. Ллойда и М. Липова [1.1], эволюционный процесс накопления знаний входит в конфликт с революционной атмосферой проектирования.

Ненадежность техники оборачивается большими экономическими потерями. Так, по данным национального симпозиума США по вопросам надежности, стоимость эксплуатации многих систем превышает их покупную стоимость в 1,5–2 раза за один год работы и в 10–12 раз за весь период жизни. Однако это еще не все негативные последствия. Ненадежность вызывает недоверие к технике и, как следствие, снижение ее технической эффективности.

Проблема надежности систем управления приобретает особое значение из-за большой значимости выполняемых ими функций и высокой цены отказа. Даже при довольно редких отказах ущерб, вызванный отключением системы управления или ее неправильным срабатыванием, может превысить выгоду, получаемую в периоды ее работоспособного состояния. Например, ущерб, вызванный отказом аппаратуры управления производственным процессом в химической, металлургической промышленности или в энергетике может в сотни раз превысить стоимость самой аппаратуры управления. Отказ релейной защиты (стоимость несколько сотен долларов) энергосистемы северо-восточной части США вызвал перебои в энергоснабжении ряда штатов и принес 300 млн. долларов убытков. В некоторых случаях отказ системы управления может вызвать серьезные экологические последствия и даже гибель людей.

Говоря о другой составной части АСОИУ — программном обеспечении, — следует отметить, что оно также заметно влияет на надежность системы. Без правильно и эффективно работающего программного комплекса (ПК) АСОИУ превращаются просто в дорогую грудку металла. Нарушение работоспособности ПК часто приводит к не менее тяжелым последствиям, чем отказы техники, но найти причину нарушения бывает крайне тяжело. Неправильная работа программ может провоцировать отказы технических устройств, устанавливая для них более тяжелые условия функционирования, поэтому вопросам обеспечения и поддер-

жания надежности ПК всегда уделялось большое внимание. Однако методы оценки надежности ПК стали разрабатываться совсем недавно. До сих пор теория надежности не имеет методик расчета надежности ПО, исследованных столь же тщательно, как методики для оценки надежности технических средств. Вместе с тем отдельные результаты таких исследований вызывают определенное доверие разработчиков ПК и вполне могут быть использованы в проектной практике. Некоторые из этих результатов приведены и в книге.

Наконец, следует отметить, что теория надежности — это общетехническая дисциплина, имеющая собственный предмет исследования, собственные методы и свою область применения. Поэтому многие излагаемые далее результаты имеют более широкое применение, чем область АСОИУ. Что касается специальных разделов теории надежности, ориентированных на использование при проектировании АСОИУ, то они также могут быть полезны опытному читателю, работающему в других областях техники, в той части, которая содержит изложение методик и подходов к построению моделей надежности и использованию для этого современного математического аппарата. Книга содержит большое количество примеров, иллюстрирующих методы и методики расчета надежности, общие результаты анализа надежности, свойства методов обеспечения надежности. Перечень литературы и ссылки на источники по всем разделам дают читателю возможность продолжить свое образование по узким вопросам теории надежности, самостоятельно изучая техническую литературу монографического характера.

Автор надеется, что такое построение книги будет способствовать активному усвоению читателем материала, поможет ему развить критический взгляд на достоинства и недостатки излагаемых здесь моделей надежности, подготовиться к самостоятельной деятельности в области обеспечения надежности аппаратно-программных комплексов.

От издательства

Ваши замечания, предложения и вопросы отправляйте по адресу электронной почты comp@piter.com (издательство «Питер», компьютерная редакция).

Мы будем рады узнать ваше мнение!

Подробную информацию о наших книгах вы найдете на веб-сайте издательства <http://www.piter.com>.

Глава 1

Основные понятия

1.1. Надежность

Надежность является фундаментальным понятием теории надежности, с помощью которого определяются другие понятия. *Надежность* есть свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих его способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования [2]. Остановимся на некоторых особенностях этого понятия.

Во-первых, как следует из определения, надежность есть внутреннее свойство объекта, заложенное в него при изготовлении и проявляющееся во время эксплуатации. Для количественной оценки надежности, как и любого другого свойства объекта, необходима та или иная мера, являющаяся ее характеристикой. Надежность нельзя свести ни к одной ее характеристике.

Вторая особенность надежности состоит в том, что она проявляется во времени. Если нет наблюдения за объектом во времени, то нельзя сделать никаких заключений о его надежности. Этим она существенно отличается от таких свойств объекта, как дефектность, точность и пр. Дефектность можно установить специальными измерениями в течение сравнительно небольшого времени, определяемого количеством измеряемых параметров и временем каждого измерения и составляющего несколько минут или часов [6]. Для того чтобы составить представление о надежности, необходимы наблюдения за группой объектов в течение тысяч или десятков тысяч часов. Можно сказать также, что дефектность и точность отражают начальное значение качества объекта, а надежность отражает устойчивость начального качества во времени.

Третья особенность надежности заключается в том, что она по-разному проявляется при различных условиях эксплуатации и различных режимах применения объекта. При изменении режимов и условий эксплуатации изменяются и характеристики надежности. Нельзя оценить надежность объекта, не уточнив условия его эксплуатации и режимов применения.

При определении понятия «надежность» для обозначения обладателя этого свойства и предмета анализа используется понятие «объект». В технической литературе по надежности для этих же целей часто используют также понятие «изделие». Однако эти понятия не являются синонимами и поэтому требуют пояснения.

Объект (технический объект) — это предмет определенного целевого назначения, рассматриваемый на этапах выработки требований, проектирования, производства и эксплуатации. Объектами, в частности, могут быть технические комплексы, программные комплексы, установки, устройства, машины, аппараты, приборы, агрегаты, отдельные детали и пр.

Изделие — это промышленная продукция. В Единой системе конструкторской документации изделием называют любой предмет или набор предметов, подлежащих изготовлению на производстве. К техническим объектам относятся не любые промышленные изделия, а только такие, каждый экземпляр которых в процессе эксплуатации (применения по назначению) не подвергается постепенному расходованию. У данных изделий с течением времени расходуется только технический ресурс. С этой точки зрения не является объектом банка смазочного материала, хотя, несомненно, она является изделием. Это не значит, что понятие «изделие» нельзя употреблять при анализе надежности. Далее под изделием будем понимать любую единицу промышленной продукции, количество которой может исчисляться в штуках или экземплярах. К объектам относятся также совокупности (комплексы, системы) изделий, совместно выполняющие определенные функции или задачи, даже если они не связаны между собой конструктивно (например, линии радиосвязи, системы энергетики и др.).

1.2. Работоспособность. Отказ. Неисправность. Восстановление

Одно из основных требований теории надежности — это необходимость установить принадлежность всех возможных состояний объекта к одному из двух противоположных классов: работоспособные и неработоспособные. Работоспособным называют такое состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и/или конструкторской (проектной) документации. Неработоспособным будет такое состояние, при котором значение хотя бы одного из параметров не соответствует требованиям документации. У большинства технических объектов не существует четкой границы между этими классами состояний. Однако в теории надежности промежуточные состояния не рассматриваются. Чтобы оценить надежность, надо сделать эту границу четкой в рамках рассматриваемой модели надежности. Это весьма непростая задача, и решается она путем обсуждения с участием компетентных лиц со стороны разработчика и заказчика (пользователя) объекта.

Однако далеко не всегда задача разбиения всех состояний по принципу «всё или ничего» может быть успешно решена. Тогда вводятся несколько уровней работоспособности и понятия полной и частичной работоспособности. Для многофунк-

циональных систем возможна ситуация, когда при выполнении каждой функции удается разделить все состояния на работоспособные и неработоспособные, но возможны состояния, при которых одни функции выполняются, а другие — нет. Тогда уровни работоспособности выделяют по способности выполнять все функции, группу функций, определенные функции. Для оценки надежности таких объектов могут применяться векторные показатели. Если же это неудобно, применяют свертку векторного показателя в скалярный, трактуемый как показатель эффективности.

С переходом из работоспособного состояния в неработоспособное и обратно связаны особые события в процессе функционирования объекта, называемые, соответственно, отказом и восстановлением. *Отказ* — это событие, состоящее в нарушении работоспособного состояния объекта. *Восстановление* — это событие, заключающееся в переходе объекта из неработоспособного состояния в работоспособное в результате устранения отказа путем перестройки (реконфигурации) структуры, ремонта или замены отказавших частей. Этим же термином обозначают и процесс перевода объекта из неработоспособного состояния в работоспособное.

Всякий отказ связан с нарушениями требований документации. Но не всякое нарушение требований приводит к отказу. Оно приводит к событию, называемому неисправностью, к возникновению неисправного состояния. Поэтому можно различать неисправности, не приводящие к отказам, и неисправности или их сочетания, вызывающие отказ.

Отказы можно классифицировать по различным признакам [2], [5]. По скорости изменения параметров до возникновения отказа различают внезапные и постепенные отказы. *Внезапный отказ* — это отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значений одного или нескольких параметров объекта. *Постепенный отказ* — это отказ, возникающий в результате постепенного изменения значений одного или нескольких параметров объекта. Такое деление весьма условно, так как большинство параметров изменяется с конечной скоростью, поэтому четкой границы между этими классами не существует. К постепенным отказы относят в тех случаях, когда изменения параметров легко прослеживаются, позволяя своевременно предпринять меры по предупреждению перехода объекта в неработоспособное состояние.

По характеру устранения различают *устойчивый, самоустраняющийся* и *перемежающийся отказы*. Устойчивый отказ всегда требует проведения мероприятий по восстановлению работоспособности объекта. Самоустраняющийся отказ, или сбой, устраняется в результате естественного возвращения объекта в работоспособное состояние без участия или при незначительном вмешательстве оператора, причем время устранения отказа мало или близко к нулю. Перемежающийся отказ — это многократно возникающий самоустраняющийся отказ одного и того же характера. Как правило, для его устранения требуется вмешательство оператора.

По характеру проявления различают *явные искрытые (латентные) отказы*. Явный отказ обнаруживается визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования при подготовке объекта к применению или в процессе его применения по назначению. Скрытый отказ выявляется при проведении

технического обслуживания или специальными методами диагностирования. Задержка в обнаружении скрытого отказа может привести к неправильному срабатыванию алгоритмов, некорректной обработке информации, выработке ошибочных управляющих воздействий и другим неблагоприятным последствиям.

При наличии нескольких уровней работоспособности различают *полный* и *частичные* отказы. Переход на уровень частичной работоспособности называют частичным отказом. Полная потеря работоспособности возникает при полном отказе. В многофункциональной системе полный отказ при выполнении одной из функционально самостоятельных операций может означать только частичный отказ для системы в целом, если потеряна одна или часть функций, а остальные могут выполняться.

В некоторых устройствах и элементах возможны отказы двух типов. В резисторах, полупроводниковых диодах, транзисторах, реле и ряде других элементов могут возникать отказы типа обрыв и типа короткое замыкание. В первом случае падает до нуля проводимость, а во втором — сопротивление в любых или в определенном направлении. В устройствах, назначение которых состоит в формировании определенного сигнала в ответ на определенные сочетания сигналов на входах, например в логических элементах, дискретных датчиках, устройствах контроля и диагностирования, регуляторах, также возможны отказы двух типов: отсутствие сигнала, когда он должен быть сформирован, и появление сигнала, когда его не должно быть (ложный сигнал).

По первопрочине возникновения различают *конструктивный*, *производственный* и *эксплуатационный* отказы. Конструктивный отказ возникает по причине, связанной с несовершенством или нарушением установленных правил и/или норм проектирования и конструирования. Производственный отказ связан с несовершенством или нарушением технологического процесса изготовления или ремонта (на ремонтном предприятии), а эксплуатационный отказ — с нарушением правил и/или условий эксплуатации, при возникновении непредусмотренных внешних воздействий или воздействий высокой интенсивности.

1.3. Безотказность. Ремонтопригодность. Сохраняемость. Долговечность

Надежность как комплексное свойство включает в себя единичные свойства: безотказность, ремонтопригодность, сохраняемость, долговечность. Нельзя сводить надежность ни к одному из этих свойств. Только их совокупность правильно раскрывает содержание понятия «надежность».

Безотказность — это свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки. *Наработка* — это продолжительность или объем работы объекта. Нарботка может измеряться в единицах времени или объема выполненной работы (длины, площади, массы, числа срабатываний и пр.), например: для автомобилей наработка может измеряться

километражем пробега, для реле — количеством переключений на некотором временном интервале. Если наработка измеряется в единицах времени, то в случае непрерывного применения объекта она может совпадать с календарным временем. Нарботку, в течение которой объект, снимаемый с эксплуатации после первого же отказа, сохраняет работоспособность, называют наработкой до первого отказа. Если наработка совпадает с календарным временем, она называется временем до первого отказа, или временем безотказной работы. Для других объектов наряду с наработкой до первого отказа может рассматриваться наработка между соседними отказами.

Ремонтпригодность — это свойство объекта, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта. Ремонтпригодное изделие должно иметь соответствующую конструкцию, быть приспособленным к контролю работоспособности по всем основным параметрам, демонтажу отказавшего и монтажу работоспособного оборудования.

Близким к ремонтпригодности понятием является *восстанавливаемость*. Восстанавливаемость зависит не только от приспособленности аппаратуры к предупреждению, обнаружению и устранению отказов, но и от готовности обслуживающего персонала, от организационно-технических мероприятий по обслуживанию и снабжению изделия необходимыми запасными частями, от внешних условий функционирования. Ремонтпригодное изделие становится восстанавливаемым, если при его применении допускаются вынужденные перемены в работе всего изделия или его составных частей, имеются необходимая контрольно-измерительная аппаратура, запасные части и обслуживающий персонал соответствующей квалификации. Из сказанного следует, что не каждое ремонтпригодное изделие является восстанавливаемым. Более того, одно и то же изделие в различных ситуациях может быть либо восстанавливаемым, либо невосстанавливаемым. С другой стороны, не каждое восстанавливаемое изделие ремонтпригодно. Примером может служить изделие, в котором отказ возникает вследствие резкого ухудшения условий функционирования. Его работоспособность восстанавливается без вмешательства персонала сразу же после возвращения к нормальным условиям функционирования. Работоспособность может восстанавливаться и путем реконфигурации технических и программных средств без проведения ремонта или замены отказавшего модуля.

Время, затрачиваемое на восстановление работоспособности объекта, называют *временем восстановления*. Оно состоит из времени обнаружения отказа, времени его локализации, времени устранения отказа путем ремонта или замены неисправной части на запасную, времени наладки и предпусковой проверки работоспособности. Время устранения отказа, кроме времени собственно ремонта или замены, включает в себя время доставки отказавшего модуля или прибора с места эксплуатации до ремонтной базы и обратно и время ожидания (в случае ремонта) либо время доставки запасной части со склада к месту эксплуатации (в случае замены).

Совокупность ремонтного персонала, контрольно-измерительной аппаратуры, средств технической диагностики и наладки, запасного имущества и принадлежностей (ЗИП), испытательного и вспомогательного оборудования, необходимых

для восстановления работоспособности, называют *ремонтным органом*. Часть ремонтного органа, необходимая для восстановления работоспособности одного модуля или блока, называют ремонтной бригадой, или восстанавливающим (обслуживающим) прибором. Последний термин заимствован из теории массового обслуживания, используемой для решения задач оценки надежности. Таким образом, для характеристики ремонтного органа необходимо знать не только производительность бригад, но и их количество.

Сохраняемость — это свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции в течение и после хранения и/или транспортирования. Сохраняемость характеризует поведение объекта в условиях, весьма существенно отличающихся от условий эксплуатации. Прежде всего во время хранения и транспортирования объект находится в выключенном состоянии. Кроме того, есть различия в температуре окружающей среды, влажности, других климатических условиях, механических нагрузках.

Долговечность — это свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта. *Предельное состояние* — это такое состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно. Предельное состояние возникает вследствие старения, износа или существенного снижения эффективности применения объекта. В технической документации обычно указывают, какое состояние объекта следует считать предельным.

1.4. Система и элемент

В технической литературе по теории надежности термины «элемент» и «система» употребляют в узком и широком смыслах [9]. *Элементом в узком смысле* называют изделие, выпускаемое серийно промышленностью и имеющее самостоятельное конструктивное оформление. Элемент в узком смысле — это резистор, интегральная микросхема, реле, тумблер и т. д. Под *системой в узком смысле* понимают совокупность взаимодействующих элементов в узком смысле с определенными связями между ними, предназначенных для выполнения общей задачи. Система в узком смысле — это компьютер, вычислительная сеть, автопилот, электростанция и пр. В зависимости от конструктивного исполнения и функционального назначения системы могут подразделяться на модули, блоки, приборы, агрегаты, устройства.

Элементом в широком смысле, или структурным элементом, называют любой объект, внутренняя структура которого на данном этапе анализа надежности не учитывается. В расчетах надежности такой элемент рассматривается как единое и неделимое целое. В технической кибернетике есть термин, близкий по смыслу к термину «структурный элемент», а именно — «черный ящик». При построении моделей структурный элемент иногда называют еще элементом расчета надежности.

Системой в широком смысле называют совокупность элементов в широком смысле, соединенных между собой тем или иным способом. В зависимости от этапа анализа надежности и степени его детальности один и тот же объект может рассматриваться и как элемент, и как система. Употребление термина «элемент» (в широком смысле) по отношению к техническому изделию вовсе не означает, что оно простое и содержит небольшое количество элементов в узком смысле. Элементом в широком смысле может быть не только резистор, диод, микросхема, но и логическая плата, системный блок компьютера, компьютер в целом, вычислительный комплекс. С другой стороны, система в широком смысле не обязательно должна содержать большое количество аппаратуры. Она может состоять из нескольких или даже одного элемента в узком смысле. Так, резистор может рассматриваться как система, состоящая из подложки, изолирующего слоя, напыления, выводов и пр. В дальнейшем термины «элемент» и «система» в основном будут употребляться в широком смысле, за исключением особо оговариваемых случаев.

По степени сложности системы можно подразделять на простые и сложные. Отличительные особенности сложной системы таковы: любое количество элементов, сложный характер связей между ними, многообразие выполняемых функций, наличие элементов самоорганизации, сложность поведения при изменяющихся внешних воздействиях, обусловленная наличием обратных связей, участием оперативного персонала в функционировании системы. В зависимости от факторов, учитываемых при классификации, различают *структурно сложные, функционально сложные, организационно сложные* и другие разновидности сложных систем.

Автоматизированные системы обработки информации и управления относятся, как правило, к сложным системам, хотя многие их подсистемы являются простыми системами. АСОИУ являются многофункциональными системами, могут функционировать с пониженным качеством, имеют несколько уровней работоспособности, сложную структуру, элементы адаптивности и самоорганизации.

1.5. Критерии и показатели надежности

Надежность недостаточно определить на качественном уровне (высокая, низкая, приемлемая и т. п.) — необходимо уметь оценивать ее количественно и сравнивать различные изделия по их надежности. С этой целью вводятся критерии и показатели надежности. *Показатель надежности* — это количественная характеристика одного или нескольких единичных свойств, определяющих надежность объекта. Различают единичные и комплексные показатели надежности. К единичным относят показатели безотказности, ремонтпригодности, долговечности, сохраняемости. Комплексные показатели характеризуют несколько единичных свойств, например безотказность и ремонтпригодность.

В настоящее время в теории надежности используют вероятностные показатели [3], [4], [7]. Каждый объект характеризуется вектором единичных и комплексных показателей. Поскольку при сравнении один из вариантов может быть лучше альтернативного варианта по одному показателю и хуже по другому, среди показателей выбирают тот, который в конкретных условиях применения наилучшим образом отражает свойство надежности, и придают ему функцию критерия надежности. Как правило, именно этот показатель нормируется в техническом задании на разработку и в технической документации. Можно утверждать и обратное: нормируемый показатель надежности используют в качестве критерия надежности. Не следует думать, что эти понятия совпадают полностью, так как нормироваться может один показатель, а при сравнении вариантов использоваться другой.

Необходимо отличать критерий надежности от критерия отказа и критерия предельного состояния. *Критерий отказа* — это признак или совокупность признаков неработоспособного состояния объекта, установленные в нормативно-технической и/или конструкторской документации. Соответственно, *критерий предельного состояния* — это признак или совокупность признаков предельного состояния.

Выбор и обоснование номенклатуры показателей надежности происходит с учетом назначения изделия и условий его эксплуатации [8]. Поэтому прежде чем рассматривать конкретный перечень показателей надежности, полезно классифицировать объекты по указанным признакам. По назначению изделия подразделяют на два класса: изделия конкретного назначения (ИКН), имеющие только один вариант применения по назначению (примеры: принтер, канал измерения концентрации вещества, детектор радиационного контроля и пр.), и изделия общего назначения (ИОН), которые имеют несколько вариантов применения или функция которых универсальна (например, источник электропитания, компьютер, магистраль системы связи или внутреннего интерфейса и пр.).

По возможности восстановления работоспособности после отказа в период применения по назначению различают *невосстанавливаемые* (НВО) и *восстанавливаемые* (ВО) объекты. Объект относят к группе ВО, если восстановление предусмотрено документацией и технически возможно непосредственно на месте его эксплуатации. К группе НВО объект относят тогда, когда текущий ремонт технически невозможен или экономически нецелесообразен. При этом один и тот же объект в одних условиях может быть восстанавливаемым, а в других — невосстанавливаемым. Так, для легкового автомобиля при значительном удалении от сервисных центров это зависит от умения водителя устранять отказы и неисправности, от наличия запасных частей, от временных ограничений при поездке, от ограничений по условиям гарантийных обязательств и пр.

В зависимости от режима применения изделия подразделяют на три класса: *однократного применения* (ОКРП), *непрерывного длительного применения* (НПДП), *многократного циклического применения* (МКЦП).

В зависимости от возможности и необходимости технического обслуживания (выполнения профилактических работ и контроля технического состояния) изделия подразделяют на *обслуживаемые* (ОБ) и *необслуживаемые* (НОБ).

1.5.1. Невосстанавливаемые изделия

Показатели безотказности. Основной изучаемой случайной величиной для восстанавливаемых изделий является *наработка до первого отказа* T_0 . Если наработка измеряется в единицах времени, то она совпадает с календарным временем для изделий, работающих в режимах ОКРП и НПДП, и с суммарной длительностью выполненных циклов — для работающих в режиме МКЦП. Если отказ может обесценивать часть наработки, то в наработку до отказа включают только ту ее часть, которая не обесценена отказом. Вероятностные характеристики наработки T_0 и являются показателями безотказности НВО. Их особенность состоит в том, что они определяются по результатам наблюдений за некоторым множеством экземпляров однотипных изделий, но используются в качестве показателя надежности каждого конкретного изделия. Поэтому в дальнейшем кроме вероятностного приводится и статистическое определение, которое можно использовать как один из способов статистической оценки искомой вероятностной характеристики.

Вероятность безотказной работы $P(t)$. Вероятностью безотказной работы называют вероятность того, что изделие будет работоспособно в течение заданной наработки при заданных условиях эксплуатации:

$$P(t) = P(T_0 > t). \quad (1.1)$$

По статистическим данным об отказах вероятность безотказной работы определяют по формуле

$$\bar{P}(t) = (N(0) - n(t)) / N(0), \quad (1.2)$$

где $N(0)$ — число изделий в начале наблюдения; $n(t)$ — число отказавших за время t изделий. В начальный момент времени $P(0) = 1$, если при включении отказы невозможны, и $0 < P(0) < 1$, если при включении изделие может отказаться. При увеличении времени вероятность $P(t)$ монотонно уменьшается и для любых технических изделий асимптотически приближается к нулю.

Вероятность отказа $Q(t)$ есть вероятность того, что при заданных условиях эксплуатации в течение заданной наработки произойдет хотя бы один отказ, то есть

$$Q(t) = P(T_0 < t). \quad (1.3)$$

Отказ и безотказная работа — противоположные события. Поэтому

$$Q(t) = 1 - P(t). \quad (1.4)$$

Из (1.2) и (1.4) следует, что

$$\bar{Q}(t) = n(t) / N(0). \quad (1.5)$$

Согласно (1.3), функцию $Q(t)$ можно трактовать как функцию распределения случайной величины T_0 .

Дифференциал функции $Q(t)$ называется элементом вероятности и представляет собой вероятность того, что отказ произойдет в бесконечно малой окрестности точки t :

$$dQ(t) = P(t \leq T_0 < t + dt). \quad (1.6)$$

Частота отказов $a(t)$ есть плотность распределения времени безотказной работы (наработки) изделия до первого отказа. Согласно вероятностному определению,

$$a(t) = Q'(t) = -P'(t); \quad Q(t) = \int_0^t a(x) dx; \quad P(t) = \int_t^\infty a(x) dx. \quad (1.7)$$

При наблюдении за работой $N(0)$ изделий можно определить частоту отказов как отношение числа отказавших в единицу времени изделий к общему числу изделий при условии, что отказавшие изделия не восстанавливаются:

$$\bar{a}(t) = n(t, \Delta t) / N(0)\Delta t,$$

где $n(t, \Delta t) = n(t + \Delta t/2) - n(t - \Delta t/2)$ — число отказавших изделий в интервале $(t - \Delta t/2, t + \Delta t/2)$.

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ есть плотность распределения наработки до первого отказа при условии, что отказавшее изделие до рассматриваемого момента времени работало безотказно. Согласно вероятностному определению,

$$\lambda(t) = a(t) / P(t) = -\ln P(t); \quad P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right). \quad (1.8)$$

По статистическому определению, интенсивность отказов есть отношение числа отказавших в единицу времени изделий к среднему числу работоспособных на рассматриваемом отрезке времени изделий:

$$\bar{\lambda}(t) = n(t, \Delta t) / N_{cp} \Delta t,$$

где $N_{cp} = N(0) - (n(t + \Delta t/2) + n(t - \Delta t/2)) / 2$. Поскольку существует однозначная связь между функциями $P(t)$, $Q(t)$, $a(t)$ и $\lambda(t)$, достаточно задать лишь одну из них, чтобы по формулам связи найти все остальные, то есть в смысле полноты сведений о надежности изделия эти функции эквивалентны. Они определяются по статистическим данным о количестве отказов невосстанавливаемых изделий.

Если же до начала интересующего нас интервала времени изделие уже проработало в течение времени τ , то для оценки надежности необходимо вводить условные показатели при условии, что изделие уже некоторое время проработало безотказно. Рассмотрим некоторые из этих параметров, считая, что одна из функций — $P(t)$, $Q(t)$, $a(t)$ или $\lambda(t)$ — известна.

Вероятность безотказной работы $P(\tau, t)$, Вероятность безотказной работы в интервале $(\tau, \tau + t)$ определяется как вероятность того, что отказа не будет в интервале $\tau + t$, при условии, что его не было в течение времени τ :

$$P(\tau, t) = P(T_0 > \tau + t | T_0 > \tau) = P(\tau + t) / P(\tau) = \exp\left(-\int_\tau^{\tau+t} \lambda(x) dx\right), \quad (1.9)$$

где $P(t)$ — функция (1.1). Прочие показатели надежности определяются по формулам

$$\begin{aligned} Q(\tau, t) &= 1 - P(\tau, t) = 1 - \exp\left(-\int_\tau^{\tau+t} \lambda(x) dx\right); \\ a(\tau, t) &= \frac{d}{dt} Q(\tau, t) = -\frac{d}{dt} P(\tau, t) = a(\tau + t) / P(\tau); \\ \lambda(\tau, t) &= \frac{d}{dt} Q(\tau, t) = -\frac{d}{dt} \ln P(\tau, t) = \lambda(\tau + t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Средняя наработка до первого отказа $\bar{T}_0$ есть математическое ожидание наработки до первого отказа T_0 . Используя определение элемента вероятности (1.6), можно записать:

$$\bar{T}_0 = MT_0 = \int_0^{\infty} t dQ(t). \quad (1.11)$$

Если функция $Q(t)$ дифференцируема при всех $t > 0$, то из (1.11) и (1.7) получим:

$$\bar{T}_0 = \int_0^{\infty} t a(t) dt.$$

Заменяя в (1.11) $dQ(t)$ на $dP(t)$, интегрируя по частям и учитывая свойства функции $P(t)$, имеем

$$\bar{T}_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (1.12)$$

Отсюда следует, что средняя наработка до первого отказа равна площади под кривой $P(t)$ на всей полуоси $(0, \infty)$.

По результатам наблюдения за работой до отказа всех $N(0)$ изделий можно составить следующую статистическую оценку средней наработки до первого отказа:

$$\hat{T}_0 = \sum_{i=1}^{N(0)} t_i / N(0),$$

где t_i — наработка до отказа i -го изделия.

Средняя остаточная наработка до отказа $\bar{T}_0(\tau)$ есть математическое ожидание случайной величины $T_0 - \tau$ при условии, что $T_0 > \tau$. Используя функции (1.9) и (1.10), составим выражение для средней остаточной наработки до первого отказа:

$$\bar{T}_0(\tau) = \int_0^{\infty} t dQ(\tau, t) = \int_0^{\infty} t dQ(\tau + t) / P(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} P(t) dt / P(\tau). \quad (1.13)$$

При $\tau = 0$ функции (1.9), (1.10) и (1.13) совпадают с (1.1), (1.4), (1.7), (1.8) и (1.11).

Показатели долговечности. При определении показателей долговечности вводят следующие случайные величины: ресурс T_p — суммарная наработка изделия от начала эксплуатации до перехода в предельное состояние, установленное в технической документации; срок службы T_c — календарная продолжительность службы изделия от начала его эксплуатации до перехода в предельное состояние. Различают средний, гамма-процентный и назначенный ресурсы (срок службы). Средний и гамма-процентный ресурсы (срок службы) — это, соответственно, математическое ожидание случайной величины T_p (T_c) и квантиль по уровню вероятности γ , выраженному в процентах. Назначенный ресурс (срок службы) — это суммарная наработка (календарная продолжительность), по достижении которой эксплуатация изделия прекращается независимо от его технического состояния. Остаточный ресурс $T_{p, o}$ (срок службы $T_{c, o}$) — это суммарная наработка (календарная продолжительность) от момента контроля технического состояния до перехода в предельное состояние. Аналогично вводится понятие остаточного

срока хранения $T_{\text{хр.о.}}$. Для случайных величин $T_{\text{р.о.}}$, $T_{\text{с.о.}}$ и $T_{\text{хр.о.}}$ используются те же характеристики, что и для $T_{\text{р.}}$, $T_{\text{с.}}$ и $T_{\text{хр.}}$.

Показатели сохраняемости. Для оценки сохраняемости рассматривают характеристики случайной величины — срока сохраняемости, определяемой как календарная продолжительность хранения и/или транспортирования изделия, в течение которой сохраняются в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность изделия выполнять заданные функции. В качестве показателей сохраняемости используют средний и гамма-процентный сроки сохраняемости.

1.5.2. Восстанавливаемые изделия

Типовая диаграмма функционирования ВОИ состоит из чередующихся интервалов безотказной работы и восстановления. Эксплуатация изделия продолжается до тех пор, пока ремонт не становится нецелесообразным или пока оно не будет снято с эксплуатации по достижении назначенного срока службы или назначенного ресурса. Для оценки надежности таких изделий недостаточно рассматривать характеристики наработки до первого отказа — нужно знать также характеристики процесса функционирования после первого отказа. С этой целью в теории надежности изучаются характеристики следующих случайных величин: наработки между отказами T_{0i} , времени восстановления после i -го отказа $T_{\text{в}i}$, наработки до i -го отказа $T_{\text{н}i}$, полного времени до i -го восстановления $T_{\text{п}i}$, числа отказов до получения наработки t $N_0(t)$, числа моментов восстановления за время t $N_{\text{в}}(t)$, суммарной наработки в интервале $(0, t)$ $T_{\text{н.с}}(t)$, суммарного времени восстановления в интервале длительностью t $T_{\text{в.с}}(t)$.

Характеристики этих случайных величин как раз и являются показателями надежности восстанавливаемых изделий. При формулировке определений будем использовать следующие обозначения: $F_i(t) = P(T_{\text{н}i} < t)$ — распределение наработки до i -го отказа, $V_i(t) = P(T_{\text{в}i} < t)$ — распределение времени до i -го восстановления, $P_n(t) = P(N_0(t) = n)$ — вероятность возникновения n отказов до получения наработки t , $P_{\text{н}n}(t) = P(N_{\text{в}}(t) = n)$ — вероятность возникновения n моментов восстановления за время t . Рассмотрим теперь показатели надежности.

Показатели ремонтпригодности. К ним относятся вероятность восстановления за время t $F_{\text{в}i}(t) = P(T_{\text{в}i} < t)$, вероятность $G_{\text{в}}(t) = P(T_{\text{в}} \geq t)$ того, что восстановление не закончится за время t ; плотность распределения времени восстановления $f_{\text{в}}(t) = F'_{\text{в}}(t)$; интенсивность восстановления $\mu(t) = f_{\text{в}}(t) / G_{\text{в}}(t)$; среднее время восстановления $\bar{T}_{\text{в}}$.

Вероятностное и статистическое определения среднего времени восстановления соответствуют формулам

$$\bar{T}_{\text{в}} = \int_0^{\infty} t f_{\text{в}}(t) dt = \int_0^{\infty} G_{\text{в}}(t) dt, \quad \bar{T}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^n T_{\text{в}i} / n,$$

где n — число отказов, $T_{\text{в}i}$ — длительность i -го восстановления.

Среднее число отказов $H(t)$ до наработки t есть математическое ожидание случайной величины $N_0(t)$. Используя введенные ранее обозначения, можем записать:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t).$$

учитывая, что события $\{T_{ni} < t\}$ и $\{N_0(t) \geq i\}$ эквивалентны, получаем соотношение

$$P_n(t) = P(N_0(t) = n) = P(N_0(t) > n) - P(N_0(t) > n+1) = F_n(t) - F_{n+1}(t). \quad (1.14)$$

Из (1.14) имеем

$$H(t) = F_1(t) - F_2(t) + 2(F_2(t) - F_3(t)) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что дифференциал функции $dH(t)$ есть вероятность того, что в бесконечно малой окрестности точки t произойдет отказ изделия, причем не обязательно впервые. Статистическую оценку среднего числа отказов получают следующим образом. Пусть в начальный момент времени поставлено на эксплуатацию $N(0)$ изделий. После отказа изделие ремонтируется или заменяется новым, и так происходит до тех пор, пока на каждом рабочем месте не будет достигнута наработка t . Если суммарное число отказов всех $N(0)$ изделий равно $n(t)$, то среднее число отказов

$$\bar{H}(t) = n(t) / N(0). \quad (1.16)$$

По форме правая часть (1.16) совпадает с (1.5). Однако $\bar{Q}(t)$ и $\bar{H}(t)$ — совершенно различные функции, так как в (1.5) рассматриваются невосстанавливаемые изделия, а в (1.16) — восстанавливаемые. В первом случае число работоспособных изделий уменьшается со временем, а во втором случае оно неизменно и равно $N(0)$. Поэтому при прочих равных условиях $n(t)$ в (1.16) обычно больше, чем в (1.5), за счет повторных отказов изделий.

Среднее число моментов восстановления $H_2(t)$ на интервале времени $(0, t)$ есть математическое ожидание случайной величины $N_n(t)$. Согласно определению,

$$H_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_{nn}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(V_n(t) - V_{n+1}(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t). \quad (1.17)$$

Дифференциал функции $dH_2(t)$ есть вероятность того, что в бесконечно малой окрестности точки t работоспособность изделия восстановится, причем не обязательно впервые.

Параметр (интенсивность) потока отказов $\omega(t)$. Согласно вероятностному определению,

$$\omega(t) = \frac{dH(t)}{dt}. \quad (1.18)$$

Если учесть формулу (1.15), то можно записать

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \quad (1.19)$$

где $f_n(t)$ — плотность распределения наработки до n -го отказа. Согласно статистическому определению, параметр потока отказов есть среднее число отказов восстанавливаемого изделия в единицу времени. Определяется этот параметр по формуле

$$\bar{\omega}(t) = n(t, \Delta t) / N(0)\Delta t, \quad (1.20)$$

где $n(t, \Delta t) = n(t + \Delta t / 2) - n(t - \Delta t / 2)$; $n(t)$ — число отказов до наработки t .

Параметр потока восстановлений $\omega_2(t)$ есть среднее число моментов восстановления в единицу времени. Формулы для $\omega_2(t)$ получают из формул для $\omega(t)$ после замены в них числа отказов на число моментов восстановления. Так, из (1.18)–(1.20) имеем

$$\omega_2(t) = \frac{dH_2(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dV_n(t)}{dt}, \quad \bar{\omega}_2(t) = n_n(t) / N(0)\Delta t.$$

Средняя наработка на отказ $\bar{T}_n$. Согласно вероятностному определению, для периода от наработки τ до наработки $\tau + t$ средняя наработка на отказ определяется по формуле

$$\bar{T}_n(\tau, t) = t / (H(\tau + t) - H(\tau)).$$

Если учесть (1.16), то можно определить среднюю наработку на отказ по статистическим данным:

$$\hat{T}_n(\tau, t) = tN(0) / (n(\tau + t) - n(\tau)) = t / (\bar{H}(\tau + t) - \bar{H}(\tau)).$$

В частности, при $\tau = 0$ имеем

$$\bar{T}_n(0, t) = \bar{T}_n(t) = t / H(t).$$

Стационарное значение средней наработки на отказ

$$\bar{T}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} (t / H(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 / \omega(t)). \quad (1.21)$$

Если наблюдение за изделием проводится не до наработки t , а в течение времени t , то статистическая оценка средней наработки на отказ получается из выражения

$$\hat{T}_n(t) = \left(\sum_{i=1}^n T_{0i} + T_0^* \right) / n = T_{n.c}(t) / n,$$

где n — число отказов за время t ; T_0^* — наработка от момента последнего восстановления до момента t .

Показатели надежности $V(t)$, $\omega_2(t)$ и $H_2(t)$ являются комплексными, так как зависят от показателей безотказности и ремонтпригодности. Остальные показатели — единичные. Рассмотрим теперь другие комплексные показатели надежности восстанавливаемых изделий.

Нестационарный коэффициент готовности $K_r(t)$ есть вероятность того, что изделие окажется в работоспособном состоянии в момент времени t в периоде применения по назначению. Используя статистические данные, можно оценить нестационарный коэффициент готовности с помощью соотношения

$$K_r(t) = N(t) / N(0) = T_{n.c}(t) / t, \quad (1.22)$$

где $N(t)$ — число работоспособных в момент времени t изделий из общего числа изделий $N(0)$.

Коэффициент готовности (стационарный коэффициент готовности) K_r . Если проанализировать зависимость нестационарного коэффициента готовности от времени, то можно заметить, что он изменяется от 1 при $t = 0$ до некоторого

постоянного значения, называемого стационарным коэффициентом готовности, или просто коэффициентом готовности. Поскольку коэффициент готовности не зависит от времени, то его определяют как вероятность того, что изделие окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, за исключением планируемых периодов, в течение которых применение изделия по назначению не предусматривается. Стационарный период эксплуатации, когда $K_r(t)$ становится достаточно близким к своему предельному значению K_r , наступает по истечении некоторого промежутка времени, называемого переходным периодом. Строго математически переходный период длится бесконечно долго, так как функция $K_r(t)$ приближается к K_r только асимптотически, а поэтому

$$K_r = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r(t). \quad (1.23)$$

Из (1.22) и (1.23) следует, что для коэффициента готовности может быть использована статистическая оценка

$$\bar{K}_r = N(\infty) / N(0) = N / N(0),$$

где N — число работоспособных изделий из общего количества $N(0)$ в произвольный момент времени стационарного периода эксплуатации.

В режиме МКЦП коэффициент готовности имеет также следующую трактовку — это вероятность успешного выполнения одного цикла работ очень малой длительности по заявке, поступившей в момент t или в произвольный момент времени. Если заявка может появиться в случайный момент переходного периода $(0, t)$, то используют среднее значение коэффициента готовности

$$K_r^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t K_r(x) dx.$$

Статистическую оценку этой характеристики находят по формуле

$$\bar{K}_r^*(t) = \bar{T}_{н.с.}(t) / (\bar{T}_{н.с.}(t) + \bar{T}_{в.с.}(t));$$

$$\bar{T}_{н.с.}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{T}_{н.с.}(t) / n(t); \quad \bar{T}_{в.с.}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{T}_{в.с.}(t) / n(t),$$

где $T_{н.с.}(t)$ и $T_{в.с.}(t)$ — суммарная наработка и суммарное время восстановления i -го изделия в интервале $(0, t)$; N — число испытываемых изделий; $n(t)$ — суммарное число отказов за время t . Очевидно, что при монотонно убывающей функции $K_r(t)$ среднее значение коэффициента готовности $K_r^*(t) \geq K_r(t)$. Кроме того, выполняется соотношение

$$K_r = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r^*(t) = \bar{T}_{н.с.} / (\bar{T}_{н.с.} + \bar{T}_{в.с.}), \quad (1.24)$$

где $\bar{T}_{н.с.}$ — средняя наработка на отказ; $\bar{T}_{в.с.}$ — среднее время восстановления.

Для оценки надежности изделий, работающих в режиме МКЦП с длительностью одного цикла t , используют комплексный показатель — коэффициент оперативной готовности в двух вариантах.

Нестационарный коэффициент оперативной готовности $K_{о.р.}(\tau, t)$ есть вероятность того, что изделие окажется в работоспособном состоянии в момент τ периода применения по назначению и будет работать безотказно еще в течение

заданного интервала времени (заданной наработки) t . С увеличением τ зависимость от момента поступления заявки на выполнение работ уменьшается и функция $K_{o.r}(\tau, t)$ асимптотически приближается к величине $K_{o.r}(t)$, называемой стационарным коэффициентом оперативной готовности, или просто коэффициентом оперативной готовности:

$$K_{o.r}(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{o.r}(\tau, t).$$

Коэффициент оперативной готовности $K_{o.r}(t)$ есть вероятность того, что изделие окажется работоспособным в произвольный момент времени, и начиная с этого момента будет работоспособным еще в течение заданного времени (заданной наработки). Связь между показателями надежности выражается формулами

$$K_{o.r}(\tau, t) = K_r(\tau)P(t|\tau); \quad K_{o.r}(t) = K_r P_0(t); \quad K_r(\tau) = K_{o.r}(\tau, 0); \quad (1.25)$$

$$K_r = K_{o.r}(0); \quad P(t) = K_{o.r}(0, t).$$

Вероятность $P_0(t)$ отличается от вероятности безотказной работы $P(t)$, определенной по формуле (1.1), так как в режиме МКЦП к моменту прихода заявки изделие некоторое время было работоспособным. Поэтому

$$P_0(t) = P(T'_0 > t),$$

где T'_0 — остаточное время безотказной работы.

Следующие два показателя надежности используют тогда, когда в изделии могут возникать скрытые отказы, то есть когда система контроля и диагностирования (СКД) не идеальна и не обеспечивает мгновенное и достоверное обнаружение отказов.

Коэффициент контролируемой готовности $K_{к.г}$ есть вероятность того, что, согласно показаниям СКД, изделие работоспособно в произвольный момент времени периода применения по назначению. С помощью средних значений интервалов можно найти $K_{к.г}$ по формуле

$$K_{к.г} = (\bar{T}_н + \bar{T}_{с.о}) / (\bar{T}_н + \bar{T}_{с.о} + \bar{T}_в),$$

где $\bar{T}_н$ — средняя наработка на отказ; $\bar{T}_в$ — среднее время восстановления; $\bar{T}_{с.о}$ — среднее время пребывания в состоянии скрытого отказа. При тех же условиях коэффициент готовности

$$K_r = \bar{T}_н / (\bar{T}_н + \bar{T}_{с.о} + \bar{T}_в).$$

Отсюда следует, что $K_{к.г} \geq K_r$.

Вероятность безотказного применения $P_{нр}(t)$ есть вероятность того, что до наработки t скрытый отказ не появится при условии, что его не было в начальный момент времени. Из определения следует формула связи

$$K_{o.r}(t) = K_{к.г} P_{нр}(t). \quad (1.26)$$

Сравнивая (1.26) и (1.25), получим:

$$P_{нр}(t) = K_1 P_0(t) / K_{к.г}. \quad (1.27)$$

Очевидно, что $P_{np}(t) \leq P_0(t)$. Равенство имеет место только при $\bar{T}_{c.o.} = 0$.

Для изделий, допускающих в процессе эксплуатации плановое техническое обслуживание, вводится еще один показатель — коэффициент технического использования.

Коэффициент технического использования $K_{т.и}$ есть отношение математического ожидания суммарного времени пребывания изделия в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания изделия в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период:

$$K_{т.и} = \bar{T}_{o.c} / (\bar{T}_{o.c} + \bar{T}_{в.с} + \bar{T}_{т.с}).$$

Статистической оценкой $K_{т.и}$ при наблюдении за N изделиями являются отношения

$$\bar{K}_{т.и} = T_{o.c}(N) / (T_{o.c}(N) + T_{в.с}(N) + T_{т.с}(N));$$

$$T_{o.c}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{o.ci}; \quad T_{в.с}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{в.ci}; \quad T_{т.с}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{т.ci},$$

где $T_{o.ci}$, $T_{в.ci}$, $T_{т.ci}$ — суммарные значения фактической наработки, времени восстановления и времени технического обслуживания i -го экземпляра изделия.

Список литературы

1. Ллойд Д., Липов М. Надежность. — М.: Сов. радио, 1964. — 686 с.
2. ГОСТ 27.002–89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. — М.: Изд-во стандартов, 1989. — 36 с.
3. ГОСТ 27.003–83. Надежность в технике. Выбор и нормирование показателей надежности. — М.: Изд-во стандартов, 1983. — 18 с.
4. ГОСТ 23146–78. Система технического обслуживания и ремонта техники. Выбор и задание показателей ремонтпригодности. Общие требования. — М.: Изд-во стандартов, 1978. — 10 с.
5. Надежность систем энергетики: Сборник рекомендуемых терминов. — М.: Наука, 1980. — 42 с.
6. ГОСТ 15467–79. Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения. — М.: Изд-во стандартов. — 26 с.
7. Надежность в технике. Выбор основных показателей надежности: Методические рекомендации МР 69–82 / ВНИИНМАШ. — М., 1982. — 12 с.
8. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 1. Методология. Организация. Терминология / Под ред. А. И. Рембезы. — М.: Машиностроение, 1986. — 224 с.
9. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ: Учеб. пособие / ЛПИ. — Л., 1975. — 220 с. — Гл. 1.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятия надежности. Назовите три особенности этого понятия.
2. Перечислите единичные свойства надежности и их определения.
3. Дайте понятия отказа и сбоя. Какие разновидности отказов и сбоев существуют?
4. Что такое элемент и система? В чем состоит диалектика взаимосвязи этих понятий?
5. Перечислите режимы применения и технического обслуживания изделий.
6. Назовите единичные и комплексные показатели надежности. В чем состоит их взаимосвязь? Дайте вероятностные и статистические определения показателей надежности.

Глава 2

Факторы, влияющие на надежность аппаратно-программного комплекса

2.1. Общие сведения

Все факторы, влияющие на надежность АПК, можно разделить на три группы: конструктивные, производственные и эксплуатационные [1].

К *конструктивным* относят факторы, способные еще на этапе проектирования и конструирования определить условия возникновения последующих отказов аппаратуры и ПО. К ним относятся выбор типов элементов (элементной базы); выбор принципиальной, электрической, гидравлической, структурной, логической и других схем; выбор режимов работы элементов; выбор уровня автоматизации проектирования; выбор технологии программирования; организация технологического процесса (ТП) разработки ПО.

К *производственным* относят факторы, возникающие в процессе изготовления АПК и воздействующие на его надежность. Такими факторами являются контроль качества материалов и элементов, получаемых от поставщиков; входной контроль покупных комплектующих изделий (ПКИ); организация ТП производства; организация процесса настройки и наладки аппаратуры, процессов тестирования ПО на технических средствах, входящих в состав АПК; контроль качества продукции, в том числе качества ПО.

К *эксплуатационным* факторам относятся внешние воздействующие факторы (ВВФ) и мероприятия, проводимые при техническом обслуживании (ТО) аппаратуры. В зависимости от характера воздействия на изделия все возможные ВВФ делят на шесть классов: механические факторы: климатические и другие природные факторы; радиационные факторы; термические факторы; ВВФ электромагнитных полей; ВВФ специальных, в том числе агрессивных, сред.

К мероприятиям ТО относят регулировки, профилактические работы, в том числе планово-предупредительные ремонты, тренировки, предпусковые испытания, контроль работоспособности, сбор и анализ сведений об отказах.

Охарактеризуем теперь более подробно основные факторы, влияющие на надежность АПК.

2.2. Климатические факторы

Среди климатических факторов можно выделить девять групп: атмосферное давление, температура, окружающая среда, влажность воздуха или других газов, атмосферные осадки, пыль и песок, солнечное излучение (инсоляция), поток воздуха и других газов, среда с коррозионно-активными агентами, в том числе биологическая среда, ледово-грунтовая среда.

2.2.1. Характеристика влияния климатических факторов

Воздействие тепла и холода

Действие тепла и холода определяется местом установки техники (на земле в стационарных помещениях, на автомашине, на корабле, самолете), категорией изделия по климатическому исполнению, расстоянием от внешних источников тепловых воздействий.

Различают три вида тепловых воздействий: *непрерывное, периодическое, аperiodическое*. Первый вид воздействий имеет место при эксплуатации изделий в стационарных помещениях. При стационарных тепловых воздействиях повреждение возникает в основном вследствие превышения при эксплуатации предельно допустимых значений температуры. На большинство типов изделий наземной, корабельной и авиационной техники оказывается периодическое тепловое воздействие. Оно возникает при повторно-кратковременном включении под нагрузку, при резких колебаниях условий эксплуатации (взлет, полет, посадка), при суточных изменениях внешней температуры. Перепады температуры наземных изделий могут достигать 60 °С, авиационной аппаратуры — 80 °С. Многократные деформации изделий при периодических тепловых воздействиях могут усиливаться одновременным резким изменением давления. Аperiodическое тепловое воздействие наблюдается в процессе работы изделий ракетной техники и космических аппаратов — в моменты запуска и вхождения в плотные слои атмосферы. Следствием теплового удара могут быть внезапные отказы техники. Высокая скорость изменения температуры (тепловой удар) приводит к быстрому изменению (расширению или сжатию) размеров материалов. При повышенных температурах заливочные материалы размягчаются и происходит расширение сопрягаемых с ними материалов. При переохлаждении, наоборот, заливочные материалы сжимаются, в местах их сопряжения с металлами начинается растрескивание, у выводов электрических изделий образуются объемы, не заполненные заливоч-

ным материалом, повышается вероятность электрического перекрытия. От температуры существенно зависят электроизоляционные свойства полярных пластических масс. У поливиниловых соединений, содержащих гидроксильную группу, с ростом температуры увеличивается угол потерь. При объемных расширениях наблюдается линейный рост занимаемого изделием объема с ростом температуры.

Каждый материал имеет определенный коэффициент линейного расширения, с помощью которого можно вычислить изменение длины элементов конструкции, вызванное температурным воздействием. В реальных конструкциях не всегда в достаточной степени учитывают различия в коэффициентах расширения, вследствие чего при эксплуатации возникают перенапряжения и поломки элементов конструкции.

Воздействие влаги

Повышенная влажность может вызвать изменение поверхностного или объемного сопротивления изоляции, снижение электрической прочности материалов, накопление и миграцию объемных зарядов в биполярных полупроводниковых ИМС- и МОП-структурах; изменение физических свойств материалов, их плотности, температуры плавления, изменение размеров и коробление отдельных деталей; ускоренное старение, окисление и коррозию материалов, снижение стойкости к поражению грибом, повышение интенсивности износа покрытий, изоляции, деталей и пр.; увеличение удельных электрических потерь в материалах и изделиях.

Увлажнение материалов повышает скорость протекания коррозионных процессов согласно уравнению

$$\frac{dy}{dt} = C_p \kappa_p \exp\left(\frac{-E_k}{RT}\right),$$

где y — толщина оксидной пленки; C_p — концентрация реагента (влаги, кислорода, агрессивной среды); E_k — энергия активации коррозионного процесса; R — универсальная газовая постоянная; T — температура, К. Скорость протекания коррозионных процессов, а также развития трещин зависит не только от влажности и температуры, но и от качества материалов, конструкции изделия, технологии изготовления и средств антикоррозионной защиты. Рассмотрим некоторые примеры.

Медь — один из важнейших материалов электротехники и электроники — имеет хорошую защиту от коррозии. Под воздействием кислорода, углекислоты и влаги воздуха на поверхности меди образуется прочный защитный слой из карбоната меди. Для намотки катушек индуктивности обычно используют эмалированную медную проволоку. В некачественных эмалях часто возникают трещины. Сквозь них электролит (вода) может соприкоснуться с медью, которая вследствие протекания тока является электродом с ярко выраженной полярностью и в случае анодной нагрузки ускоренно переходит в раствор. Экспериментально установлено, что срок службы таких катушек при 75% относительной влажности составляет примерно три года, а при относительной влажности 100% — всего

5 дней (при температуре 45 °С). Для сведения читателей отметим, что в Москве и ее окрестностях средняя относительная влажность почти круглый год (кроме мая) более 80%, а в июле—сентябре — более 85%.

Другой пример относится к пайкам. В качестве припоя используют сплав олова со свинцом. Под воздействием высоких влажности и температуры сплавы с содержанием олова менее 60% быстро корродируют. При низких температурах чистое олово или олово в сплавах с алюминием или цинком превращается в аморфную модификацию. Содержание в сплаве более 50% свинца препятствует возникновению этого явления, называемого оловянной чумой.

Воздействие солнечных лучей

При эксплуатации изделий на открытом воздухе их поверхность подвергается действию прямых солнечных лучей. Солнечная радиация является главным источником тепловой энергии. Она существенно зависит от климатического района, циркуляции атмосферы и особенностей подстилающей поверхности. Так, в солнечных районах (Ашхабад, Астана) среднемесячные интегральные плотности потока прямого S и суммарного Q солнечного излучения в 12 ч 30 мин вне зависимости от облачности достигают: в июне $S = 719$ Вт/м², $Q = 900$ Вт/м²; в сентябре $S = 824$ Вт/м², $Q = 810$ Вт/м². В эти же месяцы в районе Оймякона указанные показатели составляют: в июне $S = 356$ Вт/м², $Q = 537$ Вт/м²; в сентябре $S = 377$ Вт/м², $Q = 349$ Вт/м². Возникновение максимальных положительных температур непосредственно связано с уровнем солнечной радиации.

Воздействие солнечной радиации на технические изделия определяется диапазоном длины электромагнитных волн, достигающих их поверхности, а также распределением радиационного баланса, учитывающего приход и расход энергии солнечной радиации. На волны ультрафиолетовой части спектра приходится около 9% энергии солнечного излучения, на волны видимой части спектра — около 41%, на инфракрасные волны — около 50%. Наличие облаков уменьшает количество солнечной энергии, достигающей Земли, примерно на 75% по сравнению с ясными днями. Так, измерения поверхностной плотности теплового потока суммарной радиации при различной облачности, проведенные в Подмосковье в летние месяцы, показали следующее: при высоте солнца 44,9° поток изменяется от 784 Вт/м² при безоблачной погоде до 259 Вт/м² при сплошной облачности, а при высоте солнца 9° — соответственно, от 126 Вт/м² до 42 Вт/м².

Интегральная плотность теплового потока зависит и от высоты над уровнем моря: при высоте до 15 км она составляет 1125 Вт/м², в том числе ультрафиолетовая часть — 42 Вт/м², а при высоте свыше 15 км — соответственно, 1380 Вт/м² и 100 Вт/м².

Наличие в воздухе пыли и паров воды существенно уменьшает плотность теплового потока солнечной радиации. Наиболее сильное действие на материалы и изделия оказывают солнечные лучи, падающие на поверхность перпендикулярно. Земля является плохим проводником тепла, поэтому солнечная радиация очень незначительно влияет на температуру приземного слоя. Проиллюстрируем это утверждение примером. Так, если в утренние часы температура у по-

верхности асфальта, у поверхности земли в стороне от асфальта, а также на высотах 30 и 120 см над поверхностью земли составляла 30 °С, то в 15 ч температура у поверхности асфальта возросла до 52 °С, на высотах 30 и 120 см — до 43 и 40 °С соответственно, тогда как у поверхности земли в стороне от асфальта — всего до 34 °С.

Основным фактором воздействия солнечного излучения на технические изделия является нагрев поверхности кожуха изделия и, как следствие, повышение температуры внутри устройства. Если учитывать крайние значения параметров климатической зоны (температура воздуха, лучистая экспозиция солнечного излучения), то можно оценить температуру нагрева элементов кожуха закрытого прибора. Тепло, поглощаемое верхней крышкой кожуха, излучается внутрь устройства и достигает нижней поверхности кожуха, которая отдает тепло почве. После достижения температурного равновесия можно рассчитать нагрев черного кожуха солнечными лучами для различных географических широт. Расчеты показывают, что температура крышки и дна кожуха на широте 40° составляет 81 и 64 °С соответственно, а на широте 60° — 64 и 52 °С. Окрашиванием кожуха изделия в различные цвета удастся снизить его нагрев по сравнению с абсолютной черной поверхностью (на 10–15 °С).

Повреждения материалов под воздействием солнечных лучей можно разделить на фотолитические и фотоокислительные. Фотолитические процессы возникают на частоте облучения, когда энергии фотонов достаточно для разрыва межмолекулярных связей. Одновременное воздействие кислорода и влаги создает — посредством фотоокислительных процессов — дополнительное количество энергии. При ультрафиолетовом облучении поверхность металлов активизируется и подвергается опасности коррозии. Энергии ультрафиолетового облучения достаточно для того, чтобы расщепить сильные химические связи между углеродом и водородом. Вследствие этого, полиэтилен, этилцеллюлоза, лаки, краски становятся хрупкими, теряют прочность, что в конечном счете приводит к отказу изделия.

Атмосферное давление

Наземная техника должна сохранять надежность и заданные эксплуатационные характеристики при изменении атмосферного давления в пределах от 505 до 1080 гПа. Верхний предел соответствует давлению на уровне моря, нижний — давлению, рассчитанному для максимальной высоты (4,6 км), на которой возможны эксплуатация, хранение, перевозка техники. С увеличением высоты снижается электрическая прочность воздуха, вследствие чего приходится снижать допустимые значения пробивных напряжений электрической изоляции изделий. Коэффициент относительной электрической прочности воздушных промежутков (по отношению к электрической прочности на высоте 1 км) составляет 0,9 на высоте 2 км; 0,62 — на высоте 5 км, 0,35 — на высоте 10 км и 0,10 — на высоте 20 км.

Воздействие песка и пыли

Действие песка и пыли ухудшает внешний вид изделий. Частицы пыли и песка попадают в смазочные материалы и прилипают к слоям защиты поверхностей. В результате наблюдается заедание или увеличение «мертвого хода» в подшипниках

(принтера, драйверов CD ROM и др.), тонкий слой копоти поглощает газы, например сернисты, которые разрушающе действуют на изделия. Прочая спекшаяся пыль благоприятствует накоплению электропроводной влаги и снижает сопротивление изоляции. Осаждение пыли облегчает появление токов утечки у твердых изоляционных материалов. Характерное повреждение, вызываемое пылью, — это плохая работа контактов. Около 40% всех повреждений техники происходят из-за недостаточно хорошей работы контактов.

Воздействие биологических факторов

Наиболее опасным среди биологических факторов является воздействие плесневых грибов на изоляционные материалы на органической основе (гетинакс, прессшпан, текстолит, вулканизированная фибра и др.). Под действием плесневых грибов уменьшается механическая прочность материалов и изделий из них. Плесневые грибы часто появляются в приборах, хранящихся в запыленных помещениях. В поврежденных плесенью электронных приборах, имеющих печатные платы, возможны нарушения электрических соединений. Воздействие выделяемых плесенью органических кислот ускоряет коррозию контактов. Поражение плесенью часто начинается на хлопчатобумажной оплетке шнура кабельной разделки и затем распространяется на провода с лакошелковой изоляцией.

Воздействие ветра и гололеда

На техническое изделие, расположенное вне помещений, действуют ветер и обледенение. При обледенении увеличиваются размеры и масса изделий, что приводит к возрастанию аэродинамических и механических нагрузок. Оценка влияния гололедно-ветрового режима (ГВР), формируемого случайными метеорологическими факторами, проводится вероятностно-статистическими методами с использованием уравнения Гурвича. Исследования статистических зависимостей между толщиной пленки эквивалентного гололеда и максимальными скоростями ветра показывают, что они незначительны, а коэффициенты корреляции близки к нулю. Распределения же этих случайных величин хорошо описываются распределениями типа Вейбулла.

Для учета воздействия внешних воздействующих факторов при формировании требований к надежности техники и нормировании условий ее эксплуатации классифицируются макроклиматические районы, а также изделия — по климатическому исполнению и типу помещений, предназначенных для их эксплуатации.

Классификация климатических районов

Всего выделяют четыре макроклиматических района (МКР): с холодным (ХЛ), умеренным (У), жарким сухим (ЖС) и тропическим (Т) климатом. На территории России, стран СНГ и ближнего зарубежья в каждом из МКР выделяют климатические районы (КР). В холодном МКР выделяют очень холодный (ОХЛ) и холодный (ХЛ) районы. Представителем этого МКР является Якутск, а экстремальным пунктом — Оймякон. В умеренном и жарком МКР выделяют девять КР: умеренно холодный (УХЛ) (Тюмень, Улан-Удэ), умеренный (У) (Москва,

Мурманск), умеренно влажный (УВ) (Владивосток, Курильск), умеренно теплый (УТ) (Киев, Ростов-на-Дону), умеренно теплый влажный (УТВ) (Минск, Рига), умеренно теплый с влажной зимой (УТВЗ) (Одесса, Новороссийск), теплый влажный (Батуми, Астара), жаркий сухой (ЖС) (Ташкент), очень жаркий сухой (ОЖС) (Ашхабад, Термез). Кроме того, выделяют еще горный МКР (горы выше 2000 м). К нему относят некоторые районы Средней Азии (Киргизия, Таджикистан) и Кавказа. В некоторых схемах в умеренном МКР выделяют еще три КР: арктический приполюсный, арктический западный (Диксон), арктический восточный (Тикси) [1].

Классификация климатического исполнения изделий по типу помещений

Выделяют 5 категорий изделий для работы в помещениях разных типов: 1 — изделия, предназначенные для работы вне помещений, на открытом воздухе; 2 — изделия, предназначенные для работы в помещениях; 3 — изделия, предназначенные для работы в закрытых помещениях с естественной вентиляцией; 4 — изделия, предназначенные для работы в помещениях с искусственно регулируемы климатическими условиями; 5 — изделия, предназначенные для работы в помещениях с повышенной влажностью (например, в неветилируемых подземных помещениях).

Классификация климатического исполнения изделий по типу КР

Различают десять классов исполнения изделий по типу КР: У, ХЛ, УХЛ — для КР с умеренным, холодным и умеренно холодным климатом; Т, ТВ — для КР с тропическим и влажным тропическим климатом; О — для всех МКР; М — для морских судов, работающих в районах с умеренным и умеренно холодным климатом; ТМ — для морских судов, работающих в районах с тропическим климатом; В — для всех районов; ОМ — для неограниченного района плавания. Класс В, в отличие от класса О, включает также изделия категории 3.

2.2.2. Защита изделий от климатических воздействий

Защита изделий может проводиться в двух направлениях: выбор высококачественных комплектующих и применение специальных средств защиты. Соотношение между ними определяется массогабаритными характеристиками изделия, требованиями к надежности, стоимостными показателями и другими факторами. При выборе вида защиты используют материалы, обладающие высокой гигроскопичностью или склонные к концентрации влаги. Их поверхность должна быть по возможности герметичной. Этим требованиям в наибольшей степени удовлетворяют термопластичные материалы.

Большинство неисправностей и отказов технических изделий при эксплуатации возникает в контактах различных металлов и металлов с пластмассами. Поэтому

надежным методом защиты является применение допустимых и исключение недопустимых контактов. В [8] указаны допустимые и недопустимые контакты различных материалов и их сплавов в средних, жестких и очень жестких условиях эксплуатации.

От коррозии контакты защищают электрической изоляцией (электрическим разьединением) контактирующих металлов; электрохимическими методами (катодная и протекторная защита, анодные покрытия); исключением или уменьшением агрессивного воздействия коррозионной среды (введение ингибиторов, обессоливание, обескислороживание). Контакты располагают там, где условия эксплуатации менее агрессивны: отсутствуют воздействие электролита и периодическое смачивание.

Электрохимическая защита от контактной коррозии применяется в случаях, когда можно осуществить электрическое разьединение контактирующих металлов с помощью протекторов (магниевые сплавы, цинк, сталь, сплавы алюминия с цинком), которые присоединяются к контактной паре.

Защита изделий от воздействия влажностно-теплогового комплекса — одно из основных направлений обеспечения надежности при проектировании. Методы такой защиты разнообразны. Для достижения уровня, близкого к абсолютной защите, используют герметичные кожухи. Методы защиты металлических элементов направлены на исключение коррозии, а одним из простейших является полирование и шлифование поверхностей. Этого же добиваются блокированием химической реакции между металлом и окружающей средой; использованием анодного покрытия, электрохимический потенциал которого ниже, чем у металла основы (например, для стальных деталей используется трехслойное покрытие: медь—никель—хром); использованием лакокрасочных покрытий. Для покрытия радиодеталей широко применяются эпоксидные и кремнийорганические лаки и эмали. Они обладают высокими электроизоляционными свойствами, влагостойкостью и способностью работать при высоких температурах. В радиотехнической практике применяют еще ряд методов защиты от воздействия влаги: гидрофобную поверхность, пропитку изоляционными материалами, заливку смолой и компаундами, вакуумную герметизацию.

Одним из основных методов защиты изделий от воздействия плесневых грибов является химический метод — применение специальных ядов в качестве фунгисидов, то есть веществ, умертвляющих плесень, и фунгисидических веществ, приостанавливающих рост плесени. Неорганические фунгисиды имеют в основе соли меди, ртути, цинка, хрома. Органические фунгисиды — это составы на основе хлора, фенола, нитрофенола. Металлоорганические фунгисиды — соединения с медью, цинком, ртутью.

2.3. Ударно-вибрационные факторы

Вибрационные нагрузки подразделяются на неслучайные и случайные. Неслучайные нагрузки, в свою очередь, бывают периодическими и непериодическими, а случайные — стационарными или нестационарными.

2.3.1. Характеристика вибрационных факторов

Реальные вибрации представляют собой некоторые классические формы: гармоническую, квазигармоническую с непрерывным изменением частоты, в виде широкополосной или узкополосной случайной вибрации. Квазигармоническая вибрация с непрерывным изменением частоты существует в период разгона и торможения механизмов с вращающимися элементами. Широкополосная случайная вибрация представляет собой идеализацию случайной вибрации, действующей на изделия в реальных условиях эксплуатации. Узкополосная случайная вибрация возникает при колебаниях упругих систем под воздействием широкополосной вибрации.

Ударные нагрузки также подразделяют на неслучайные (периодические и непериодические) и случайные. Периодические ударные нагрузки удовлетворяют условию $x(t) = x(t + kT)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, T — период повторения.

По форме удара различают прямоугольную, синусоидальную, косинусоидальную, пилообразную, сложные ударные нагрузки. Название формы удара определяется зависимостью ускорения от времени

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0; & x_2(t) &= x_0 \sin(\pi t / \tau); \\ x_3(t) &= x_0(1 - \cos(2\pi t / \tau)); & x_4(t) &= x_0 t / \tau, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x_0 — пиковое значение ускорения; τ — длительность удара. Зависимость скорости и смещения от времени получают интегрированием (2.1) при начальных условиях $v(0) = 0$, $a(0) = 0$.

Характеристики ударно-вибрационных факторов определяют с учетом классификации изделий по условиям эксплуатации. По этому признаку все разнообразие технических изделий можно разделить на пять классов: наземная техника, морская (корабельная) техника, бортовая авиационная техника, ракетная техника, космическая техника. Уровни ударно-вибрационных нагрузок зависят от вида носителя изделия и места расположения последнего на носителе. Все объекты наземной техники в зависимости от условий эксплуатации можно разделить на стационарные, подвижные и носимые. Подвижные объекты могут быть на колесном или гусеничном ходу. Источниками вибраций изделий на подвижных носителях являются колебания конструкции машины, вибрации двигателя, неровности дорожных поверхностей. Виброускорения [мс^{-2}] могут изменяться в широких пределах: от 10–20 мс^{-2} при подрессоренных колебаниях при движении по дороге с ровным покрытием со скоростью 90–120 км/ч до 300–400 мс^{-2} при неподдресоренных колебаниях при движении по булыжному покрытию со скоростью 45–75 км/ч. Вибрации изделий характеризуются следующими данными: в объектах на колесном ходу — частота до 250 Гц, амплитуда смещения до 2,5 мм. Механические удары имеют следующие характеристики: удары многократного действия имеют пиковое ударное ускорение до 1500 мс^{-2} , длительность действия 2–5 мс, удары одиночного действия имеют пиковое ударное ускорение до 30 000 мс^{-2} , длительность действия до 5 мс. Изделия наземной техники, размещаемые в кузовах грузовых автомобилей или на тракторах гусеничного типа, имеют ускорение при ударах до 1000 мс^{-2} , размещаемые на танках — до 1500 мс^{-2} .

При проектировании изделий, размещаемых на подвижных наземных объектах, используют классификацию Международной электротехнической комиссии (МЭК) по механическим условиям эксплуатации (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Классификация групп механических условий эксплуатации техники и их уровней

Внешний воздействующий фактор	Класс		
	5М1	5М2	5М3
Синусоидальная вибрация:	1,5	3,3	7,5
— амплитуда перемещения, мм	5	10; 15	20; 40
— амплитуда ускорения, мс^{-2}	2–9;	2–9;	2–8;
— диапазон частот, Гц	9–200	9–200; 200–500	8–200; 200–500
Стационарная случайная вибрация:	0,3; 0,1	1; 0,3	3; 1
— плотность ускорения, мс^{-2}	10–200;	10–200;	10–200;
— диапазон частот, Гц	200–500	200–500	200–500
Нестационарная случайная вибрация, включая удар:			
— ударный спектр отклика типа 1, пиковое ускорение, мс^{-2}	50	100	300
— ударный спектр отклика типа 2, пиковое ускорение, мс^{-2}	—	300	100

Класс 5М1 включает условия, воздействующие на компоненты подвижных объектов, используемых внутри помещений с ровными полами. Класс 5М2, дополнительно к условиям класса 5М1, включает условия, воздействующие на изделия, установленные на любых дорожных транспортных средствах, исключая гусеничные и другие легкие транспортные средства. Подвижные объекты используют в районах с хорошо развитой дорожной сетью. Класс 5М3 кроме условий класса 5М2 включает условия, воздействующие на изделия, установленные на подвижные объекты, используемые в районах с плохо развитой дорожной сетью, на легкие транспортные средства, гусеничный транспорт и самоходные механизмы.

Изделия морской техники на кораблях малого водоизмещения подвергаются вибрациям частотой до 2000 Гц амплитудой 1–2,5 мм и ускорением при ударах до 500 мс^{-2} . На кораблях большого водоизмещения возникают вибрации до 60 Гц амплитудой 0,5–2,5 мм и ускорением при ударах до 1500 мс^{-2} .

Изделия авиационной техники подвергаются вибрациям частотой до 200 Гц и амплитудой до 1 мм на самолетах с поршневым двигателем, до 500 Гц и 0,5 мм — на турбовинтовых самолетах, до 2000 Гц и 0,025 мм — на реактивных самолетах. Ударные ускорения (до 500 мс^{-2}) примерно одинаковы для всех типов самолетов. При взлетах и посадках самолета изделия испытывают большие перегрузки. Так, вибрации на реактивных самолетах создаются звуковыми колебаниями, вызываемыми реактивной струей и турбулентностью горения, и имеют следующие характеристики: частота 500–10 000 Гц, амплитуда на частотах 500 Гц до 0,025 мм.

Основными источниками вибраций изделий ракетной техники являются работа ракетного двигателя и системы управления, аэродинамические эффекты. Ракетные двигатели, работающие на жидком топливе, создают вибрации с частотой несколько сотен герц и ускорением до 500 мс^{-2} . Более мощные двигатели создают гармонические колебания с частотами до 500 Гц, а менее мощные — с частотами до 2000 Гц. Более сильным вибрациям подвергаются изделия, расположенные в зоне двигателя. В момент старта и разделения ступеней ударные нагрузки достигают 5000 мс^{-2} .

2.3.2. Последствия воздействий механических нагрузок

Различают два механизма влияния механических нагрузок на надежность изделий. Механизм первого типа характеризуется отсутствием накопления нарушений. В каждый момент времени определенный параметр является функцией текущего состояния изделия и не зависит от предыстории его функционирования. Основным признаком механизма второго типа является существование эффекта накопления нарушений, например, накопление усталостных повреждений в конструкции изделия.

При оценке последствий воздействия механических нагрузок первого типа используются методы безынерционного функционального преобразования случайных процессов. Условием работоспособного состояния изделия является выполнение неравенства

$$\psi(x_1, \dots, x_{k-1}, t) = R(x_1, \dots, x_l, t) - W(x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t) > 0, \quad (2.2)$$

где $R(x_1, \dots, x_l, t)$ — случайная функция несущей способности изделия; $W(x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, t)$ — случайная функция нагрузки. С помощью методов строительной механики, теории пластичности и теории упругости определяют недопустимые предельные состояния и вид функций R и W . Далее находят многомерное распределение $f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, t)$ случайных параметров, входящих в (2.2), а также вероятность безотказной работы как вероятность выполнения неравенства (2.2) путем рандомизации функции ψ по плотности f_k .

При оценке последствий механических нагрузок второго типа вероятность отказа изделия находят как вероятность усталостного разрушения, вызванного периодически меняющимися нагрузками с известными параметрами, или как сложная зависимость напряжения в материалах от времени. При этом активно используют результаты усталостных испытаний материалов.

2.3.3. Защита изделий от воздействия механических нагрузок

Для защиты изделий от воздействия механических нагрузок широко применяют специальные виброизолирующие устройства — виброизоляторы, устанавливаемые между изделием и вибрирующей опорой. По характеру защиты от приложенных внешних нагрузок различают активную и пассивную изоляции. Если

изделие само является источником колебаний, от которых нужно изолировать опорное основание, то речь идет об активной изоляции. Если необходимо защитить изделие от вибрирующего опорного основания, — то о пассивной изоляции. Средства изоляции в обоих случаях одни и те же, но требования к виброизоляторам различны в зависимости от характера приложенных внешних нагрузок и рода возбуждаемых колебаний.

Различают виброзащиту при эксплуатации и при транспортировании. При транспортировании изделие может подвергаться воздействию динамических нагрузок. В этом случае к виброизоляторам предъявляется требование обеспечить защиту изделий от случайных толчков и ударов большой амплитуды. Такие виброизоляторы должны обладать значительным демпфированием. Ослабление воздействия ударных нагрузок в виде неустановившихся импульсов, при которых развиваются ускорения до десятков тысяч миллисекунд в минус второй степени, достигается с помощью специальных виброизоляторов. При разработке или выборе виброизолятора принимают во внимание то, что чем больше деформация виброизолятора (чем мягче виброизолятор), тем меньшие ударные ускорения получит изделие.

Эффективность виброизоляции зависит от коэффициента демпфирования и отношения γ возбуждающей и собственных частот колебаний. Конструкция изделия должна быть такой, чтобы $\gamma > 2^{0.5}$. Если это условие не выполняется, то удары (для перевозимых на автомобиле изделий: от неровностей дороги, от колебания шин) будут передаваться на изделие практически без ослабления.

2.4. Профилактическое обслуживание

Профилактическое обслуживание аппаратуры представляет собой комплекс мероприятий, направленных на предупреждение ее отказов и продление сроков службы [2]. При организации профилактических работ возникают противоречивые требования. С одной стороны, увеличение частоты и длительности профилактических работ может увеличить показатели безотказности в периоде между соседними сеансами профилактики. С другой стороны, при этом возрастает суммарное время простоя, что может быть экономически невыгодно. Поэтому возникают две центральные задачи: определение сроков проведения и содержания профилактических работ. Разнообразие ответов при решении этих задач можно представить в виде классификационной схемы.

2.4.1. Классификация методов профилактики

При определении сроков проведения профилактики должны быть выбраны принцип назначения сроков и режим (стратегия) проведения профилактики. Различают три принципа назначения сроков: регламентный, календарный и комбинированный. При регламентном принципе профилактику проводят по достижении определенной наработки. Наработка может измеряться в единицах времени,

в километраже, количестве посадок самолета, количестве включений — выключений и пр. Регламентный принцип используют для изделий, работающих длительное время без перерывов либо в тяжелых условиях — циклически.

Календарный принцип применяют, когда изделие находится в режиме хранения либо в режиме многократного циклического применения, то есть когда интенсивность износа практически не зависит от наработки, а только от «возраста» изделия. В тех случаях, когда износ происходит как при работе, так и при хранении, применяют комбинированный принцип назначения профилактики. Если изделие находится в работе, тогда профилактику проводят по достижении определенной наработки. Если же оно длительное время находится в режиме хранения, то профилактику проводят в запланированные календарные сроки.

Режимы профилактики могут быть трех типов: плановый, неплановый, смешанный. При плановом режиме профилактику проводят через установленное время в соответствии с принципом назначения сроков независимо от числа возникших отказов. Такой режим часто используют в авиационной технике. Неплановую профилактику проводят, когда этого требует техническое состояние техники, в частности, после отказов. При этом помимо ремонта (восстановления работоспособности) выполняются определенные профилактические работы. При смешанном режиме сочетают плановую и неплановые профилактики. Срок очередной плановой профилактики отсчитывают от момента окончания предыдущей, если в период между профилактиками не возник отказ, или от момента окончания неплановой профилактики.

Профилактическое обслуживание, проводимое в плановом или смешанном режиме, может быть организовано циклически или непрерывно. Циклическое обслуживание применяется для изделий, работу которых нельзя остановить для выполнения профилактики. После наработки, равной межпрофилактическому сроку, изделие исключается из использования и поступает на профилактику. Непрерывное обслуживание применяют тогда, когда выполнение профилактических работ возможно без прекращения работы изделия.

Содержание профилактических работ зависит от многих факторов, в том числе от типа и физической природы отказов, от возможностей системы диагностирования, от наличия структурного резервирования и диагностируемых неисправностей, не приводящих к отказам, от наличия достаточных статистических данных, позволяющих установить возрастание со временем интенсивности отказов вследствие старения и износа изделия. В связи с этим можно выделить четыре различные ситуации.

При наличии постепенных (параметрических) отказов контроль значений определяющего параметра и сравнение его текущего значения с критическим значением позволяют уверенно установить потребность в профилактических работах с целью регулировки определяющего параметра или замены какого-либо элемента. Например, постепенное разрушение катода некоторых типов электровакуумных приборов (ЭВП) можно контролировать по изменению шумового сопротивления — и при необходимости заменить ЭВП на новый. Однако по значению определяющего параметра не всегда удастся точно установить причину его ухудшения. Иногда требуется проводить довольно сложные диагностические процедуры,

чтобы установить, какие элементы вызвали изменение значения параметра. Например, снижение коэффициента усиления в полупроводниковом усилителе может иметь комплексную причину, для установления и устранения которой надо провести определенные профилактические работы.

Вторая ситуация состоит в том, что появлению некоторых внезапных отказов предшествует возникновение неисправностей, определенный процент которых может быть выявлен с некоторой вероятностью в процессе профилактики. Устранение обнаруженных неисправностей и причин их появления предупреждает появление возможных отказов.

Третьим видом, а также целью профилактики являются профилактические замены. В этом случае исходные режимы работы и неисправности изделия неизвестны. После определенной наработки в результате его старения и износа интенсивность отказов существенно возрастает. Поэтому проводят профилактическую замену еще работоспособных изделий, то есть замену по выработке ресурса, или плано-предупредительный ремонт (ППР).

Четвертая ситуация возникает в структурно резервированных системах, когда после отказа некоторых элементов работоспособность резервированной системы еще сохраняется, но уменьшается кратность резервирования, что может существенно снизить вероятность безотказной работы в будущем. Профилактика заключается в обнаружении отказавших элементов и восстановлении первоначальной структуры. Например, при поэлементном мажорировании по схеме «два из трех» работоспособность системы может сохраняться даже после отказа трети элементов (см. главу 5). При неплановой профилактике после отказа системы обновляются только отказавшие резервированные группы, а при плановой профилактике — все резервированные группы. При смешанном режиме обновляются все группы и при плановой, и при неплановой профилактике.

2.4.2. Виды профилактических работ

Профилактическое обслуживание большинства типов аппаратуры АСОИУ может производиться в три этапа, на каждом из которых выполняют определенные виды работ.

Этап 1. Профилактика обесточенной аппаратуры. На этом этапе проводят осмотр состояния паяк, монтажа, соединений, чистку элементов и узлов аппаратуры, замену влагопоглотителей и смазок в движущихся частях, проверку качества изоляции монтажа, кабелей, проверку утечки зарядов в электролитических конденсаторах, правильности срабатывания контакторов и реле с помощью простейшей контрольно-измерительной аппаратуры.

Этап 2. Испытания узлов и блоков аппаратуры под током. На этом этапе проводят установку режимов работы аппаратуры, регулировку и подстройку отдельных элементов и устройств, проверку работоспособности элементов и блоков в нормальных и специальных режимах, поиск и устранение неисправностей, профилактические замены элементов.

Этап 3. Подготовка аппаратуры к работе. На этом этапе проводят контроль работоспособности аппаратуры в нормальных и специальных режимах, комплексную отладку и проверку основных параметров изделия в целом.

На каждом этапе обслуживания проводятся операции по выявлению неисправных элементов и их профилактической замене или восстановлению. На первом этапе такими операциями могут быть замена обгоревших резисторов, износившихся разъемов и кабелей, щеток электродвигателей, чистка контактов реле и пр. На втором этапе поиск и замена (восстановление) неисправных элементов осуществляются тогда, когда не удастся установить исходные режимы работы, номинальные значения допусков изменения параметров или пределы срабатывания элементов и узлов аппаратуры с помощью органов регулировки. На третьем этапе также могут проводиться поиск и устранение неисправностей. При этом некоторые работы, проведенные ранее, например настройка узлов, могут повторяться.

2.4.3. Характеристики и оптимизация профилактического обслуживания

Профилактические мероприятия приводят к противоречивым последствиям. С одной стороны, они позволяют повысить показатели надежности работы аппаратуры. С другой стороны, из-за затрат времени на проведение профилактики снижается эффективность использования изделия, требуются определенный состав специалистов, контрольно-измерительная аппаратура, инструменты, запасные части и пр. Определенным выбором характеристик профилактических работ удается сбалансировать эти последствия. Однако этих характеристик довольно много: сроки проведения профилактик, начальные значения параметров, глубина контроля, потребное число обслуживающего персонала, продолжительность проведения профилактик, стоимость профилактического обслуживания и др. Профилактика, обеспечивающая наилучшее значение одной характеристики, может оказаться неприемлемой по другой характеристике. Наиболее известной является задача оптимизации периода (срока) профилактики при ограничениях на другие характеристики. В качестве критериальной функции (функции оптимизации) используют эффективность профилактики $\mathcal{E}_п$ как отношение средних значений наработки до отказа изделия после профилактики и до профилактики; коэффициент эффективности профилактики $K_{эф}$ как отношение среднего числа выявленных неисправностей к среднему числу всех неисправностей; один из показателей надежности (коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности и пр.); экономический показатель (средняя удельная прибыль, средние удельные потери).

2.5. Тренировки, отработочные и предпусковые испытания

Тренировки (тренировочные испытания) предназначены для выявления недостатков разработки и дефектов производства изделия [3]. По способу выявления недостатков в конструкции и технологии их можно охарактеризовать как проводящие испытания. Сложность организации таких испытаний состоит в рациональном выборе интенсивности воздействий: при слишком высокой интенсивности

воздействий отказы возникают по причинам, которые не наблюдаются в условиях нормальной эксплуатации, при низкой интенсивности не все причины удастся выявить за время испытаний. При наличии дефектов производства или внеплановых деградиационных процессов тренировочные испытания позволяют определять или «выжигать» слабые элементы и за счет эффекта приработки снижать (иногда весьма существенно — в десятки раз) интенсивность отказов в процессе эксплуатации. Эффективность предупреждения отказов возрастает, если предвестники отказов удастся выявить с помощью методов неразрушающего контроля, пригодных для использования при контроле качества и анализе причин отказов. Примером таких методов являются методы, основанные на идентификации отказов элементов радиоэлектронной аппаратуры по их амплитудно-частотным характеристикам и результатам исследования термодинамического гистерезиса при тепловых нагрузках. К тренировочным испытаниям сложных изделий могут быть приравнены утяжеленные (форсированные) испытания, испытания на работоспособность при неблагоприятных сочетаниях внешних и внутренних действующих факторов.

К *исследовательским (отработочным)* испытаниям относят все испытания, проводимые в соответствии с конструкторской документацией в процессе экспериментальной отработки опытного образца изделия. Эти испытания по конечным целям подразделяются на автономные и комплексные. Целями автономных испытаний являются выявление и устранение ненадежных изделий и недопустимых режимов работы электрорадиоизделий (ЭРИ) и комплектующих элементов, определение границ (запасов) работоспособности, оценка соответствия опытных образцов требованиям технического задания (ТЗ).

Комплексные испытания проводят при экспериментальной отработке совместного функционирования нескольких или всех подсистем сложной АСОИУ на соответствие требованиям ТЗ. Разделение испытаний на автономные и комплексные может проводиться по количеству выполняемых функционально самостоятельных операций (ФСО) в многофункциональной системе. Если отрабатывается выполнение одной ФСО, то испытания относят к автономным. Если же отрабатывается выполнение нескольких или всех ФСО, то испытания относят к комплексным. Окончательное решение об отнесении испытаний к тому или иному типу принимает конструктор (руководитель проекта) при формировании программы экспериментальной отработки опытного образца.

Целями комплексных испытаний являются проверка взаимного функционирования составных частей изделия, отработанных при автономных испытаниях, в близких к реальным условиям с одновременной имитацией различных воздействующих факторов; устранение конструкторских и производственных дефектов на стыках сопрягаемых (смежных) систем, агрегатов, приборов; проверка работоспособности изделий при имитации аварийных и других экстремальных ситуаций, способных повлиять на безопасность управляемого объекта, которые технически можно осуществить на стендах без нарушения требований к безопасности эксперимента.

Предпусковые испытания относят к классу функциональных и проводят перед сдачей изделия в эксплуатацию, после каждого внесения изменений в конст-

рукторскую документацию и состав изделия, после восстановления работоспособности, выполнения профилактических работ. Функционирование системы считается нормальным, если она выполняет все предусмотренные ФСО, если стыковка элементов проведена правильно и значения параметров взаимодействующих элементов согласованы, а обмен информацией между ними происходит без каких-либо видимых нарушений, которые могут привести к отказам элементов в аппаратуре или в цепи взаимодействия устройств.

Кроме задачи качественной оценки системы, перед пусковыми испытаниями может ставиться задача количественной оценки показателя ее эффективности (например, производительности, пропускной способности), а также характеристик элементов и системы в целом, влияющих на его значение. Выявление и устранение обнаруженных неисправностей, регулировка режимов работы, устранение дефектов в режимах взаимодействия подсистем и агрегатов способствуют предотвращению отказов и повышению надежности работы испытываемой системы.

2.6. Контроль качества и входной контроль надежности

Согласно [5], *качество продукции* — это совокупность свойств продукции, обуславливающих ее пригодность удовлетворять определенным потребностям в соответствии с ее назначением. Качество характеризуется отсутствием или наличием дефектов. Продукция, не имеющая дефектов, называется годной. Изделие, имеющее хотя бы один дефект, называют дефектным.

Соотношение понятий «надежность» и «качество» довольно сложное. С одной стороны, надежность — это свойство, хотя и комплексное, а качество — это совокупность свойств. Поэтому надежность входит в качество как составляющая последнего, так как свойство выполнять заданные функции тождественно свойству удовлетворять определенным потребностям в соответствии с назначением. С другой стороны, в определение понятия «качество» не включено время, тогда как в определении понятия «надежность» есть дополнение «сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров». В этом смысле понятие «надежность» шире понятия «качество».

Отсюда следует, что под качеством понимается начальное состояние пригодности продукции, а под надежностью — устойчивость основных свойств качества во времени. Очевидно, что высокие показатели начального качества не обязательно означают, что продукция гарантированно сохранит это качество в течение заданной наработки, то есть будет обладать высокой надежностью. Верно также и то, что надежность зависит от начального качества продукции. Недостаточно убедиться, что изделие работоспособно в начальный момент времени. При наличии в работоспособном изделии явных или скрытых неисправностей (дефектов), которые могут развиваться в отказы, показатели его надежности меньше, чем у изделия, в котором они выявлены и устранены. Поэтому большую роль в обеспечении надежности играет контроль качества продукции.

Контроль качества состоит в контроле количественных и/или качественных характеристик свойств продукции. Основным видом контроля является выходной контроль готовой продукции у изготовителя (производителя), по результатам которого принимается решение о ее пригодности к использованию. При повышенных требованиях к надежности потребитель может проводить входной контроль качества именно той партии, которая поступила от поставщика к потребителю для использования при изготовлении, ремонте или эксплуатации изделия. В зависимости от требований к полноте контроль может быть выборочным или сплошным. При необходимости контроль качества продукции может дополняться контролем производственного процесса и контролем технологического процесса (ТП), который включает контроль режимов, характеристик и параметров ТП.

Входной контроль качества может совмещаться со входным контролем надежности. Поскольку входной контроль надежности, как правило, существенно ограничен во времени, при его организации могут применяться методы форсированных и ускоренных испытаний, а также прогнозирование надежности, основанное на использовании методов неразрушающего контроля.

2.7. Уровень автоматизации проектирования

Автоматизация проектирования является важным фактором, влияющим на уровень надежности сложных технических систем, так как позволяет решить следующие задачи: существенно снизить количество проектных ошибок, повысить качество конструкторской и технологической документации, создать условия для многовариантного проектирования и выбора лучшего варианта, сократить сроки проектирования, освободив тем самым определенное время на отработку технических решений, согласование параметров, проведение испытаний.

Особенно большое значение для повышения качества и надежности технических систем имеет использование при разработке программного обеспечения (ПО) систем автоматизированного проектирования (САПР), так как это позволяет использовать высокие технологии программирования, развитые системы тестирования и проводить автономные и комплексные испытания ПО с помощью инструментальных средств еще до развертывания технических систем, в которых в дальнейшем программные комплексы будут функционировать.

По уровню автоматизации в настоящее время различают три класса САПР [6]: системы низко автоматизированного (до 25%), средне автоматизированного (от 25 до 50%), высоко автоматизированного (свыше 50%) проектирования.

Составной частью в САПР может входить система автоматизированного надежного проектирования (САПР-Н). В САПР-Н наибольшее применение находят автоматизированные системы расчетов надежности (АСРН), использующие базу данных о надежности элементов. В частности, для расчета надежности ЭРИ используют АСРН, разработанную РНИИ «Электронстандарт».

2.8. Факторы, влияющие на надежность ПО

Программное обеспечение АСОИУ включает в себя функциональные программные комплексы (ФПК), которые можно отнести к классу программных комплексов с большой длительностью эксплуатации [7]. Размеры ФПК могут изменяться в широких пределах (от нескольких тысяч до нескольких миллионов команд). Они допускают модификацию, тиражирование, могут оформляться документацией как промышленные изделия и представляют собой отчуждаемый программный продукт. Жизненный цикл ФПК, включая модификации, достигает 10–20 лет и состоит из четырех основных этапов: системного анализа и предпроектной подготовки, проектирования (разработки), эксплуатации и сопровождения. На последние два этапа приходится до 70–90% жизненного цикла.

В ходе системного анализа и предпроектной подготовки определяются назначение и основные функциональные характеристики ФПК, оценивается возможная эффективность применения, устанавливаются требования к надежности и формируется техническое задание на разработку.

Основными факторами, определяющими появление ошибок при выработке требований к ПО и влияющими на надежность ФПК, являются:

1. масштабность и сложность заданий на систему автоматизированной обработки и управления из-за многообразия целей и критериев управления, влияние цепей обратной связи в контуре управления на динамические характеристики, сложность временных зависимостей, большие объемы обрабатываемой и передаваемой информации, многофункциональность и разнообразие режимов работы;
2. невозможность уверенного предсказания степени точности вычислений, времени реакции на изменение извне, степени влияния окружающей (прежде всего информационной) среды на результат функционирования ФПК;
3. сложность общения специалистов разных профессий, участвующих в выработке общих требований и их интерпретации в специальных требованиях к математическому (МО), информационному (ИО) и программному (ПО) обеспечению.

Многолетний опыт различных высококвалифицированных коллективов разработчиков ПО для АСОИУ показывает, что допущенные на этом этапе ошибки любого вида существенно снижают надежность ФПК. Ошибки в выработке требований к ПО и выборе его структуры являются основными ошибками, обладающими большой устойчивостью на всех этапах жизненного цикла и свойством в значительной степени разрушать структуру ПО при попытке их устранения. На этапе проектирования (разработки) ПО можно выделить следующие укрупненные подэтапы:

1. Разработка и отладка алгоритмов.
2. Реализация решений на языке программирования.
3. Отладка элементов ПО и ФПК в целом.
4. Документирование.

Основными факторами, определяющими корректность программ, а следовательно, уровень проектной надежности ПО, являются:

1. технология разработки, в том числе технология программирования. При возможности выбора вариантов технологии предпочтение следует отдавать вариантам, предусматривающим выполнение различных модельных экспериментов для отработки МО еще на стадии разработки алгоритмов. Большое влияние на корректность программ имеют фактор методического обеспечения технологии проектирования и степень его освоения и фактического применения коллективом программистов в процессе разработки. При разработке алгоритмов и математического обеспечения АСОИУ важно иметь модели объекта управления (ОУ). Это позволяет проводить активные эксперименты для отработки МО еще до появления реальных алгоритмов управления;
2. структурная упорядоченность программ и данных, структурированность ПО и иерархичность в структурной схеме, стандартизация структуры единиц ПО (модулей) и переменных, способствующие снижению количества ошибок при разработке ПО. Объем каждой единицы ПО, подлежащей автономной разработке, должен удовлетворять требованиям правильной организации проектирования сложных ФПК, в частности, с позиций психологии программирования;
3. уровень автоматизации проектирования и испытаний. Совершенные системы автоматизации проектирования ФПК включают в себя совокупность языков программирования, трансляторов, средств контроля и верификации программ, развитые средства планирования и ведения отладки, в том числе языки отладки, программные средства документирования, технические и программные инструментальные средства: операционная среда, языки программирования, программные средства моделирования динамики процессов в объекте управления, задатчики сигналов и другие имитаторы внешней среды, высокопроизводительные вычислительные сети. САПР ПО является не только средством ускорения процесса проектирования, но и средством обеспечения более высокой безошибочности программ, так как использует языки программирования более высокого уровня, чем для непосредственного программирования с использованием проблемно-ориентированных языков. САПР ПО также облегчает отладку и модификацию программ при обнаружении ошибок;
4. выбор способов и критериев отладки. Многоэтапность и структурированность целей отладки способствуют повышению ее эффективности и уменьшают остаточное количество в ПО проектных ошибок. Важными факторами являются также наличие программ отладки на каждом этапе, выбор и четкое формулирование критериев завершения этапов отладки, документирование процесса и результатов отладки, соблюдение технологии модификации программ для устранения проектных ошибок;
5. создание инструментальной среды, максимально близкой к реальной. Этот фактор играет значительную роль на всех этапах отладки, так как позволяет в условиях активного эксперимента обнаруживать некоторые виды ошибок, которые иначе будут проявляться только при эксплуатации и, возможно, вызывать серьезные последствия;

6. организационно-человеческие факторы. К этой группе факторов относятся количество и квалификация специалистов, структура коллектива разработчиков и организационное взаимодействие в нем. Факторы этой группы сложны для количественной оценки, поэтому здесь часто применяют квалиметрические методы и экспертные оценки по определенной шкале. Оценивают технические возможности (уровень знаний, способности), уровень инициативности, степень ответственности программистов, параметры работы и ее результатов, степень комфортности условий работы с учетом рекомендаций психологии программирования. Кроме того, должны учитываться организация взаимодействия программистов в коллективе при выполнении общего задания, степень параллелизма разработки, роль руководителя проекта и руководителей других уровней в оперативном планировании и оценке результатов работы; перераспределении заданий; оценке завершенности технологических стадий разработки.

На этапе эксплуатации ПО определяющими факторами надежности являются полнота и точность спецификаций; степень помехозащищенности программ; обнаружение, диагностирование и документирование отклонений в алгоритмах функционирования, характерных для реальных условий; безопасное реагирование ФПК на отклонение в алгоритмах (несрабатывание, неправильное срабатывание); полное документирование каждого изменения в программах, вызванного обнаруженными проектными ошибками. Прямым следствием факторов, вносимых на этапе проектирования и влияющих на надежность ПО, являются уровень языков программирования, степень отлаженности программ, полнота тестирования. Степень влияния этих факторов зависит от качества проектирования и длительности отладки.

В процессе сопровождения программ устраняют обнаруженные проектные ошибки, а также ошибки, внесенные при устранении первых, программы тиражируют и адаптируют к конфигурации технических средств и новых версий системного ПО, расширяют функции ФПК. Главными факторами, влияющими на надежность ФПК на этом этапе, являются приспособленность ФПК к модернизации в связи с расширением функций; адаптивность к изменению конфигурации и других характеристик аппаратного комплекса; трудоемкость модификации программ; эффективность контроля проведенных модернизаций, модификаций, состояний версий, их тиражирования и эксплуатации.

Список литературы

1. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 10. Справочные данные по условиям эксплуатации и характеристикам надежности / Под ред. В. А. Кузнецова. — М.: Машиностроение, 1990. — 330 с.
2. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 8. Эксплуатация и ремонт / Под ред. В. И. Кузнецова и Е. Ю. Барзиловича. — М.: Машиностроение, 1990. — 320 с.
3. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 6. Экспериментальная отработка и испытания / Под ред. Р. С. Судакова и О. И. Тескина. — М.: Машиностроение, 1989. — 376 с.

4. *Бердичевский Б. Е.* Неразрушающий контроль элементов и узлов радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1976. — 290 с.
5. ГОСТ 15467–79. Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения. — М.: Изд-во стандартов, 1979. — 26 с.
6. ГОСТ 23.501.108–85. Системы автоматизированного проектирования. Классификация и обозначения. — М.: Изд-во стандартов, 1985. — 14 с.
7. *Луцаев В. В.* Качество программного обеспечения. — М.: Финансы и статистика, 1993. — 262 с.
8. ГОСТ 9.005–72. Металлы, сплавы, металлические и неметаллические неорганические покрытия. Допустимые и недопустимые контакты с металлами и неметаллами. — М.: Изд-во стандартов, 1972. — 38 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислить основные факторы, влияющие на надежность аппаратуры.
2. Каковы особенности действия климатических факторов? Дайте классификацию изделий по климатическому исполнению.
3. В чем состоят особенности действия ударно-вибрационных факторов? Дайте классификацию изделий по механическим условиям эксплуатации.
4. Каковы механизмы влияния профилактики на надежность изделий? Дайте классификацию методов профилактики, видов профилактических работ.
5. Каковы назначение и способы контроля качества и надежности изделий?
6. Перечислите основные факторы, влияющие на надежность программного обеспечения.

Глава 3

Надежность элемента

3.1. Модели надежности невосстанавливаемого элемента с учетом условий эксплуатации

Исходной информацией об элементе при создании модели надежности являются: тип элемента с указанием марки, государственного стандарта (ГОСТ), полного номера технических условий (ТУ) и названия завода-изготовителя или фирмы-поставщика; количественные характеристики условий эксплуатации и других факторов, влияющих на показатели надежности элемента; режимы применения и их характеристики, тип учитываемых отказов (обрыв или короткое замыкание); категория помещений, где будет эксплуатироваться АПК, по климатическому исполнению; климатическое исполнение аппаратуры по типу климатического района; характеристики системы диагностирования и контроля работоспособности. Для электрорадиоизделий желательно также указывать класс и группу ЭРИ в соответствии с принятой классификацией. В некоторых случаях могут потребоваться дополнительные сведения из технической документации, например: значения коэффициента нагрузки, определяемые по картам режимов, тип сигнала для диодной матрицы, частота коммутаций для реле и пр.

3.1.1. Понятие о математической модели надежности

При выполнении расчетов надежности оперируют не с самим техническим изделием, а с некоторым математическим объектом, который отражает наиболее существенные свойства реального изделия и называется математической моделью надежности [1]. Поскольку отказы — это случайные события, возникающие вследствие неблагоприятного развития случайных явлений, математическая модель надежности изделия должна быть стохастической, отражающей с достаточной точностью закономерности появления отказов в реальном изделии.

Наиболее простой является модель невосстанавливаемого элемента (в широком смысле), так как она сводится к модели безотказности [2]. Основная задача при ее построении — формирование признаков отказа, выбор и обоснование подходящей функции распределения наработки до отказа и определение численного значения ее параметров по статистическим данным, полученным при испытаниях надежности или в процессе наблюдений при эксплуатации. Поскольку совокупность подлежащих оценке показателей надежности элемента зависит от модели надежности системы, в которую входит элемент, и от типа нормируемого показателя надежности, в некоторых случаях не требуется знания функции распределения, а достаточно знать некоторые числовые характеристики, например среднюю наработку до отказа, вероятность отказа за заданное время и пр.

При формировании модели надежности восстанавливаемого элемента дополнительно нужно строить также модель восстанавливаемости, в которой должны быть формализованы процессы обнаружения, локализации отказов, наладки и предпусковой подготовки. При формализации процесса функционирования должны быть установлены распределение времени восстановления работоспособности и механизм влияния предыстории элемента (количество отказов и восстановлений, тип отказов, объем и содержание профилактических работ, состояние запасного имущества) на распределение наработки и распределение времени восстановления.

3.1.2. Модели безотказности элемента

Статистические данные об отказах элементов радиоэлектронной аппаратуры показывают, что типичная зависимость интенсивности отказов от времени имеет U-образный вид (рис. 3.1, а). Жизненный цикл элемента имеет три характерных участка. На первом из них, называемом периодом приработки, интенсивность отказов со временем убывает. Второй участок (нормальной эксплуатации) характеризуется постоянным значением интенсивности отказов. На третьем участке (старения) интенсивность отказов быстро возрастает. Такой вид зависимости и наличие трех участков можно объяснить следующим образом [3].

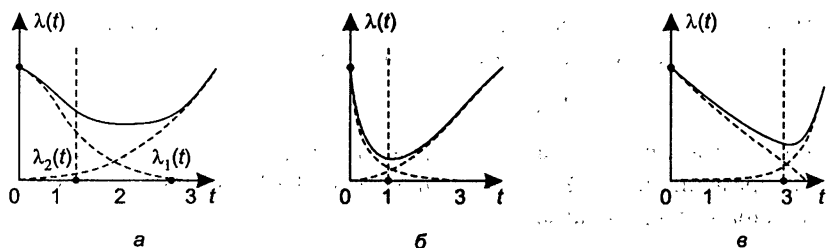


Рис. 3.1. Зависимость интенсивности отказов от времени на участках:
а — приработки; б — нормальной эксплуатации; в — старения

В большой партии всегда имеется некоторое количество изделий со скрытыми дефектами, не обнаруженными выходным контролем производства. Эти дефекты развиваются в отказ обычно вскоре после начала эксплуатации. По мере

«выжигания» дефектных изделий интенсивность отказов уменьшается согласно зависимости $\lambda_1(t)$. Этот процесс продолжается и на участке нормальной работы, но число отказов изделий со скрытыми дефектами здесь сравнительно невелико. На третьем участке отказы с интенсивностью $\lambda_2(t)$ возникают преимущественно вследствие необратимых физико-химических процессов, приводящих к ухудшению качества изделий и называемых процессами старения. На втором участке действуют обе причины отказов: скрытые дефекты и старение, однако поскольку нет преобладания ни одной из причин, суммарная интенсивность отказов остается примерно постоянной.

У некоторых изделий зависимость интенсивности отказов от времени отличается от типичной. При отработанной и стабильной технологии производства и тщательном выходном контроле количество дефектных изделий мало, и тогда преобладает процесс старения (рис. 3.1, б). Другие же изделия в течение длительного времени практически не стареют, и тогда функция $\lambda(t)$ имеет затяжной участок приработки и короткий участок старения (рис. 3.1, в). В обоих случаях участок нормальной эксплуатации с постоянной интенсивностью отказов практически отсутствует.

Для аппроксимации реальных распределений наработки до отказа на участках приработки, нормальной эксплуатации и старения используют стандартные распределения случайных величин, рассматриваемых в теории вероятностей. Рассмотрим математические выражения для некоторых используемых в теории надежности распределений и физические предпосылки, объясняющие механизмы их возникновения. Для каждого распределения рассматриваются четыре основные характеристики: функция распределения $F(t)$, плотность распределения $f(t)$, математическое ожидание (средняя наработка до отказа) $\bar{T}_0$ и дисперсия DT_0 [4], [7].

Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение имеет следующие характеристики:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad \bar{T}_0 = MT_0 = \frac{1}{\lambda}; \quad DT_0 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda \geq 0.$$

Экспоненциальное распределение однопараметрическое и обладает одним уникальным свойством, которое можно продемонстрировать с помощью расчетных формул (1.9) и (1.13). Согласно (1.9), вероятность

$$P(\tau, t) = e^{-\lambda(\tau+t)} / e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda t} \quad (3.1)$$

не зависит от того, сколько времени изделие проработало до рассматриваемого интервала времени $(\tau, \tau + t)$. Согласно формуле (1.13), средняя остаточная (предстоящая) наработка до отказа

$$\bar{T}_0(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\lambda t} dt / e^{-\lambda\tau} = 1 / \lambda = \bar{T}_0 \quad (3.2)$$

также не зависит от того, сколько времени изделие проработало ранее. Закономерности (3.1) и (3.2) являются проявлением свойства, называемого отсутствием последствия, при наличии которого показатели надежности изделия зависят

только от состояния изделия в начале рассматриваемого интервала времени, но не зависят от наработки до этого интервала. Существуют физические предположения, объясняющие это свойство. Одно из объяснений сводится к следующему. Любое изделие работает в условиях определенной нагрузки (электрической, механической и пр.) и имеет ограниченную «прочность», поэтому существует некоторая предельная нагрузка, которую изделие способно выдерживать без отказа. Если же нагрузка превосходит предельное значение, то наступает внезапный отказ. Пиковые значения нагрузок возникают случайным образом, и момент их возникновения предсказать невозможно. В теории случайных процессов есть доказательство того, что при определенных условиях время до первого пересечения случайным процессом некоторого порогового уровня имеет как раз экспоненциальное распределение. В приведенном объяснении важным является то, что отказ возникает не вследствие постепенного изменения внутреннего состояния изделия, а вследствие внешнего случайного воздействия, значение которого превышает допустимое. Отсюда следует, что при экспоненциальном распределении наработки до отказа профилактические работы, включающие в себя замену элементов или их периодический ремонт, теряют всякий смысл, так как не могут повлиять на причину отказа. Естественный путь повышения надежности элемента состоит либо в его конструктивном улучшении, либо в снижении действующих нагрузок.

Гамма-распределение

Гамма-распределение имеет следующие характеристики:

$$F(t) = I(k, \lambda t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}; \quad f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda t}; \quad \bar{T}_0 = \frac{k}{\lambda}; \quad DT_0 = \frac{k}{\lambda^2}, \quad (3.3)$$

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция, или факториальная функция. При целом k $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Частота отказов зависит от двух параметров: параметра формы k и параметра масштаба λ . В общем случае при $k > 0$ функция распределения выражается с помощью специальной функции $I(k, \lambda t)$, называемой неполной гамма-функцией, и не выражается через элементарные функции. Однако она протабулирована [8], и по таблицам можно найти ее значение при любых k и λt . При целых k гамма-распределение превращается в распределение Эрланга, для которого функция распределения выражается через сумму, указанную в формуле (3.3).

При $k = 1$ распределение Эрланга становится экспоненциальным распределением. Вид зависимости интенсивности отказов от времени существенно зависит от значения параметра формы. При $k < 1$ интенсивность отказов — убывающая функция времени, изменяющаяся при увеличении t от бесконечности до нуля. При $k > 1$ она возрастает от нуля до бесконечности, а при $k = 1$ не зависит от времени, оставаясь постоянной величиной. Следовательно, гамма-распределение можно использовать для аппроксимации реальных распределений времени безотказной работы на всех трех участках жизненного цикла изделия: приработки ($k < 1$), нормальной эксплуатации ($k = 1$) и старения ($k > 1$).

При целом k возникновение распределения Эрланга можно объяснить с помощью модели накапливающихся повреждений, заключающейся том, что через случайные интервалы времени, имеющие экспоненциальное распределение, в изделии возникают единичные повреждения, а при накоплении k повреждений оно отказывает.

Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла имеет следующие характеристики:

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^m}; \quad f(t) = m\lambda(\lambda t)^{m-1} e^{-(\lambda t)^m}; \quad \bar{T}_0 = \frac{\Gamma(1 + 1/m)}{\lambda};$$

$$DT_0 = \frac{1}{\lambda^2} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right).$$

Как и гамма-распределение, это распределение двухпараметрическое с параметрами m и λ . При $m = 1$ оно превращается в экспоненциальное, а при $m = 2$ — в распределение Рэлея. Распределение Вейбулла может использоваться для аппроксимации реальных распределений на участках приработки ($m < 1$), нормальной эксплуатации ($m = 1$) и старения ($m > 1$).

Существует ряд вероятностных схем, применимых ко многим техническим устройствам, которые приводят к распределению Вейбулла. Рассмотрим одну из них. Схема рассматривается как совокупность большого числа элементов, в каждом из которых наблюдается гамма-распределение наработки до отказа. При переходе от элемента к элементу имеют место колебания в небольших пределах параметра формы. Тогда распределение устройства, созданного из этих элементов и рассматриваемого как один структурный элемент, будет иметь распределение, близкое к распределению Вейбулла.

Равномерное распределение

При равномерном распределении область допустимых значений случайной величины находится в интервале $[a, b]$. Распределение имеет следующие характеристики:

$$F(t) = (t - a) / (b - a); \quad f(t) = 1 / (b - a); \quad \bar{T}_0 = (a + b) / 2; \quad DT_0 = (b - a)^2 / 12.$$

Функция распределения равна нулю при $t < a$ и единице — при $t > a$. Линейный рост вероятности отказа может использоваться для аппроксимации реальных распределений либо для приближенной оценки распределений на основе центральной предельной теоремы.

Усеченное нормальное распределение

В отличие от нормального распределения, которое определено на всей действительной оси, в том числе и при отрицательных значениях варианты, усеченное нормальное распределение определено только на положительной полуоси

и может использоваться для описания распределения наработки до отказа. Распределение имеет следующие характеристики:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t-c}{\sigma}\right) / A; \quad f(t) = \frac{1}{A\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-c)^2}{2\sigma^2}\right); \quad A = 0,5 + \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right);$$

$$\bar{T}_0 = c + \sigma \exp\left(-\frac{c^2}{2\sigma^2}\right) / A\sqrt{2\pi}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy.$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл Лапласа. Функция усеченного нормального распределения может использоваться для аппроксимации реальных распределений на участке старения. При $3c > \sigma$ оно становится очень близким к нормальному распределению ($A = 1$), так как A очень близко к единице. Например, при $c = 3\sigma$ значение $A = 0,99865$.

Механизм возникновения нормального распределения в технических изделиях, как и механизм возникновения гамма-распределения, можно объяснить с помощью модели накапливающихся повреждений. Нетрудно заметить, что с ростом k плотность гамма-распределения (функция частоты отказов) становится более симметричной. В основе этого свойства лежит то обстоятельство, что с ростом k функция частоты отказов приближается к функции

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k/\lambda^2}} \exp\left(-\frac{(t-k/\lambda)^2}{2k/\lambda^2}\right). \quad (3.4)$$

Функция (3.4) совпадает с функцией плотности нормального распределения, если сделать замену $c = k/\lambda$, $\sigma^2 = k/\lambda^2$. Таким образом, нормальное распределение можно рассматривать как предельное распределение модели накапливающихся повреждений при достаточно высоком пороге катастрофического износа. Заметим, что уже при $k = 9$ в (3.4) имеем $c = 3\sigma$, то есть уже можно использовать нормальное распределение вместо усеченного нормального. При этом погрешность от замены гамма-распределения нормальным в области значений вероятности безотказной работы $P > 0,7$ не превышает 4%.

Логарифмически нормальное распределение

Случайная величина имеет логарифмически нормальное (логнормальное) распределение, если логарифм этой величины имеет нормальное распределение, и определена на положительной полуоси. Распределение имеет следующие характеристики:

$$F(t) = 0,5 + \Phi((\ln t - c) / \sigma); \quad f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - c)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\bar{T}_0 = \exp(c + \sigma^2 / 2), \quad DT_0 = \exp(2c + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1).$$

Логнормальное распределение является двухпараметрическим распределением и может использоваться в моделях надежности стареющих систем.

Суперпозиция и композиция распределений

Состав используемых в моделях надежности теоретических распределений можно значительно расширить с помощью двух операций над стандартными распределениями: суперпозиции и композиции. Суперпозицией распределений называют операцию вида

$$\alpha(t) = p_1 a_1(t) + p_2 a_2(t) + \dots + p_n a_n(t), \quad (3.5)$$

где p_i — весовые коэффициенты такие, что $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, $a_i(t)$ — функции плотности стандартного распределения. Если $a_i(t) = \lambda_i \exp(-\lambda_i t)$, то распределение (3.5) называется гиперэкспоненциальным. При этом распределении интенсивность отказов является монотонно убывающей функцией, изменяющейся от значения $\lambda = \lambda_0$ при $t = 0$ до $\lambda = \lambda_\infty$ при $t \rightarrow \infty$, где

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, \quad \lambda_\infty = \min_{(i)} \lambda_i.$$

Зависимость показателей надежности от времени при $n = 2$ приведены на рис. 3.2.

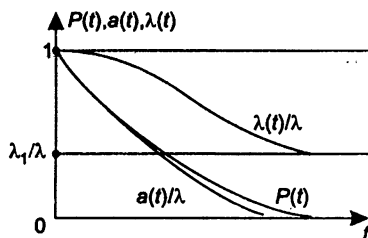


Рис. 3.2. Показатели надежности для суперпозиции распределений

Гиперэкспоненциальное распределение типа (3.5) можно трактовать как экспоненциальное распределение со случайным параметром λ , имеющим дискретное распределение $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Если параметр имеет не дискретное, а непрерывное распределение по закону $\Phi(\lambda)$, то получается гиперэкспоненциальное распределение типа

$$F(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda).$$

Используя суперпозицию распределений, можно создавать модели надежности элемента с немонотонной функцией интенсивности отказов. Примером такого распределения может быть суперпозиция двух гамма-распределений с плотностью

$$\alpha(t) = p \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p) \lambda_2 \frac{(\lambda_2 t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_2 t}.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $k = 5$ и $p = 0,1$ зависимости от времени слагаемых распределений (кривые 1 и 2) и суперпозиции (кривая 3) показаны на рис. 3.3.

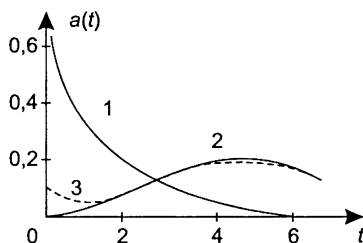


Рис. 3.3. Частота отказов для суперпозиции распределений Эрланга

Композицией распределений называют операцию, реализуемую с помощью интегрального преобразования типа свертки над исходными функциями распределения, и обозначают знаком (*). Если исходные распределения являются распределениями случайных величин, заданных на положительной полуоси, то операции типа свертки соответствует сложение независимых слагаемых. Для двух слагаемых имеем

$$F(t) = P(T_1 + T_2 < t) = F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_2(t-x) dF_1(x). \quad (3.6)$$

При многократной композиции надо выполнить многократное интегрирование с использованием вложенных друг в друга интегралов типа свертки. В результате получим:

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T_1 + T_2 + \dots + T_n < t) = F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_n(t) = \\ &= \int_0^t dF_1(x_1) \int_0^{t-x_1} dF_2(x_2) \dots \int_0^{t-x_1-\dots-x_{n-1}} F_n(t-x_1-\dots-x_n) dF_{n-1}(x_n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если все распределения слагаемых случайных величин одинаковы, то (3.7) записывают в форме

$$F(t) = P(T_1 + T_2 + \dots + T_n < t) = F_1(t)^{(n)}. \quad (3.8)$$

Операция композиции некоторых стандартных распределений приводит к распределению того же семейства, к которому принадлежат распределения слагаемых. Так, многократная композиция гамма-распределений с одинаковыми параметрами масштаба и различными параметрами формы снова дает гамма-распределение с тем же параметром масштаба и параметром формы k , равным сумме параметров формы слагаемых. Однако композиция распределений Вейбулла уже не является распределением Вейбулла.

3.1.3. Учет условий эксплуатации

На участке нормальной эксплуатации расчет интенсивности отказов каждого элемента проводится по формуле

$$\lambda_o = \lambda_6 \left(\prod_{(i)} K_i \right), \quad (3.9)$$

где λ_o и λ_6 — базовое и эксплуатационное значения интенсивности отказов; K_i — поправочные коэффициенты по i -му фактору, учитывающие значения элек-

трической нагрузки, климатические условия, условия эксплуатации и приемки, особенности применения и пр. Среди коэффициентов есть как общие для всех классов элементов, так и специальные. К общим относят пять коэффициентов: K_n — коэффициент нагрузки, учитывающий электрическую нагрузку и температуру окружающей среды; $K_{\text{э}}$ — коэффициент эксплуатации, учитывающий степень жесткости условий эксплуатации; $K_{\text{пр}}$ — коэффициент приемки, учитывающий степень жесткости требований к контролю качества и правила приемки изделий электронной техники (ИЭТ) в эксплуатацию; $K_{\text{и.н}}$ — коэффициент ионизирующего излучения, учитывающий степень снижения жесткости внешних ионизирующих излучений; $K_{\text{р.н}}$ — коэффициент роста надежности, учитывающий предполагаемую степень снижения интенсивности отказов техники за счет мероприятий по повышению надежности.

Коэффициент эксплуатации в упрощенном виде можно представить как произведение трех коэффициентов, учитывающих влияние механических нагрузок (вибрации, ударов) K_m , влажности $K_{\text{вл}}$ и пониженного давления K_d .

Специальные поправочные коэффициенты отличаются большим разнообразием и учитывают, как правило, действие сразу нескольких факторов. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим некоторые классы ЭРИ.

Для интегральных микросхем (ИМС) используют дополнительно четыре коэффициента, учитывающие сложность ИМС и температуру окружающей среды ($K_{\text{с}}$), снижение электрической нагрузки по напряжению по отношению к номинальному значению (K_v), тип корпуса ($K_{\text{корп}}$) и степень освоенности технологического процесса изготовления ИМС ($K_{\text{и.с}}$). Перечень поправочных коэффициентов, входящих в (3.9), варьирует от группы к группе микросхем. Это касается групп логических ИМС, ОЗУ, ПЗУ, полупроводниковых аналоговых ИМС, интегральных гибридных микросхем.

Для полупроводниковых приборов дополнительно используют коэффициенты, учитывающие функциональное назначение прибора ($K_{\text{ф}}$), максимально допустимую нагрузку по мощности рассеяния или по току ($K_{\text{л.н}}$), отношение рабочего напряжения к максимально допустимому ($K_{\text{сл}}$), частоту и мощность импульса (K_f) для СВЧ-транзисторов, тип корпуса, электрическую нагрузку и температуру окружающей среды (K_p), нагрузку по напряжению и рабочую температуру перехода (K_r) для мощных СВЧ-транзисторов. Значения этих коэффициентов находят экспериментально по результатам статистических испытаний или с помощью физических моделей по аналитическим формулам. Так, для оптопар коэффициент режима K_p рассчитывают по формуле

$$K_p = \left(\frac{\bar{I}_{\text{пр}}}{\bar{I}_{\text{пр}0}} \right)^m \exp \left(\frac{E_a}{K} \left(\frac{1}{t_{\text{п}0} + 273} - \frac{1}{t_{\text{п}} + 273} \right) \right),$$

где $\bar{I}_{\text{пр}}$ ($\bar{I}_{\text{пр}0}$) — средний прямой ток излучателя в рабочем (номинальном) режиме; $t_{\text{п}}$ ($t_{\text{п}0}$) — температура p - n -перехода в рабочем (номинальном) режиме, °C; E_a — энергия активации процесса; K — постоянная Больцмана; m — показатель, зависящий от свойств полупроводникового кристалла, $m = 1 \dots 2$.

Для конденсаторов, кроме K_p , используют коэффициент K_c , зависящий от номинальной емкости конденсатора, коэффициент $K_{п.с.}$, зависящий от значения последовательно включенного активного сопротивления (для оксидно-полупроводниковых конденсаторов), коэффициент K_t , зависящий от температуры окружающей среды (для импульсных конденсаторов).

Наибольшее количество специальных поправочных коэффициентов используют при расчете надежности резисторов. Кроме рассмотренных ранее K_{sl} , $K_{корп}$, $K_{п.с.}$ (степень освоенности технологического процесса изготовления) используют также коэффициенты, учитывающие значение омического сопротивления (K_R), мощность (K_M), количество элементов в резисторной сборке ($K_{сл}$), стабильность резисторов ($K_{ст}$).

Для коммутационных изделий учитывают количество задействованных контактов ($K_{к.к.}$) и количество коммутаций в час (K_f). Коэффициент режима K_p зависит от переключаемого тока и температуры окружающей среды. Те же поправочные коэффициенты используют и для расчета интенсивности отказов соединителей, но рассчитывают последние по другим формулам.

3.2. Модели надежности восстанавливаемого элемента

Модель надежности восстанавливаемого элемента включает в себя три составных части: модель безотказности, модель восстанавливаемости и модель контроля работоспособности [1]. Процесс функционирования элемента содержит определенную последовательность интервалов безотказной наработки, времени восстановления и времени обнаружения скрытых отказов. Если все эти интервалы имеют экспоненциальные распределения и обладают свойством независимости в совокупности, то модель надежности сводится к марковской модели функционирования, в которой поведение элемента в будущем зависит только от состояния элемента в данный момент времени и не зависит от предыстории элемента. Если же какие-либо интервалы, например интервалы времени восстановления, имеют неэкспоненциальное распределение или же не обладают свойством независимости, то модель надежности будет полумарковской или немарковской.

3.2.1. Модели безотказности

Модель безотказности восстанавливаемого элемента отличается от модели надежности невозстанавливаемого элемента тем, что в данном случае надо рассматривать не только наработку до первого отказа, но и наработку между соседними отказами. Если расположить интервалы наработки друг за другом в той последовательности, в которой наступали отказы, то получится поток отказов как разновидность потока случайных событий. Изучение модели безотказности как раз и сводится к изучению потока отказов, адекватного реальному процессу функционирования. В теории потоков случайных событий анализируются характеристики двух случайных величин: числа событий N в интервале $(0, t)$ или $(\tau, \tau + t)$ и времени до n -го события (в данном случае — отказа).

Характеристиками потока отказов являются:

1. Вероятность наступления ровно n отказов до наработки t :

$$P_n(t) = P(N(t) = n); \quad P_n(\tau, \tau + t) = P(N(\tau, t) = n). \quad (3.10)$$

2. Вероятность того, что до наработки t наступит не менее n отказов

$$\pi_n(t) = P(N(t) > n) = \sum_{i=n}^{\infty} P_i(t); \quad \pi_n(\tau, t) = P(N(\tau, t) > n) = \sum_{i=n}^{\infty} P_i(\tau, t). \quad (3.11)$$

3. Среднее число отказов до заданной наработки, или ведущая функция потока отказов

$$H(t) = MN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n(t); \quad (3.12)$$

$$H(\tau, t) = MN(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n(\tau, t) = H(\tau + t) - H(\tau).$$

4. Интенсивность потока отказов

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{P_n(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{dH(t)}{dt}; \quad (3.13)$$

$$\omega(\tau, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{P_n(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial H(\tau + t)}{\partial t} = \omega(\tau + t).$$

5. Параметр потока отказов

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial \pi_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0}; \quad (3.14)$$

$$v(\tau, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_1(\tau + t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial \pi_1(\tau + t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = v(\tau + t).$$

6. Дисперсия числа отказов до заданной наработки

$$DN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - H^2(t); \quad DN(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(\tau, t) - H^2(\tau, t). \quad (3.15)$$

7. Распределение наработки (времени) до n -го отказа

$$F_n(t) = P(T_{in} < t) = \pi_n(t). \quad (3.16)$$

В моделях безотказности находят применение несколько классов потоков отказов. Чтобы сформулировать их классификационные признаки, необходимо определить некоторые свойства потоков, которыми потоки могут обладать [6], [7].

1. Поток отказов называют стационарным, если вероятность наступления определенного числа отказов в заданном промежутке времени (или до заданной наработки) зависит только от величины этого промежутка и не зависит от его расположения на оси времени. Математически это свойство выражается так:

$$P_n(\tau, t) = P_n(0, t) = P_n(t). \quad (3.17)$$

2. Поток отказов называют ординарным, если вероятность наступления двух или более событий в малом промежутке времени есть величина более высокого порядка малости (o маленькое), чем величина этого промежутка:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_2(t, \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_2(t, \Delta t)}{\pi_1(t, \Delta t)} = 0. \quad (3.18)$$

Иначе это свойство можно выразить так: $\pi_2(t, \Delta t) = o(\Delta t)$. Применяя свойство (3.18) в формулах (3.13) и (3.14), устанавливаем, что для любого ординарного потока интенсивность и параметр потока совпадают количественно:

$$\omega(t) = v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t, \Delta t)}{\Delta t} = \left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (3.19)$$

3. Поток отказов называют потоком без последействия, если вероятность наступления некоторого числа отказов в заданном промежутке времени не зависит от того, сколько отказов и в какие моменты времени наступило до рассматриваемого промежутка. Это значит, что условная вероятность наступления n отказов в промежутке $(\tau, \tau + t)$, определенная при произвольном предположении A о наступлении отказов до этого промежутка, совпадает с безусловной вероятностью:

$$P_n(\tau, t | A) = P_n(\tau, t). \quad (3.20)$$

4. Поток отказов называют потоком с ограниченным последствием, если из предыстории A существенно лишь то, в какой момент времени x наступил последний отказ перед рассматриваемым промежутком времени:

$$P_n(\tau, t | A) = P_n(\tau, t | x). \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что для потока с ограниченным последствием интервалы наработки между соседними отказами независимы в совокупности.

5. Поток отказов, не обладающий свойствами отсутствия последействия и ограниченного последействия, называют потоком со сложным последствием.

По наличию или отсутствию указанных свойств можно выделить пять классов потоков отказов (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Классификация потоков отказов

№	Наименование потока отказов	Обозначение	Свойства				
			1	2	3	4	5
1	Стационарный пуассоновский поток	СПП	+	+	+	—	—
2	Нестационарный пуассоновский поток	НПП	—	+	+	—	—
3	Обобщенный пуассоновский поток	ОПП	+	+	—	—	+
4	Рекуррентный поток	РП	—	+	—	+	—
5	Стационарный рекуррентный поток	СРП	+	+	—	+	—

Стационарный и нестационарный пуассоновские потоки соответствуют марковской модели безотказности, рекуррентный и стационарный рекуррентный пото-

ки соответствуют полумарковской модели, а обобщенный пуассоновский поток — немарковской модели безотказности.

3.2.2. Характеристики потоков отказов

Для каждого класса потоков могут быть найдены основные характеристики в соответствии с (3.10)–(3.16). Приведем здесь расчетные формулы для характеристик без детального вывода. Вывод можно найти в приложении и в работе [6].

Простейший поток отказов

Простейший поток отказов является стационарным ординарным потоком без последействия. Используя эти свойства в форме (3.17)–(3.21), можно установить, что число отказов в интервале $(0, t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $a = \lambda t$, то есть

$$P_n(\tau, t) = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$
 (3.22)

Среднее значение и дисперсия числа отказов до наработки t находят по формуле

$$H(\tau, t) = H(t) = DN(t) = \lambda t.$$
 (3.23)

Отсюда следует, что интенсивность и параметр потока отказов совпадают с параметром λ распределения (3.29):

$$\omega(t) = \nu(t) = \lambda.$$

Используя (3.16), находим

$$F_n(t) = P(T_{un} < t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Наработка до n -го отказа имеет распределение Эрланга с параметрами n и λ . Поскольку это распределение получается как распределение суммы n независимых слагаемых, каждое из которых имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , наработка между отказами (на отказ) имеет распределение

$$F_1(t) = P(T_n < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$
 (3.24)

Из формул (3.29)–(3.33) следует, что для определения всех характеристик простейшего потока достаточно знать численное значение параметра λ .

Нестационарный пуассоновский поток отказов

Нестационарный пуассоновский поток отказов является ординарным потоком без последействия. Из этих двух свойств при заданной функции интенсивности потока $\omega(t)$ можно найти все остальные характеристики. Распределение числа отказов в интервале $(\tau, \tau + t)$ является пуассоновским с параметром $a = H(\tau, t)$, то есть

$$P_n(\tau, t) = \frac{H^n(\tau, t)}{n!} e^{-H(\tau, t)},$$

$$H(\tau, t) = DN(\tau, t) = H(\tau + t) - H(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+t} \omega(x) dx.$$

При $\tau = 0$ ведущая функция потока $H(0, t) = H(t)$. В частности, если $H(t) = \lambda t$, то ОПП становится простейшим потоком.

Обобщенный пуассоновский поток отказов

Обобщенный пуассоновский поток отказов получают как СПП со случайным параметром λ , имеющим известное распределение $\Phi(\lambda)$. Поэтому вероятность наступления n отказов до наработки t можно найти по формуле

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} P_n(t, \lambda) d\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda). \quad (3.25)$$

В частности, при $n = 0$ имеем

$$P_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda) = \Phi^*(t), \quad (3.26)$$

где $\Phi^*(t)$ — операционное преобразование Лапласа—Стилтьеса функции распределения $\Phi(\lambda)$. Дифференцируя (3.26) по времени и сравнивая результат с (3.25), получим соотношение

$$P_n(t) = \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} P_0(t), \quad n = 1, 2, 3... \quad (3.27)$$

Начальные моменты распределения для ОПП и СПП связаны соотношением

$$MN^k(t) = \int_0^{\infty} MN^k(t, \lambda) d\Phi(\lambda), \quad k = 1, 2, 3...$$

В частности, при $n = 1$ и 2 с учетом (3.30) имеем

$$H(t) = \int_0^{\infty} \lambda t d\Phi(\lambda) = \bar{\lambda} t, \quad \bar{\lambda} = \int_0^{\infty} \lambda d\Phi(\lambda); \quad (3.28)$$

$$MN^2(t) = \int_0^{\infty} (\lambda t + \lambda^2 t^2) d\Phi(\lambda) = \bar{\lambda} t + \alpha_{2\lambda} t^2, \quad \alpha_{2\lambda} = \int_0^{\infty} \lambda^2 d\Phi(\lambda), \quad (3.29)$$

где $\bar{\lambda}$ и $\alpha_{2\lambda}$ — первый и второй начальные моменты распределения $\Phi(\lambda)$. Из (3.28) и (3.29) находим интенсивность потока отказов и дисперсию числа отказов до наработки t :

$$\omega(t) = \omega = \bar{\lambda}; \quad DN(t) = \bar{\lambda} t + (\alpha_{2\lambda} - \bar{\lambda}^2) t^2.$$

Отсюда следует, что интенсивность потока отказов не зависит от времени. Это доказывает стационарность ОПП. Кроме того, ОПП ординарен по построению, так как осреднение по формуле (3.25) характеристик ординарного потока СПП не может нарушить ординарности потока. Из (3.25) и (3.27) следует также, что способы задания ОПП с помощью $\Phi(\lambda)$ и $P_0(t)$ эквивалентны друг другу.

Рекуррентный поток отказов

Рекуррентный поток отказов задают с помощью функции распределения наработки между отказами $F(t)$ или его изображения по Лапласу—Стилтьесу:

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t).$$

Учитывая, что наработка до n -го отказа T_{nn} является суммой независимых слагаемых, имеющих смысл наработки между отказами, и каждое слагаемое имеет распределение $F(t)$, используем для нахождения распределения T_{nn} операцию декомпозиции (3.6):

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)dF(x).$$

Применяя здесь операционное преобразование Лапласа—Стилтьеса и понижая индекс n , получим изображение функции распределения:

$$F_n^*(s) = (F^*(s))^n = \pi_n^*(s). \tag{3.30}$$

Отсюда

$$P_n^*(s) = \pi_n^*(s) - \pi_{n+1}^*(s) = (1 - F^*(s))(F^*(s))^n. \tag{3.30a}$$

Обратное преобразование в (3.30) позволяет найти явный вид функции $F_n(t)$. С помощью (3.12) и (3.30) найдем изображение для ведущей функции потока:

$$H^*(s) = \sum_{n=1}^\infty \pi_n^*(s) = \sum_{n=1}^\infty (F^*(s))^n = F^*(s) / (1 - F^*(s)). \tag{3.31}$$

Формуле (3.31) в комплексной области соответствует интегральное уравнение во временной области

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x). \tag{3.32}$$

Умножая (3.31) почленно на s и дифференцируя (3.32) справа и слева, получим уравнение для интенсивности потока отказов и формулу для ее изображения:

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t \omega(t-x)f(x)dx; \quad \omega^*(s) = f^*(s) / (1 - f^*(s)), \tag{3.33}$$

где $f(t) = F'(t)$ — плотность распределения наработки между отказами.

Асимптотическое поведение ведущей функции и интенсивности потока отказов устанавливается с помощью предельных теорем. Согласно теореме П4.1 (см. приложение),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 1 / \bar{T}_n = \omega, \tag{3.34}$$

где $\bar{T}_n$ — средняя наработка между отказами (средняя наработка на отказ).

Согласно теореме П4.2 (Блейка) (см. приложение), среднее число отказов в интервале $(\tau, \tau + t)$ имеет следующее асимптотическое значение:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (H(\tau + t) - H(\tau)) = t / \bar{T}_n = \omega t.$$

Согласно теореме П4.3 (Смита) (см. приложение), для любой невозрастающей интегрируемой функции $Q(t)$ выполняется следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-x) dH(x) = \frac{1}{T_{11}} \int_0^{\infty} Q(t-x) dH(x). \quad (3.35)$$

Все приведенные результаты для рекуррентного потока получены для случая, когда наблюдение за ним начинается в момент восстановления работоспособности элемента. Пусть теперь наблюдение начинается в момент времени, когда суммарная наработка достигла величины τ . Очевидно, что момент начала наблюдения не совпадает с моментом отказа. Это значит, что наблюдение начинается внутри некоторого интервала между отказами. Поэтому функция распределения наработки до ближайшего отказа $F(\tau, t)$, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(t)$. Чтобы найти $F(\tau, t)$, составим сначала выражение для вероятности $P_0(\tau, t)$ того, что в интервале наработки $(\tau, \tau + t)$ у элемента не будет отказов. Это может произойти двумя несовместными способами: либо на всем промежутке $(0, \tau + t)$ не будет отказов (вероятность этого события равна $1 - F(\tau + t)$), либо в промежутке $(0, \tau)$ будет по крайней мере один отказ, причем последний из них в окрестности точки $x < \tau$ (вероятность этого события равна $dH(x)$), а за оставшееся время $\tau + t - x$ отказов не будет (с вероятностью $1 - F(\tau + t - x)$). Суммируя вероятности двух несовместных событий и используя независимость значений наработки между отказами, получаем уравнение

$$P_0(\tau, t) = 1 - F(\tau + t) + \int_0^{\tau} (1 - F(\tau + t - x)) dH_2(x). \quad (3.36)$$

Если функция $F(t)$ известна, то не представляет особого затруднения вычисление вероятности $P_0(\tau, t)$. Функция распределения

$$F(\tau, t) = 1 - P_0(\tau, t).$$

Пока функция $F(\tau, t)$ зависит от τ , рассматриваемый элемент находится на нестационарном участке эксплуатации.

Стационарный рекуррентный поток отказов (типа Пальма)

Характеристики стационарного рекуррентного потока (СРП) получают из характеристик РП с помощью предельного перехода при $t \rightarrow \infty$ или $\tau \rightarrow \infty$. Так, согласно (3.34), параметр ω потока СРП является постоянной величиной, обратной средней наработке на отказ, что является признаком стационарного потока. Предельный переход в (3.36) при $\tau \rightarrow \infty$ дает выражение для вероятности отсутствия отказов в интервале длительностью t :

$$P_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P_0(\tau, t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} (1 - F(\tau + t - x)) dH(x). \quad (3.37)$$

Сравнивая (3.37) и (3.35), видим, что здесь можно использовать теорему Смита при $Q(\tau) = 1 - F(\tau + t)$ и получить

$$P_0(t) = \omega \int_t^{\infty} (1 - F(x)) dx = \int_t^{\infty} (1 - F(x)) dx / \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx. \quad (3.38)$$

Функция распределения наработки до первого отказа

$$F_1(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau, t) = 1 - P_0(t) = \omega \int_0^t (1 - F(x)) dx. \quad (3.39)$$

Отсюда следует, что СРП состоит из последовательности интервалов наработки между отказами, из которых первый имеет распределение (3.39), а остальные — распределение $F(t)$.

3.2.3. Модели восстанавливаемости

Процесс восстановления работоспособности предполагает выполнение нескольких различных по своему назначению операций, а поэтому время восстановления можно представить в виде суммы: —

$$T_{\text{в}} = T_{\text{обн}} + T_{\text{лок}} + T_{\text{уст}} + T_{\text{нал}} + T_{\text{п. п.}}, \quad (3.40)$$

где $T_{\text{обн}}$ — время обнаружения отказа; $T_{\text{лок}}$ — время локализации отказа; $T_{\text{уст}}$ — время устранения отказа; $T_{\text{нал}}$ — время наладки аппаратуры после устранения отказа; $T_{\text{п. п.}}$ — время предпусковой проверки аппаратуры.

Рассматривая каждую из этих операций как случайный процесс, можно считать слагаемые в формуле (3.40) случайными величинами с функциями распределения, зависящими от ремонтпригодности, алгоритмов функционирования и правил технического обслуживания аппаратуры. Время обнаружения отказа исчисляется от момента возникновения отказа до выработки сигнала о появлении отказа и зависит от метода контроля работоспособности. В АСОИУ контроль может осуществляться либо оператором — без специального контрольного оборудования, по косвенным признакам, либо системой автоматического контроля работоспособности. В последнем случае различают контроль аппаратурный с помощью средств, встроенных в контролируемую аппаратуру, и контроль программный, использующий основную аппаратуру и специальные контролирующие программы, реализованные в специализированных логических устройствах или компьютерах. По регламенту проведения различают контроль периодический и непрерывный. Время обнаружения отказа будет наименьшим, когда все оборудование АСОИУ имеет непрерывный аппаратурный контроль, а наибольшим — когда контроль периодический с большим периодом или контроль по косвенным признакам.

Локализация отказа, то есть определение места отказа с точностью до сменного модуля, может осуществляться как вручную обслуживающим персоналом, так и автоматически, с помощью средств технической диагностики. И в том, и в другом случае время локализации существенно зависит от стратегии поиска неисправности. Разработкой методов поиска и анализом их эффективности занимаются в процессе технической диагностики.

Время устранения отказа исчисляется от момента локализации отказа до его устранения путем ремонта или замены отказавшего элемента работоспособным. В него входят время доставки отказавшего модуля к месту ремонта, время ожидания начала обслуживания, вызванного причинами, не связанными с доставкой, и собственно время ремонта или замены отказавшего элемента. Ясно, что время устранения существенно зависит от организации системы технического

обслуживания, от расположения и производительности ремонтных органов, подготовки ремонтного персонала.

Наладка и предпусковая проверка работоспособности аппаратуры являются завершающими операциями. Они включают в себя измерение и регулировку значений контрольных параметров и тестовую проверку, состоящую в выполнении контрольных заданий.

При построении модели восстанавливаемости необходимо найти распределение времени восстановления при заданных условиях технического обслуживания и ремонта. Хотя принципиально и представляется возможным теоретически проанализировать влияние перечисленных факторов на распределение времени восстановления, не всегда удастся сделать это на практике в полной мере. Особенно трудно учесть квалификацию и условия труда ремонтного персонала. Поэтому чаще находят распределение, используя статистические данные журналов ремонтных органов и предприятий. Иногда удается объяснить механизм возникновения наблюдаемых закономерностей изменения времени восстановления.

Если из всех слагаемых формулы (3.40) основным является время устранения и аппаратура конструируется так, что ее элементы, часто выходящие из строя, требуют наименьшего времени ремонта по сравнению с элементами, которые отказывают редко, то, вероятнее всего, будет наблюдаться экспоненциальное распределение времени восстановления:

$$F_{\mu}(t) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-t/\bar{T}_{\mu}},$$

где μ — интенсивность восстановления; $\bar{T}_{\mu}$ — среднее время восстановления. Экспоненциальное распределение наблюдается также в том случае, если отказ устраняется довольно быстро путем замены отказавшего элемента работоспособным, а определяющим в (3.40) является время поиска неисправности. При этом ремонтный персонал, накопив определенный опыт, ведет поиск неисправностей целенаправленно, проверяя сначала «слабые» элементы, которые отказывают чаще, а затем уже элементы с меньшей интенсивностью отказов.

Если же все составные части аппаратуры имеют одинаковые интенсивности отказов и приблизительно одинаковые значения времени устранения отказов, то у обслуживающего персонала нет оснований отдавать предпочтение той или иной части. Тогда при построении модели можно использовать равномерное распределение:

$$F_{\mu}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a; \\ (t - a) / (b - a), & a \leq t \leq b; \\ 1, & t \geq b. \end{cases}$$

Если в (3.40) два или более слагаемых вносят в среднем одинаковый вклад во время восстановления и имеют экспоненциальные распределения с параметром μ , а остальные слагаемые малы, то время восстановления имеет распределение Эрланга (3.3) с параметрами k и μ :

$$F_{\mu}(t) = I(k, \mu t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t},$$

где k — число слагаемых.

В устройствах, в которых конструктивными и алгоритмическим приемами не удается обеспечить малое время восстановления чаще отказывающихся элементов, наблюдаются нормальное (симметричное) или логарифмически нормальное (асимметричное) распределения. В некоторых случаях удовлетворительной является модель с постоянным временем восстановления $T_в$ и вырожденной функцией распределения

$$F_в(t) = \begin{cases} 0, & t < T_в; \\ 1, & t \geq T_в. \end{cases}$$

Модели восстанавливаемости могут подбираться отдельно для каждого элемента, модуля, узла, для групп узлов, для всех элементов системы. Они могут использовать различные распределения или один класс распределений и различаться только значениями параметров.

3.2.4. Модели контроля и диагностирования

Время контроля и диагностирования в составе времени обнаружения и локализации отказа включено во время восстановления [5]. При этом, однако, не указывается, какими ресурсами и в каком количестве обеспечиваются эти характеристики, каковы полнота и достоверность контроля и диагностирования. Ответы на эти вопросы должна дать модель контроля и диагностирования. Важность этой модели определяют два момента. С одной стороны, контроль и диагностирование улучшают показатели надежности, так как позволяют уменьшить долю скрытых отказов или даже исключить их и улучшить показатели восстанавливаемости. С другой стороны, на организацию и проведение контроля и диагностирования затрачиваются определенные ресурсы (аппаратура, емкости памяти, время функционирования), и это снижает показатели надежности, так как аппаратура контроля сама может отказывать, увеличение времени функционирования увеличивает риск отказа основной аппаратуры, вынужденное повышение производительности устройств для компенсации потерь времени может приводить к росту интенсивности отказов. Неидеальность контроля снижает эффективность структурного резервирования и вынуждает увеличивать кратность резервирования, то есть приводит к дополнительным расходам ресурсов.

Выбор и оптимизация параметров системы контроля и диагностирования могут быть выполнены при анализе комплексной модели надежности. Перед моделью контроля ставятся более ограниченные задачи, а именно: установление зависимости ошибок первого и второго рода (необнаружение возникших отказов и выдача ложного сигнала об отказе) от выделенных ресурсов. Для оценки аппаратурных затрат на организацию встроенного контроля обычно используют эвристические модели. Из них наиболее известны логарифмическая и степенная модели. Согласно логарифмической модели, коэффициент полноты контроля α связан с коэффициентом относительных затрат аппаратуры на систему контроля $\delta = \lambda_k / \lambda_0$ соотношением

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1 - \alpha}; \quad \alpha = 1 - e^{-\alpha\delta}, \quad (3.41)$$

где λ_k и λ_0 — интенсивности отказов контрольного и основного оборудования; a — параметр модели, изменяющийся для различных устройств в пределах (5, 10). С этой моделью хорошо согласуются экспериментальные данные при $\alpha < 0,98$. Обобщением логарифмической модели является двухпараметрическая модель типа Вейбулла

$$\delta = \frac{1}{a} \left(\ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^m; \quad (b-a)\alpha = 1 - \exp(-(a\delta)^m), \quad (3.42)$$

где параметр m подбирают в диапазоне $0,8 < m < 1,2$.

Степенная модель устанавливает соотношение

$$\delta = \alpha^m, \quad \alpha = \delta^{1/m}, \quad m \gg 1. \quad (3.43)$$

Эта модель хорошо согласуется с экспериментальными данными при больших α ($\alpha > 0,98$).

При программном контроле коэффициент полноты тестирования α зависит от длительности тестирования t_k . Такая зависимость может быть представлена в виде

$$t_k = t_k^0 f(\alpha), \quad \alpha = \varphi(t_k), \quad t_k \leq t_k^0, \quad (3.44)$$

где t_k^0 — длительность полного теста. Зависимости (3.44) существенно нелинейны, и для их описания может использоваться зависимость типа (3.42), в которой $\delta = L / L_0$ находят как отношение длин неполного и полного тестов. В степенной модели $\delta = L / L_0$ также находят как отношение длин неполного и полного тестов. Параметры a и m находят из экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

3.3. Расчет показателей надежности

Метод расчета показателей надежности и расчетные формулы определяются типом используемой модели надежности, зависящим, в свою очередь, от типа моделей безотказности, восстанавливаемости и диагностирования.

3.3.1. Марковская модель

Поскольку единичные показатели надежности, в том числе показатели безотказности, уже рассмотрены ранее, при рассмотрении марковской модели остановимся на некоторых комплексных показателях и найдем расчетные формулы для нестационарного $K_r(t)$ и стационарного K_r коэффициентов готовности, нестационарного $K_{o.r}(\tau, t)$ и стационарного $K_{o.r}(t)$ коэффициентов оперативной готовности, среднего числа восстановлений $H_2(t)$ за время t и интенсивности потока восстановления $\omega_2(t)$. Полагаем, что поток отказов элемента простейший с параметром λ , распределение времени восстановления экспоненциальное с параметром μ , контроль работоспособности идеальный, то есть все возникающие отказы обнаруживаются мгновенно и достоверно.

Элемент, для которого соблюдены перечисленные условия, может находиться в одном из двух состояний: «0» (работоспособен) или «1» (неработоспособен и ремонтируется). Интенсивности переходов из одного состояния в другое постоянны и равны λ для перехода $0 \rightarrow 1$ и μ для перехода $1 \rightarrow 0$. Вероятности $P_i(t)$ застать элемент в состоянии $i = 0$ или $i = 1$ находят из системы дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \quad \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \quad (3.45)$$

с начальными условиями $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$. Выполняя в (3.45) операционное преобразование Лапласа—Карсона, получим:

$$K_r^*(s) = P_0^*(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -\mu \\ 0 & s + \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + \lambda & -\mu \\ -\lambda & s + \mu \end{vmatrix}} = \frac{s + \mu}{s + \mu + \lambda} = 1 - \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu}. \quad (3.46)$$

Обратное преобразование в (3.46) дает

$$K_r(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (3.47)$$

Отсюда коэффициент готовности

$$K_r = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Чтобы найти $H_2(t)$, выполним в (1.17) операционное преобразование

$$H_2^*(s) = V^*(s) / (1 - V^*(s)), \quad (3.48)$$

где

$$V^*(s) = F^*(s)F_v(s) = \lambda\mu / ((s + \mu)(s + \lambda)). \quad (3.49)$$

Подставим (3.49) в (3.48) и найдем:

$$H_2^*(s) = \frac{\lambda\mu}{s(s + \lambda + \mu)} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda + \mu} \right).$$

Отсюда

$$H_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \left(t - \frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right).$$

Дифференцируя $H_2(t)$ по времени, найдем интенсивность потока восстановлений:

$$\omega_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}). \quad (3.50)$$

Сравнивая (3.47) и (3.50), получим связь между характеристиками:

$$K_r(t) = 1 - \omega_2(t) / 1 - \omega_2(t) = 1 - \bar{T}_n \omega_2(t).$$

Используя теперь основное свойство экспоненциального распределения, согласно которому вероятность безотказной работы элемента в промежутке длительностью t не зависит от того, сколько времени элемент проработал до достижения этого промежутка, можно представить нестационарный коэффициент оперативной готовности в виде произведения нестационарного коэффициента готовности и вероятности безотказной работы:

$$K_{o,r}(\tau, t) = K_r(\tau) e^{-\lambda t} = \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)\tau} \right) e^{-\lambda t}. \quad (3.51)$$

Стационарное значение

$$K_{o,r}(t) = K_r e^{-\lambda t} = \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-\lambda t}. \quad (3.52)$$

Если в элементе могут быть скрытые отказы и их доля от общего количества отказов составляет $\beta = 1 - \alpha$, а время обнаружения (проявления) скрытого отказа имеет экспоненциальное распределение с параметром ν , то в графе состояний появляется одно дополнительное состояние «2» (элемент неработоспособен, но отказ не обнаружен). Интенсивности переходов имеют следующие значения: $\alpha\lambda$ для перехода $0 \rightarrow 1$, $\beta\lambda$ для перехода $0 \rightarrow 2$, ν для перехода $2 \rightarrow 1$, μ для перехода $1 \rightarrow 0$.

Стационарные вероятности состояний находят из системы алгебраических уравнений Колмогорова:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0; \quad \alpha\lambda p_0 + \nu p_2 - \mu p_1 = 0; \quad \beta\lambda p_0 - \nu p_2 = 0; \quad p_0 + p_1 + p_2 = 0.$$

Отсюда находим коэффициент готовности и коэффициент контролируемой готовности:

$$K_r = p_0 = 1 / \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \beta \frac{\lambda}{\nu} \right); \quad K_{k,r} = p_0 + p_2 = \left(1 + \frac{\beta\lambda}{\nu} \right) / \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \beta \frac{\lambda}{\nu} \right). \quad (3.53)$$

Согласно (1.27), вероятность безотказного применения

$$P_{np}(t) = K_r e^{-\lambda t} / K_{k,r} = \frac{\nu}{\nu + \beta\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{1}{1 + \beta\lambda / \nu} e^{-\lambda t}. \quad (3.54)$$

Как следует из (3.53) и (3.54), степень влияния скрытых отказов на показатели надежности зависит от отношения $\beta / \nu = \beta \bar{T}_{обн}$, то есть от доли скрытых отказов и среднего времени обнаружения скрытых отказов косвенными методами. Если $\bar{T}_{обн}$ велико, то снижение вероятности безотказной работы будет значительным даже при небольшой доле скрытых отказов.

3.3.2. Полумарковская модель

Модель надежности восстанавливаемого элемента называют полумарковской, если поток отказов рекуррентный с заданной функцией распределения наработки между соседними отказами $F(t)$, а время восстановления имеет произвольное

распределение $F_g(t)$. Рассмотрим случай, когда контроль работоспособности идеальный и все отказы обнаруживаются в момент их возникновения. Тогда, согласно (3.48) и (3.49), функция среднего числа восстановлений за время t имеет изображение

$$H_2^*(s) = F^*(s)F_n^*(s) / (1 - F^*(s)F_n^*(s)). \quad (3.55)$$

Подставляя сюда изображения известных функций $F(t)$ и $F_n(t)$ и переходя к оригиналу, получим сначала $H_2(t)$, а затем интенсивность потока восстановлений $\omega_2(t)$.

Чтобы получить выражение для нестационарного коэффициента готовности, учтем, что в момент t элемент может оказаться в работоспособном состоянии двумя несовместными способами: либо за время t элемент ни разу не откажет (с вероятностью $1 - F(t)$), либо до момента t произойдет по крайней мере один отказ и этот отказ будет устранен в момент $x < t$ (вероятность этого события равна $dH_2(t)$), а после момента x в течение интервала $t - x$ элемент проработает безотказно (с вероятностью $1 - F(t - x)$). Суммируя вероятности несовместных событий, получим:

$$K_r(t) = 1 - F(t) + \int_0^t (1 - F(t - x))dH_2(x). \quad (3.56)$$

Выполним в (3.56) операционное преобразование и учтем (3.55). Тогда

$$K_r^*(s) = (1 - F^*(s)) / (1 - F^*(s)F_n^*(s)). \quad (3.57)$$

Используя тауберovu теорему (см. приложение), из (3.57) легко найти стационарное значение коэффициента готовности:

$$\begin{aligned} K_r &= \lim_{s \rightarrow 0} K_r^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - F^*(s)}{1 - F^*(s)F_n^*(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - s\bar{T}_0 + o(s))}{1 - (1 - s\bar{T}_0 + o(s))(1 - s\bar{T}_n + o(s))} = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_0 + \bar{T}_n}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Благодаря рекуррентному потоку отказов здесь средняя наработка на отказ совпадает со средней наработкой до первого отказа.

Чтобы найти нестационарный коэффициент оперативной готовности, используем формулу (3.36), заменив в ней $H(t)$ и $\omega(t)$ на $H_2(t)$ и $\omega_2(t)$. Тогда

$$K_{o.r}(\tau, t) = 1 - F(\tau + t) + \int_0^\tau (1 - F(\tau + t - x))dH_2(x). \quad (3.59)$$

Чтобы получить стационарное значение, надо в (3.59) совершить предельный переход при $\tau \rightarrow \infty$. Используя теорему Смита (3.35) при $Q(t) = 1 - F(\tau + t)$, находим:

$$K_{o.r}(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{o.r}(\tau, t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau (1 - F(\tau + t - x))dH_2(x) = \frac{1}{T_c} \int_0^\infty (1 - F(\tau + t))dx,$$

где $\bar{T}_c = \bar{T}_0 + \bar{T}_n$ — среднее значение времени между моментами восстановления, определяемое как первый момент распределения $V(t)$. Преобразуя последнее выражение, получим:

$$K_{o.r}(t) = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_0 + \bar{T}_n} \frac{1}{\bar{T}_0} \int_0^\infty (1 - F(\tau + t)) dx = K_r P_0(t). \quad (3.60)$$

Выражение для нахождения $P_0(t)$ берут из формулы (3.38). Таким образом, коэффициент оперативной готовности получают как произведение коэффициента готовности на вероятность безотказной работы на стационарном участке эксплуатации.

Пример 3.1. Пусть $F(t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$, $F_n(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Необходимо найти $H_2(t)$, $\omega_2(t)$, $K_r(t)$, $K_{o.r}(t)$.

Решение. Находим изображения

$$F^*(s) = (\lambda / (\lambda + s))^2; \quad F_n^*(s) = \mu / (\mu + s). \quad (3.61)$$

Подставив (3.61) в (3.55), получим:

$$H_2^*(s) = \frac{\lambda^2 \mu}{s(s^2 + s(2\lambda + \mu) + \lambda^2 + 2\lambda\mu)} = \frac{\lambda^2 \mu}{s(s + s_1)(s + s_2)}, \quad (3.62)$$

где

$$s_{1,2} = (2\lambda + \mu) / 2 \pm \sqrt{(2\lambda + \mu)^2 / 4 - \lambda(\lambda + 2\mu)}.$$

В формуле (3.62) есть два простых полюса и один двукратный. Определяя в них вычеты, получим:

$$\begin{aligned} H_2(t) &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\lambda t - \frac{\lambda}{s_2 - s_1} (e^{-s_2 t} - e^{-s_1 t}) - \frac{\lambda(2\lambda + \mu)}{s_2 - s_1} \times \left(\frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 t}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 t}) \right) \right) = \\ &= \frac{\lambda \mu t}{\lambda + 2\mu} - \frac{\mu(2\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} - \frac{\lambda \mu}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) \times \left(\frac{1}{s_1} (1 - e^{-s_1 t}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 t}) \right) = \\ &= \frac{\lambda \mu t}{\lambda + 2\mu} - \frac{\mu(2\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} - \frac{\lambda \mu}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) - \\ &\quad - \frac{2\lambda + \mu}{\lambda(\lambda + 2\mu)} (s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Дифференцирование в (3.63) дает

$$\omega_2(t) = \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda \mu(2\lambda + \mu)}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}) + \frac{\lambda \mu}{(s_2 - s_1)(\lambda + 2\mu)} (s_1 e^{-s_1 t} - s_2 e^{-s_2 t})$$

Найдем теперь нестационарный коэффициент готовности. Подставим (3.62) в (3.57):

$$K_r^*(s) = 1 - \frac{F^*(s)(1 - F_n^*(s))}{1 - F^*(s)F_n^*(s)} = 1 - \frac{\lambda^2}{(s + s_1)(s + s_2)}.$$

Отсюда

$$K_r(t) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(1 - \frac{s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1} \right).$$

Наконец, учитывая, что $\bar{T}_0 = 1/2\lambda$, $\bar{T}_b = 1/\mu$, из (3.60) получим:

$$K_{o.r}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^\infty (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} dx = \frac{\mu(2 + \lambda t)}{\lambda + 2\mu} e^{-\lambda t}.$$

Если контроль работоспособности неидеальный и доля скрытых отказов равна β , то нестационарный коэффициент готовности находят из интегрального уравнения

$$\begin{aligned} K_r(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \alpha \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{t-x} K_r(t-x-y) dF_b(y) + \\ + \int_0^t \beta \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{t-x} dG(y) \int_0^{t-x-y} K_r(t-x-y-z) dF_b(z). \end{aligned} \quad (3.64)$$

В уравнении учтены три несовместных случая: а) в течение времени t элемент не отказывает; б) в момент x возникает обнаруженный отказ и через время y он устраняется; в) в момент x возникает скрытый отказ, через время y он обнаруживается косвенными средствами и через время z устраняется. Выполняя в (3.64) операционное преобразование Лапласа—Стилтьеса, найдем

$$K_r^*(s) = s / (s + \lambda(1 - F_b^*(s)(\alpha + \beta G^*(s)))). \quad (3.65)$$

Выполняя в (3.65) предельный переход $s \rightarrow 0$, согласно тауберовой теореме получим стационарный коэффициент готовности:

$$K_r = 1 / (1 + \lambda(\bar{T}_b + \beta \bar{T}_3)). \quad (3.66)$$

Отсюда при $\beta = 0$ получим выражение (3.58), а при $\bar{T}_b = 1/\mu$, $\bar{T}_3 = 1/\nu$ — формулу (3.53).

Технические средства АСОИУ, рассматриваемые на начальном этапе анализа надежности как элементы в широком смысле, могут соединяться в систему, а также сами рассматриваться как система в широком смысле. Методы расчета показателей надежности систем излагаются в последующих главах.

Список литературы

1. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 2. Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Машиностроение, 1987. — 330 с. — Гл. 9.

2. Надежность технических систем: Справ. / Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1985. — 606 с. — Гл. 3.
3. Половко А. М. Основы теории надежности. — М.: Наука, 1964. — 446 с.
4. Максимов Ю. Д. Вероятностные разделы математики. — СПб.: Иван Федоров, 2001. — 588 с. — Гл. 4.
5. Северцев Н. А. Надежность сложных систем в эксплуатации и отработке. М.: Высш. шк., 1989. — 432 с.
6. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М.: Физматлит, 1963. — 236 с.
7. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ: Учеб. пособие / ЛПИ. — Л., 1975. — 218 с. — Гл. 2.
8. Пагурова П. И. Таблицы неполной гамма-функции / ВЦ АН СССР. М., 1963. — 236 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите составные части модели надежности элементов.
2. Назовите законы распределения наработки до отказа, наиболее распространенные в теории надежности.
3. Перечислите основные поправочные коэффициенты, учитывающие условия эксплуатации.
4. Перечислите свойства потоков отказов. Дайте классификацию потоков отказов.
5. Назовите признаки и свойства простейшего потока отказов.
6. Что такое рекуррентный поток отказов, каковы его свойства?
7. Назовите модели восстанавливаемости и диагностирования.
8. Приведите формулы расчета надежности элемента в случае марковской модели.

Глава 4

Надежность последовательных систем

4.1. Основные расчетные соотношения для показателей безотказности

4.1.1. Модели надежности

Систему называют последовательной, если отказ любого ее элемента приводит к отказу системы, а для работоспособности системы необходима работоспособность всех ее элементов. Модель надежности такой системы составляется из моделей надежности ее элементов и некоторых дополнительных допущений об их взаимосвязи.

Одним из центральных при построении модели надежности является вопрос о зависимости или независимости отказов элементов друг от друга. Обычно принимают допущение о независимости отказов как случайных событий. Независимость обеспечивается при проектировании выполнением определенного комплекса правил и приемов разработки электрических, гидравлических, функциональных и других схем. К ним можно отнести использование гальванических развязок, независимых источников питания, блокировок, предохранительных клапанов и пр. Требование независимости отказов — одно из основных в техническом задании на разработку систем.

По различным причинам обеспечить независимость отказов в полной мере удается не всегда, и тогда могут возникнуть зависимости двух типов: стохастическая и функциональная. В первом случае на показатели надежности определенного элемента системы влияют количество других элементов и их состояния. Такая зависимость возникает вследствие перераспределения нагрузки и изменения условий эксплуатации. Во втором случае отказ одного из элементов системы

неизбежно приводит к отказу другого элемента (других элементов) либо немедленно, либо с некоторой задержкой. Тогда могут возникать так называемые каскадные отказы (аварии), развивающиеся в соответствии с «эффектом домино».

В модели надежности восстанавливаемой системы должно быть указано также состояние всех ее элементов после отказа одного из них. Крайними случаями являются следующие: после отказа элемента остальные элементы выключаются и переходят в состояние хранения; после отказа элемента остальные не выключаются и сохраняют те же показатели надежности, что и при работающей системе. Промежуточными являются случаи, когда некоторые или все работоспособные элементы переводятся в облегченный режим работы. Тогда интенсивность отказов элемента уменьшается до величины $\lambda_{a.p} = K_\lambda \lambda$, где K_λ — коэффициент облегчения режима. В общем случае состояние каждого элемента устанавливается индивидуально, но на практике обычно режимы элементов после отказа системы делают одинаковыми. Это происходит либо автоматически в соответствии с электрической схемой и правилами работы средств защиты, либо с участием оперативного персонала.

4.1.2. Понятие о последовательном соединении элементов

В теории надежности последовательную систему называют также системой с последовательным соединением элементов. При этом о соединении элементов говорят как о выражении логической зависимости сложного случайного события A (отказ системы) от составляющих событий A_i (отказы элементов) либо дополнительного события $\bar{A}$ (безотказная работа системы) от составляющих событий $\bar{A}_i$ (безотказная работа элементов).

Связь между указанными событиями можно выразить средствами алгебры событий с помощью операций объединения и пересечения. В соответствии с определением последовательной системы логическая связь имеет вид

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n; \quad \bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n. \quad (4.1)$$

Вместо событий можно использовать индикаторы событий — булевы переменные x_i , принимающие значения «1», если событие произошло, и «0», если не произошло. Для описания логики отказов можно использовать индикаторы безотказной работы (работоспособного состояния) или индикаторы отказов (неработоспособного состояния). В первом случае индикатор $x_i = 1$, если i -й элемент работоспособен, и $x_i = 0$, если неработоспособен. Во втором случае индикатор $y_i = 1$, если элемент неработоспособен, и $y_i = 0$, если работоспособен. Очевидно, что индикаторы связаны соотношением $x_i = y_i$. Используя индикаторы, с помощью операций конъюнкции и дизъюнкции составим логические функции, эквивалентные зависимостям (4.1):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n; \quad G(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n. \quad (4.2)$$

Функцию F называют *логической функцией работоспособности системы* (ЛФРС), а функцию G — *логической функцией неработоспособности системы* (ЛФНС). Функции связаны между собой операцией логического отрицания, поэтому

$$F = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_n; \quad G = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n. \quad (4.3)$$

Метод описания логических связей с помощью алгебры событий или алгебры логики универсален, так как позволяет выразить сколь угодно сложные логические зависимости отказа системы от отказов элементов. Но он не всегда нагляден. Поэтому используют и другие методы.

Графический метод описания логических связей основан на использовании эквивалентной схемы проводимости, или структурной схемы надежности. Здесь каждому работоспособному элементу сопоставляют один эквивалентный элемент цепи с бесконечной проводимостью (нулевым сопротивлением), а неработоспособному элементу — один элемент цепи с нулевой проводимостью (бесконечным сопротивлением). Работоспособному состоянию системы сопоставляется проводящее состояние эквивалентной цепи. Обрыв эквивалентной цепи истолковывается как отказ системы. Пересечению событий в формуле (4.1) соответствует эквивалентная система с последовательным соединением элементов. Это соответствие и объясняет название соединения. Последовательное соединение в структурной схеме надежности вовсе не означает обязательного последовательного электрического соединения. Например, для диодов такое соответствие имеет место (рис. 4.1, а).

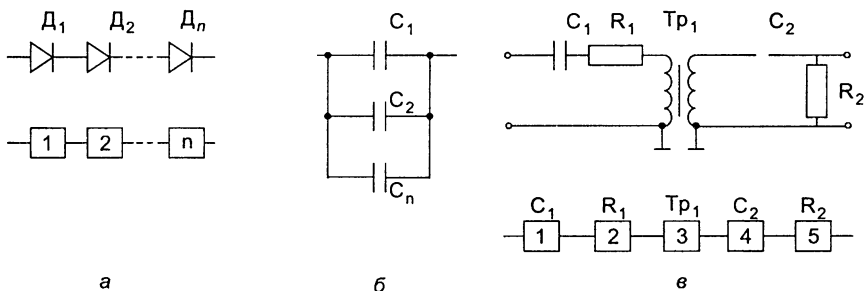


Рис. 4.1. Примеры последовательных систем

Однако для конденсаторов при отказах типа «замыкание» последовательному соединению в структурной схеме соответствует параллельное электрическое соединение (рис. 4.1, б). Может быть и так, что элементы, стоящие рядом в эквивалентной схеме проводимости, вообще не имеют непосредственного электрического соединения, например, как в контуре, содержащем резисторы (R_1, R_2), конденсаторы (C_1, C_2) и трансформатор Tr_1 (рис. 4.1, в). Кроме того, в эквивалентной схеме допускаются любые перестановки элементов в пределах последовательной цепочки (вследствие коммутативности операции умножения), чего нельзя делать в электрической схеме.

Графический способ при всей своей наглядности все же не универсален. В некоторых случаях не удастся сопоставить системе никакой эквивалентной схемы, не используя фиктивных элементов. При разработке модели и анализе надежности обычно используют структурную схему, если с ее помощью удастся правильно

отразить логику отказов системы. Если же не удастся, то переходят к записи логической функции F или G .

4.1.3. Расчетные формулы для показателей безотказности

Пусть для каждого из элементов системы известна функция распределения наработки до первого отказа $F_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, а отказы элементов — независимые события. Тогда вероятность безотказной работы системы можно найти как вероятность произведения независимых событий:

$$P_c(t) = P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = \prod_{i=1}^n P_i(t) = \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t)). \quad (4.4)$$

Выразим вероятность безотказной работы каждого элемента через интенсивность отказов с помощью формулы (1.8). Тогда

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(x) dx\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(x) dx\right) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(x) dx\right), \quad (4.5)$$

где $\lambda_c(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)$ — интенсивность отказов системы. Формула (4.5) справедлива при любых распределениях наработки до отказа, а не только для экспоненциального распределения. Если $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$, то система сохраняет вид распределения своих элементов. Вероятность отказа системы находят по формуле

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - e^{-\lambda_c t}, \quad \lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что средняя наработка до отказа системы

$$\bar{T}_{o.c} = \frac{1}{\lambda_c} = \left(\frac{1}{\bar{T}_{o1}} + \frac{1}{\bar{T}_{o2}} + \dots + \frac{1}{\bar{T}_{on}} \right)^{-1}, \quad (4.7)$$

где $\bar{T}_{oi} = 1 / \lambda_i$ — средняя наработка до отказа i -го элемента. Если все элементы одинаковы, то

$$\bar{T}_{o.c} = \bar{T}_0 / n.$$

Из этой формулы видно, что «равнопрочность» элементов системы не гарантирует высоких показателей ее безотказности. Большое значение имеет и сложность системы, так как средняя наработка до ее отказа уменьшается обратно пропорционально количеству составляющих ее элементов. История развития техники знает немало примеров того, как заблуждения, связанные с непониманием этой зависимости, приводили к весьма серьезным последствиям [1, с. 294].

Система сохраняет вид распределения наработки до отказа элементов и при некоторых неэкспоненциальных распределениях. Так, для распределения Вейбулла

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n \exp(-(\lambda_i t)^m) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n (\lambda_i t)^m\right) = \exp(-(\lambda t)^m),$$

где $\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^m \right)^{1/m}$ — параметр распределения наработки системы до отказа. Отсюда средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_{o.c} = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) / \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^m \right)^{1/m} = 1 / \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{T}_{oi}^m} \right)^{1/m}. \quad (4.8)$$

Если все элементы одинаковы, то $\bar{T}_{oi} = \bar{T}_o$, и тогда

$$\bar{T}_{o.c} = \bar{T}_o / n^{1/m}.$$

Для распределения Рэля (при $m = 2$) средняя наработка до отказа системы убывает обратно пропорционально корню квадратному из количества ее элементов.

При равномерном распределении наработки до отказа в интервале $[a, b]$ вероятность безотказной работы и среднюю наработку до отказа находят по формулам

$$P_c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq b; \\ 1, & t > b; \end{cases} \quad \bar{T}_{o.c} = \frac{b+na}{n+1}; \quad (4.9)$$

Для случаев, когда не удастся получить компактную расчетную формулу типа (4.8) или (4.9), расчет средней наработки до отказа проводят с помощью численной процедуры по формуле (1.12). Если все элементы имеют распределения наработки с возрастающей функцией интенсивности отказов (ВФИ-распределения), то вместо численной процедуры можно использовать приближенные значения, дающие верхнюю и нижнюю оценки точного значения средней наработки,

$$\bar{T}_{o.c}^u = \left(\sum_{i=1}^n (1/\bar{T}_i) \right)^{-1}; \quad \bar{T}_{o.c}^n = \min_{(i)} \bar{T}_i.$$

В полученных здесь формулах предполагается, что известны эксплуатационные значения показателей надежности элементов, в том числе эксплуатационные значения интенсивностей отказов и средней наработки до отказа. Для этого надо знать условия и режимы эксплуатации элементов. На ранних стадиях проектирования это сделать затруднительно, и часто неизвестны не только поправочные коэффициенты из формулы (3.9), но и базовые значения интенсивностей отказов. У такой ситуации есть объективные причины. Во-первых, в новых системах часто используют новые элементы, достоверных данных о надежности которых, полученных в процессе эксплуатации, еще нет. Во-вторых, на ранних стадиях проектирования еще недостаточно хорошо известны условия эксплуатации каждого элемента. В таких случаях при расчетах используют среднегрупповые характеристики и вероятность безотказной работы системы рассчитывают по формуле

$$P_c(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i\right), \quad (4.10)$$

где λ_i — среднегрупповое значение интенсивности отказов элементов i -й группы; n_i — количество элементов i -й группы; r — количество групп. При этом группы

могут принадлежать к различным классам. На завершающих стадиях проектирования проводят уточненный расчет по формулам (3.9), (4.6) и (4.7).

До сих пор в расчетных формулах для вероятности безотказной работы предполагалось, что все элементы работают непрерывно от начала работы системы до ее окончания. В действительности часто бывает так, что в интервале $(0, t)$ элементы имеют различную наработку. Тогда вместо (4.4) надо использовать формулу

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t_{ii}(t)) = \exp\left(-\sum_{i=1}^r \lambda_i t_{ii}(t)\right), \quad (4.11)$$

где $t_{ii}(t)$ — суммарная наработка i -го элемента в интервале $(0, t)$. Если элемент не включался в работу до момента t , то $t_{ii}(t) = 0$. При включении элемента его наработка растет пропорционально календарному времени. Если после этого элемент на некоторое время выключается, то наработка вновь не изменяется. Таким образом, функция $t_{ii}(t)$ состоит из чередующихся отрезков с постоянными и линейно возрастающими значениями наработки. Это приводит к появлению у функции вероятности безотказной работы системы (4.11) точек излома в моменты выключения и включения элементов.

4.2. Нормирование надежности

В техническом задании на разработку такой сложной системы, как АСОИУ, обычно указывают некоторые обобщенные показатели качества функционирования, например экономическую эффективность, рентабельность, оперативность управления, производительность и пр. Достигнутые значения показателей надежности могут существенно влиять на значения обобщенных показателей. Поэтому важно определить вклад надежности в обеспечение заданных значений показателей эффективности. Это достигается через формирование требований к показателям надежности как отдельных подсистем или групп аппаратуры, так и системы в целом. Процесс формирования требований называют *нормированием надежности*, а полученный результат — *нормами надежности*.

Нормирование надежности — процесс многоэтапный. Он основывается на иерархии «система—элемент», согласно которой некоторый комплекс технических средств входит составной частью (элементом в широком смысле) в систему следующего уровня и в то же время сам состоит из некоторой совокупности составных частей, являясь по отношению к ним системой в широком смысле. Так, в пределах функциональной иерархии комплекс технических средств системы управления блоком атомной электростанции (АЭС), с одной стороны, образует подсистему в системе управления АЭС, а с другой — может иметь в своем составе подсистему сбора данных, вычислительную сеть, систему связи, блочные щиты управления и пр. Каждая из этих подсистем и групп аппаратуры имеет в своем составе отдельные компьютеры, автоматизированные рабочие места, магистрали, контроллеры, регуляторы и т. д., но и на одном функциональном уровне иерархии комплекс технических средств является подсистемой более широкой системы, включающей в себя оперативный персонал, программные комплексы, управляемый объект.

На первом этапе нормирования надежности рассматривается весь комплекс технических средств АСОИУ и ставится задача перейти от обобщенных показателей качества функционирования к нормам надежности [2]. В методике решения этой задачи следует различать системы первого и второго типов. В системах первого типа с двумя уровнями качества (с бинарным поведением — все или ничего) выбирают нормируемый показатель надежности и устанавливают зависимость между показателем эффективности и показателем качества. Зависимость может быть выражена в аналитической, табличной или графической форме. Если известны другие данные, определяющие показатель эффективности, можно установить уровень показателя надежности, при котором обеспечивается выполнение требований к показателю эффективности. Для некоторых систем удается найти оптимальное значение нормы надежности, обеспечивающее оптимальное сочетание таких характеристик, как стоимость, габариты, вес, энергопотребление, надежность, производительность и др.

При наличии нескольких уровней работоспособности (уровней качества функционирования) для системы второго типа в целом обычно не устанавливают нормы надежности, а выделяют такие подсистемы, для которых можно установить признаки отказа и которые при дальнейшем анализе рассматриваются как элементы в широком смысле. Как и для систем первого типа, устанавливают зависимость показателя эффективности системы от нормируемых показателей надежности выделенных структурных элементов и с помощью определенной процедуры назначают нормы надежности.

Результаты, полученные на первом этапе нормирования надежности, являются исходными данными для следующих этапов, задача которых состоит в распределении требований к надежности системы между отдельными ее элементами со все возрастающей степенью подробности: от подсистем к устройствам, от устройств к приборам, от приборов к блокам и модулям. На всех этих этапах нормирование надежности проводится по единой методике благодаря использованию понятий «элемент» и «система» в широком смысле. Эта задача целиком решается методами теории надежности. Поэтому рассмотрим ее подробнее.

Требования к надежности могут задаваться в виде нижней границы вероятности безотказной работы в течение заданной наработки, средней наработки до первого отказа системы либо в виде верхней границы вероятности отказа или интенсивности отказов. На начальных этапах проектирования, чтобы убедиться в том, что предъявляемые требования к надежности системы можно выполнить, а также для сравнения различных вариантов компоновки системы, делают прикидочный расчет надежности, при котором нормируют показатели надежности элементов и отдельных составных частей сложной системы.

Формируют требования к надежности элементов при следующих допущениях: все элементы одинаково надежны, интенсивности отказов постоянны, соединение элементов последовательное. Ясно, что надежности практически всех элементов реальной системы различны, поэтому допущения делаются с целью установить уровень надежности некоторого среднего элемента. Расчет интенсивности отказов проводится по формуле

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_c}{n} = \frac{1}{n\bar{T}_{o,c}} < -\ln p^0(t),$$

где $p^0(t)$ — требуемое значение вероятности безотказной работы; n — число элементов в системе. При проектировании аппаратуры не всегда следует выбирать наиболее надежные элементы, так как они, как правило, более дорогие и могут иметь большие вес и габариты, чем менее надежные элементы. Расчет средней интенсивности отказов позволяет сориентироваться при выборе элементов. Чтобы облегчить выбор, в некоторых странах и фирмах-производителях вычислительной техники делаются попытки классифицировать элементы по значениям интенсивности отказов. Так, в США введено четыре класса элементов, от первого (высшего) до четвертого (низшего), а в фирме RCA (США) — семь классов, от первого (высшего) до седьмого (рыночного, или низшего). В связи с большой важностью функций, выполняемых системами управления, для их разработки выбирают элементы, относящиеся к одному из высших классов.

На втором и следующих этапах нормирования надежности происходит детализация состава системы, подсистем, устройств и блоков. Предположение о надежности делают относительно элементов одного класса, одной группы. И на каждом этапе детализации нормируют надежность по функциональной иерархии. Для того чтобы в системе не было слабых мест с точки зрения надежности, целесообразно в основу распределения требований положить принцип учета сложности устройства и важности его функций как части общей задачи, выполняемой системой.

Если система состоит из k устройств с ориентировочным количеством элементов n_i в i -м устройстве ($i = 1, 2, \dots, k$), то нормирование надежности можно проводить на основе формулы (4.4) при $n = k$, где

$$P_i(t) = \exp(-n_i \bar{\lambda}_i t) = \exp(-\lambda_i t),$$

$\lambda_i = \bar{\lambda}_i n_i$ — интенсивность отказов i -го устройства, рассчитанная по средней интенсивности элементов независимо от их класса и группы. При детализации состава и разбиении элементов на классы и группы расчет $P_i(t)$ проводится с помощью формулы типа (4.10):

$$P_i(t) = \exp\left(-\sum_{j=1}^r n_{ij} \bar{\lambda}_{ij} t\right) = \exp(-\lambda_i t),$$

где $\bar{\lambda}_{ij}$ — среднegrupповое значение интенсивности отказов. Важность выполняемых устройством функций можно учесть с помощью весовых коэффициентов, отражающих степень тяжести последствий его отказа. Тогда в формуле (4.4) $P_i(t)$ заменяют на $P_{li}(t)$:

$$P_{li}(t) = a_i P_i(t),$$

и нормы надежности назначают для $P_{li}(t)$. Коэффициент $a_i > 1$ применяется для устройств, имеющих функции повышенной важности, и $a_i < 1$ — в противоположном случае. Коэффициенты a_i должны удовлетворять условию

$$a_1 a_2 \dots a_k = 1.$$

Существуют и иные подходы к нормированию надежности отдельных устройств и подсистем, в частности, подход, предусматривающий оптимизацию норм надежности по экономическим критериям [5]–[7].

4.3. Расчет комплексных показателей надежности

Формулы для расчета показателей надежности группируются в зависимости от типа модели надежности, режима функционирования элементов во время восстановления работоспособности системы, характеристик систем контроля и диагностирования [3], [4], [8]. Рассмотрим далее некоторые варианты моделей.

4.3.1. Марковская модель, идеальный контроль

В марковской модели надежности принимаются следующие допущения:

- 1. Интенсивности отказов элементов постоянны и равны $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$ (рис. 4.2).
- 2. Промежутки времени восстановления работоспособности i -го отказавшего элемента (без учета времени ожидания обслуживания) распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_i .
- 3. Отказы различных элементов являются независимыми событиями.
- 4. В системе существует контроль работоспособности, позволяющий обнаруживать отказы любых элементов практически в момент их возникновения.
- 5. Во время восстановления в отказавшем элементе новых отказов не происходит.

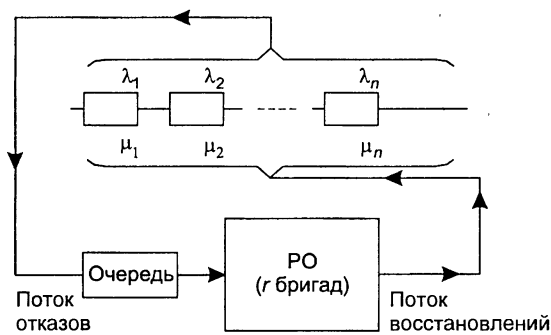


Рис. 4.2. Структура последовательных систем

Допущения о числе ремонтных бригад в ремонтном органе и порядке функционирования работоспособных элементов во время восстановления системы далее будут варьировать.

Нагруженный режим, неограниченное восстановление

После обнаружения отказа в одном из элементов он направляется в ремонтный орган (рис. 4.2), остальные работоспособные элементы не выключаются, хотя система и прекращает функционирование. Поскольку в нагруженном режиме эти элементы могут отказывать с той же интенсивностью, что и при работоспособном состоянии всей системы, во время устранения первого отказа возможны новые отказы. Предположение о неограниченном восстановлении означает, что

имеется возможность параллельного устранения отказов во всех неработоспособных элементах. Поэтому время восстановления каждого элемента не зависит от состояния системы, так как ожидания в очереди на обслуживание нет. Гипотеза о независимости отказов и неограниченное восстановление делают процессы функционирования элементов полностью независимыми как по отказам, так и по восстановлению. Используя формулу (4.1) и теорему умножения для независимых событий, получим следующую формулу для нестационарного коэффициента готовности:

$$K_{г.с}(t) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = K_{г.1}(t) K_{г.2}(t) \cdots K_{г.n}(t),$$

где $\bar{A}_i$ — событие, состоящее в том, что i -й элемент работоспособен в момент t . Подставляя сюда выражение для коэффициента готовности из формулы (3.51), получим:

$$K_{г.с}(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i} e^{-(\mu_i + \lambda_i)t} \right). \quad (4.12)$$

Стационарное значение коэффициента готовности рассчитывается по формуле

$$K_{г.с}(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} \right). \quad (4.13)$$

Нестационарное и стационарное значения коэффициента оперативной готовности находят по формулам типа (1.25):

$$K_{о.г.с}(\tau, t) = \prod_{i=1}^n K_{о.г.}(\tau, t) = K_{г.с}(\tau) e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad (4.14)$$

$$K_{о.г.с}(t) = K_{г.с} e^{-\lambda t}.$$

Чтобы найти среднее время восстановления системы, представим коэффициент готовности в виде (1.24), учитывая, что в данном случае средняя наработка на отказ есть величина, обратная интенсивности отказов λ . Из (1.24) и (4.13) находим:

$$\bar{T}_{в.с} = \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) - 1 \right) / \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (4.15)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что среднее время восстановления также является комплексным показателем надежности, так как зависит как от показателей ремонтпригодности, так и от показателей безотказности элементов системы.

Ненагруженный режим, одна ремонтная бригада

В ненагруженном режиме по сравнению с предыдущей моделью надежности возникают два изменения: после отказа системы работоспособные элементы выключаются до устранения отказа и поэтому не отказывают; в ремонтном органе имеется одна ремонтная бригада. Вследствие ординарности потока отказов рассматриваемая система может находиться в одном из $n + 1$ состояний: 0 — все элементы работоспособны; 1 — первый элемент неработоспособен и находится в ремонте, остальные элементы включены, и т. д.; n — n -й элемент неработоспособен и на-

ходится в ремонт, остальные элементы выключены. При отказе i -го элемента с интенсивностью λ_i происходит переход из состояния 0 в состояние i , а при восстановлении i -го элемента с интенсивностью μ_i — переход из i в 0. Другие переходы невозможны (рис. 4.3).

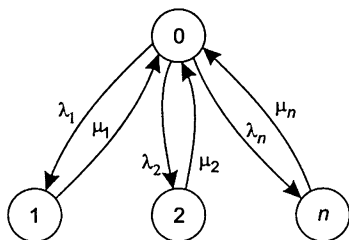


Рис. 4.3. Граф состояний последовательной системы при ненагруженном режиме ($r = 1$)

Составим уравнения для вероятностей $P_i(t)$ того, что система в момент t окажется в состоянии $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Составляем систему алгебраических уравнений Колмогорова в соответствии с графом состояний:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_0 - \sum_{i=1}^n \mu_i p_i = 0, \quad \lambda_i p_0 - \mu_i p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=0}^n p_i = 1.$$

Отсюда находим коэффициент готовности:

$$K_{г.с} = p_0 = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{T}_{ni} \right). \quad (4.16)$$

Представляя (4.16) в виде (1.24), найдем:

$$\bar{T}_{в.с} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} / \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} \bar{T}_{в.и}. \quad (4.17)$$

И здесь среднее время восстановления системы зависит от показателей безотказности элементов. Однако в двух частных случаях эта зависимость отсутствует. При $\mu_i = \mu$ имеем

$$K_{г.с} = \mu / (\mu + \lambda) = 1 / (1 + \lambda \bar{T}_{в.с}); \quad \bar{T}_{в.с} = \bar{T}_{в.и} = 1 / \mu.$$

При $\lambda_i = \lambda_0 = \lambda / n$ имеем:

$$K_{г.с} = 1 / (1 + \lambda \bar{T}_{в.с}); \quad \bar{T}_{в.с} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_n} \right).$$

Коэффициент оперативной готовности находят по формуле (4.14), в которую $K_{г.с}$ следует подставлять из формулы (4.16).

Сравнивая (4.16) и (4.13), видим, что введение ненагруженного режима элементов во время ремонта увеличивает коэффициент готовности, несмотря на меньшее количество ремонтных бригад (одна во второй модели против n в первой). Однако если средняя наработка на отказ значительно больше, чем среднее время восстановления, то разность значений $K_{г.с}$ невелика и имеет порядок $o(\lambda_i / \mu_i)$.

Нагруженный режим. Одна ремонтная бригада

В отличие от предыдущей модели, будем считать, что здесь все элементы имеют одинаковые интенсивности отказов λ и восстановления: $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$. Такое равенство часто наблюдается в логических устройствах, где интегральные микросхемы и логические модули имеют приблизительно одинаковую сложность и одинаково приспособлены к обнаружению и устранению отказов. Система может находиться в одном из $n + 1$ состояний (рис. 4.4): 0 — все элементы работоспособны; 1 — один из элементов (любой) неработоспособен и находится в ремонте, остальные работоспособны и находятся в нагруженном режиме; 2 — два (любых) элемента неработоспособны, один из них находится в ремонте, другой в ожидании обслуживания, и т. д.; n — все n элементов неработоспособны, один из них в ремонте, остальные в очереди на обслуживание.

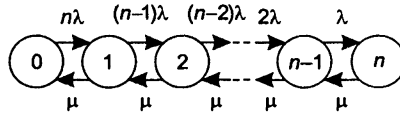


Рис. 4.4. Граф состояний последовательной системы при нагруженном режиме ($r = 1$)

Поскольку в состоянии i работоспособно $n - i$ элементов и каждый элемент имеет интенсивность отказов λ , то переход в состояние $i + 1$ происходит с интенсивностью $(n - i)\lambda$. Переход в состояние $i - 1$ происходит с интенсивностью μ , так как в ремонте всегда находится не более одного элемента. Система алгебраических уравнений для нахождения стационарных вероятностей состояний имеет вид

$$\begin{aligned} -n\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0; \quad (n - i + 1)\lambda p_{i-1} - ((n - i)\lambda + \mu)p_i + \mu p_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1; \\ \lambda p_{n-1} - \mu p_n &= 0, \quad p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из второго уравнения (4.18) находим:

$$(n - i + 1)\lambda p_{i-1} - \mu p_i = (n - i)\lambda p_i - \mu p_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4.19)$$

Цепочка равенств в (4.19) равна нулю, так как при $i = 1$ (4.19) совпадает с первым уравнением в (4.18). Отсюда

$$p_i = (n - i + 1)\rho p_{i-1} = (n - i + 1)(n - i + 2)\rho^2 p_{i-2} = A_n^i \rho^i p_0, \quad \rho = \lambda / \mu, \quad (4.20)$$

где $A_n^i = n! / (n - i)!$ — число размещений из n элементов по i . Подставляя (4.20) в нормировочное условие (4.18), найдем коэффициент готовности:

$$K_{г.с} = p_0 = 1 / \sum_{i=0}^n A_n^i \rho^i. \quad (4.21)$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$K_{г.с} = \frac{\mu^2}{(\mu + \lambda)^2 + \lambda^2}. \quad (4.22)$$

Сравнивая (4.22) с (4.13) при $n = 2$, видим, что уменьшение числа ремонтных бригад с двух в первой модели до одной в данной приводит к появлению второго

слагаемого в знаменателе и к снижению коэффициента готовности на величину порядка ρ^2 . При $n > 2$ разность значений есть величина порядка $n(n-1)\rho^2/2$.

4.3.2. Марковская модель, неидеальный контроль

В каждом элементе могут быть скрытые отказы. Пусть в i -м элементе доля скрытых отказов равна β_i , доля обнаруживаемых системой контроля отказов равна α_i . Время задержки обнаружения скрытых отказов имеет экспоненциальное распределение с параметром v_i . В этом случае граф состояний будет содержать $2n + 1$ состояний (рис. 4.5), из которых n состояний (1, 2, ..., n) со скрытыми отказами и n состояний ($n + 1$, $n + 2$, ..., $2n$), в которых отказ обнаружен и происходит восстановление работоспособности элемента.

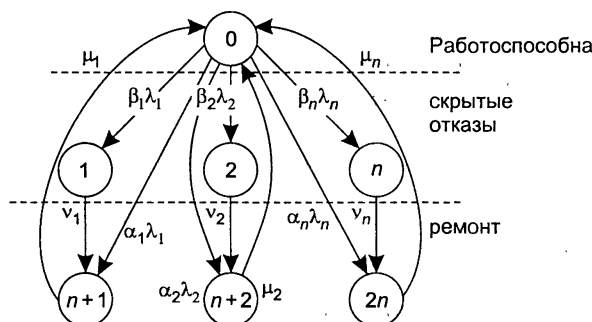


Рис. 4.5. Граф состояний последовательной системы при неидеальном контроле ($r = 1$)

Составим систему алгебраических уравнений относительно стационарных вероятностей состояний:

$$-\lambda p_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i p_{n+i} = 0; \quad \beta_i \lambda_i p_0 - v_i p_i = 0; \quad v_i p_i + \alpha_i \lambda_i p_i - \mu_i p_{n+i} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Отсюда коэффициент готовности

$$K_{г.с} = p_0 = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(1 + \beta_i \frac{\mu_i}{v_i} \right) \right). \quad (4.23)$$

Коэффициент контролируемой готовности

$$K_{к.г.с} = \sum_{i=1}^n p_i = \left(1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\lambda_i}{v_i} \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} \left(1 + \beta_i \frac{\mu_i}{v_i} \right) \right) = \left(1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i \bar{T}_{zi} \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (1 + \beta_i \bar{T}_{zi}) \right), \quad (4.24)$$

где $\mu_i = 1 / \bar{T}_{wi}$, $\bar{T}_{wi}$ — среднее время восстановления i -го элемента; $\bar{T}_{zi} = 1 / v_i$ — средняя задержка обнаружения скрытого отказа в i -м элементе. Как видно из (4.24), при больших $\bar{T}_{zi}$ среднее время восстановления работоспособности

элемента с учетом скрытых отказов $\bar{T}_{wi} + \beta_i \bar{T}_{zi}$ даже при малых β_i может быть существенно больше, чем среднее время собственно ремонта T_{wi} .

Коэффициент оперативной готовности находят по формуле (4.14), в которой $K_{г.с}$ следует рассчитывать по формуле (4.23). Среднее время восстановления работоспособности системы

$$\bar{T}_{в.с} = \frac{1 - K_{г.с}}{K_{г.с}} \bar{T}_{о.с} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \bar{T}_{wi} + \beta_i \lambda_i \bar{T}_{zi} \right); \quad \bar{T}_{zi} = \frac{1}{\nu_i}; \quad \bar{T}_{wi} = \frac{1}{\mu_i}; \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (4.25)$$

При $n = 1$ формулы (4.23)–(4.24) совпадают с формулами (3.53).

4.3.3. Полумарковская модель, идеальный контроль, ненагруженный режим

Граф состояний данной модели, как и граф марковской модели, содержит $n + 1$ состояний (см. рис. 4.3). Интенсивности отказов элементов постоянны и равны λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, однако время восстановления имеет произвольное распределение $F_{wi}(t)$. В этом случае вместо системы алгебраических уравнений используем формулу для расчета стационарных вероятностей состояний полумарковского процесса

$$p_i = \pi_i \tau_i / \sum_{j \in E} \pi_j \tau_j; \quad \pi_i = \sum_{(k)} \pi_k p_{ki}, \quad (4.26)$$

где π_i — стационарные вероятности состояний вложенной марковской цепи (ВМЦ); τ_i — среднее время пребывания процесса в состоянии i ; p_{ki} — вероятности переходов в ВМЦ. Согласно графу состояний (см. рис. 4.3), система уравнений относительно стационарных вероятностей имеет вид

$$\pi_i = \pi_0 p_{0i}; \quad \pi_0 = \sum_{i=1}^n \pi_i; \quad \sum_{i=0}^n \pi_i = 1; \quad p_{0i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}; \quad \tau_i = \bar{T}_{wi}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \tau_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда

$$\pi_0 = \frac{1}{2}; \quad \pi_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.26), получим:

$$K_{г.с} = p_0 = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{T}_{wi} \right); \quad \bar{T}_{wi} = \int_0^{\infty} (1 - F_{wi}(t)) dt. \quad (4.28)$$

Коэффициент оперативной готовности находят по формуле (4.14), а среднее время восстановления работоспособности системы — по формуле (4.25), где $K_{г.с}$ следует взять из формулы (4.28). Формула (4.28) содержит в себе как частный случай формулу (4.16) для марковской модели.

4.3.4. Полумарковская модель, неидеальный контроль, ненагруженный режим

Граф состояний данной модели содержит в себе $2n + 1$ состояний (см. рис. 4.5). Интенсивности отказов элементов постоянны и равны λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, доля скрытых отказов в i -м элементе равна β_i , время задержки обнаружения скрытых отказов

имеет распределение $G_i(t)$, а время восстановления — распределение $F_{вi}(t)$. Составим систему алгебраических уравнений для стационарных вероятностей ВМЦ:

$$\pi_0 = \sum_{i=1}^n \pi_{n+i}; \quad \pi_i = p_{0i} \pi_0; \quad \pi_{n+i} = \pi_i + \pi_0 p_{0, n+i}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{i=0}^{2n} \pi_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{r.c} = p_0 = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^n (\beta_i \lambda_i \bar{T}_{zi} + \lambda_i) \bar{T}_{wi} \right); \tag{4.29}$$

$$\bar{T}_{wi} = \int_0^\infty (1 - F_{wi}(t)) dt, \quad \bar{T}_{zi} = \int_0^\infty (1 - G_i(t)) dt.$$

Из (4.29) при $\beta_i = 0$ получим формулу (4.28), а при $n = 1$ — формулу (3.66). Среднее время восстановления системы находят по формуле (4.25), а коэффициент оперативной готовности — по формуле (4.14), где K_r с рассчитывают по формуле (4.29).

Список литературы

1. Базовский И. Надежность. Теория и практика. — М.: Мир, 1965. — 374 с.
2. ГОСТ 27.003–83. Надежность в технике. Выбор и нормирование показателей надежности. — М.: Изд-во стандартов, 1983. — 18 с.
3. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 5. Проектный анализ надежности / Под ред. В. И. Патрушева и А. И. Рембезы. — М.: Машиностроение, 1988. — 320 с. — Гл. 2.
4. Глазунов Л. П., Грабовецкий В. П., Щербаков О. В. Основы теории надежности автоматических систем управления. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 208 с. — Гл. 2.
5. ГОСТ 14.005–75. Методы расчетов экономической эффективности. — М.: Изд-во стандартов, 1975. — 64 с.
6. Червоный А. А., Лукьященко В. И., Котин Л. В. Надежность сложных систем. — М.: Машиностроение, 1972. — 304 с.
7. Шишопок Н. А., Репкин В. Ф., Барвинский Л. Л. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1964. — 552 с.
8. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ: Учеб. пособие / ЛПИ. — Л., 1975. — 218 с. — Гл. 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие последовательной системы. В чем заключается логика отказов системы?
2. В чем состоит связь показателей надежности системы и ее элементов?
3. Что такое порядок нормирования надежности?
4. Каковы основные положения марковской модели надежности?
5. В чем заключается влияние режима работы, количества ремонтных бригад и полноты контроля на коэффициент готовности системы.

Глава 5

Способы повышения надежности

5.1. Основные этапы и программа обеспечения надежности

Вопросам обеспечения надежности АСОИУ уделяется постоянное внимание на всех этапах жизненного цикла изделия — при проектировании, производстве, эксплуатации и ремонте. Ни одно техническое решение нельзя считать удовлетворительным, как бы хорошо оно ни выглядело в замыслах специалистов, если оно не прошло проверки по критерию надежности. Планирование уровня надежности и реализация этих планов в технических решениях и технической документации происходит при проектировании, проходящем в несколько стадий. К начальным стадиям относят разработку технического задания, технического предложения и эскизного проекта, к заключительным — разработку технического проекта и опытного образца.

При разработке ТЗ выбирают и обосновывают номенклатуру показателей надежности, подлежащих в дальнейшем обеспечению, оценке и подтверждению, устанавливают нормы надежности и объемы испытаний на различных стадиях разработки, включая приемосдаточные и государственные испытания.

При разработке технического предложения определяют требования к надежности комплектующих изделий, исходя из требований к надежности изделия. Кроме того, разрабатывают рекомендации по нормам электрических, климатических и механических нагрузок на элементы изделия, составляют перечни элементов, разрешенных к применению в изделии, с выделением наименее надежных из них. Если какие-либо комплектующие не удовлетворяют требованиям к надежности, то разрабатывают предложения по повышению их надежности или по разработке новых элементов повышенной надежности.

Первые количественные оценки показателей надежности изделия получают на стадии эскизного проектирования в результате ориентировочного расчета по

формулам последовательного соединения с использованием среднегрупповых характеристик надежности элементов. По результатам расчета отбирают варианты выполнения изделия, выбирают наилучшее функционально-конструктивное решение изделия, прорабатывают вопросы его защиты от электрических, климатических и механических перегрузок.

При техническом проектировании особое внимание уделяют рациональной компоновке оборудования, которая должна обеспечить требуемые климатические и механические режимы работы элементов, упростить работу обслуживающего и оперативного персонала по техническому обслуживанию и подготовке системы к работе. В составе технической документации разрабатываются карты режимов, позволяющие установить реальные значения характеристик электрической нагрузки (ток, напряжение, рассеиваемая мощность). На этой стадии впервые удастся оценить показатели ремонтпригодности с учетом особенностей конструкции, системы контроля работоспособности и диагностирования. По уточненным исходным данным проводят уточненную проектную оценку показателей надежности уже с учетом принятых мер по повышению надежности, в том числе с учетом резервирования. При необходимости могут создаваться макеты отдельных агрегатов, узлов и сборочных единиц, испытания которых дают недостающую информацию о надежности изделия.

Для изделий, выпускаемых малыми сериями, а также при серийном и массовом производстве разрабатывают, изготавливают и испытывают опытный образец (опытную серию). Эту стадию также относят к этапу проектирования. Для проверки проектных решений проводят функциональные испытания опытного образца. Возникающие при испытаниях отказы регистрируют и накопленные данные используют для экспериментальной оценки надежности в условиях, имитирующих реальные условия эксплуатации. При изготовлении опытного образца проходит проверку и производственный процесс: по результатам испытаний оценивают влияние технологического процесса на надежность опытного образца, анализируют причины возникших отказов и разрабатывают рекомендации по устранению этих причин. Если причинами отказов являются проектные ошибки или недоработки, то корректируют конструкторскую и технологическую документацию.

На этапе производства важными факторами обеспечения качества и надежности являются точное соблюдение технологического процесса, контроль качества выполнения всех операций, автоматизация производственных процессов, обеспечивающая поддержание высокой стабильности технологических процессов. В условиях высокотехнологичного производства, особенно на предприятиях, производящих информационно-вычислительную технику, достичь высокого уровня качества и надежности техники удастся только при всеобщем внимании к этой проблеме, начиная от руководителя производства и кончая рядовыми исполнителями отдельных производственных операций.

Мировой опыт показывает, что значительный эффект при решении задачи обеспечения качества и надежности дает системная организация работ на основе внедрения международных стандартов серии *ISO 9000*, или *TQM (Total Quality Management)*, разработанных Международной организацией по стандартизации (*International Standard Organization — ISO*).

При отработке производства конкретных изделий изготавливают установочную серию и испытывают изделия этой серии, а затем анализируют и устраняют причины отказов. Уже в процессе серийного или массового производства проводят испытания на надежность, статистический анализ технологических процессов (ТП) и статистическое регулирование ТП.

Заложенный при проектировании и производстве уровень надежности проявляется в процессе применения изделия по назначению только в том случае, если выполняются условия и правила его эксплуатации. В связи с этим большое значение имеют привлечение к эксплуатации высококвалифицированных специалистов, их подготовка и инструктаж по системе эксплуатационной документации: инструкции по эксплуатации (ИЭ), техническому описанию (ТО), инструкции по техническому обслуживанию (ИО), формуляру (ФО), паспорту (ПС) и пр. Обеспечению безотказной работы и высокой готовности технических средств к применению по назначению способствует также инициатива персонала по прогнозированию и своевременному предупреждению отказов. Поэтому высокие показатели надежности, как правило, являются не меньшей заслугой эксплуатационного и оперативного персонала, чем заслуги других специалистов.

Для планирования, организации и контроля мероприятий по обеспечению надежности на всех этапах жизненного цикла изделия разрабатывается и реализуется программа обеспечения надежности (ПОН). Предлагаемые программой организационно-технические мероприятия отражаются в технической документации [9]. При составлении ПОН учитывают требуемый уровень надежности изделия, его сложность, характер и объем производства, условия эксплуатации. В ПОН предусматривается также возможность определения степени соответствия фактического уровня надежности изделия предъявляемым на этапах проектирования, производства и эксплуатации требованиям к его надежности.

ПОН разрабатывается как самостоятельная, полностью завершенная часть технической документации на основе плана программы. План согласуется заказчиком и поставщиком в ходе подготовки заказа и является обязательным для обеих сторон документом. План содержит требования к информации, которая могла бы показать, как поставщик будет обеспечивать заданные количественные характеристики надежности изделия в ходе его разработки и производства. Эти требования учитываются при разработке эскизного и технического проектов. Типовой план ПОН для каждого из трех основных этапов содержит шесть разделов: 1) основные работы по обеспечению надежности; 2) исходные данные и нормативно-техническая и методическая документация; 3) ответственные исполнители; 4) порядок согласования и утверждения программы; 5) контрольные точки проверки выполнения программы; 6) порядок выполнения работ по обеспечению надежности и формы контроля. Эти разделы предусматриваются для пяти стадий этапа проектирования (техническое задание, техническое предложение, эскизный проект, технический проект, опытный образец), двух стадий этапа производства (изготовление установочной серии, установившееся серийное или массовое производство) и пяти стадий этапа эксплуатации (использование по назначению, транспортирование, хранение, техническое обслуживание, ремонт).

В соответствии с требованиями заказчика ПОН может предусматривать представление промежуточных и окончательного отчетов о ходе выполнения программы, содержащих информацию о выполнении каждого пункта плана с указанием достигнутых результатов, в том числе сравнительные таблицы о приемлемом, желательном, перспективном и фактическом уровнях надежности изделия и его элементов. В ПОН рекомендуют учитывать психофизиологические особенности человека-оператора на всех стадиях проектирования, производства и эксплуатации с тем, чтобы свести до минимума вероятность того, что он допустит ошибки, снижающие надежность изделий.

Даже краткое перечисление основных направлений работ по обеспечению надежности показывает, что современная техника обладает обширным арсеналом способов повышения надежности. Чтобы успешнее ориентироваться в их многообразии, полезно эти способы классифицировать. Способы повышения надежности по их назначению можно разделить на четыре группы:

1. уменьшение наработки;
2. снижение интенсивности отказов;
3. улучшение восстанавливаемости;
4. резервирование [1], [2].

Уменьшение наработки и интенсивности отказов (группы 1 и 2) улучшает показатели безотказности и, как следствие, комплексные показатели готовности при неизменных показателях восстанавливаемости. При этом, как следует из формул (4.15), (4.17) и (4.25), одновременно уменьшается и среднее время восстановления системы, непосредственно зависящее от значения коэффициента готовности.

Улучшение восстанавливаемости (группа 3) увеличивает показатели готовности при неизменных показателях безотказности. Резервирование (группа 4) — наиболее действенный и универсальный способ повышения надежности, который позволяет достичь сколь угодно высокого уровня показателей безотказности и комплексных показателей надежности. Согласно известному изречению Дж. Неймана, резервирование позволяет создать сколь угодно надежную систему из сколь угодно ненадежных элементов. Обсудим далее более подробно способы повышения надежности по группам.

5.2.1. Уменьшение наработки

Уменьшение наработки для выполнения определенного объема работ достигается выбором более быстродействующих элементов и высокопроизводительных устройств при проектировании изделия. Если увеличение быстродействия и производительности происходит без увеличения интенсивности отказов, то, согласно формулам, приведенным в главах 3 и 4, показатели безотказности улучшаются.

Уменьшить наработку в некотором календарном периоде времени можно и полным или частичным исключением системы или отдельных ее устройств в паузе между рабочими сеансами, если это не нарушает порядок функционирования системы. Выключение значительной части аппаратуры возможно в таких изделиях, как системы управления технологическими процессами, системы аварийной защиты, системы управления военными объектами, находящимися на боевом дежурстве, и пр.

5.2.2. Уменьшение интенсивности отказов

Способы уменьшить интенсивность отказов весьма разнообразны и затрагивают все этапы жизни системы. Прямое влияние на безотказность последовательной системы имеют количество и качество ее элементов. Улучшить показатели надежности можно за счет комплектации системы элементами повышенной надежности. Использование этого способа основано на том, что промышленность выпускает элементы одинакового назначения, но разной надежности. Статистические данные показывают, что интенсивность отказов элементов одинакового назначения, изготовленных по различным технологиям, может меняться на два-три десятичных порядка (в 100–1000 раз). Следует, однако, иметь в виду, что чем выше надежность элементов, тем сложнее технология их изготовления, строже контроль качества и надежности, а следовательно, выше стоимость. Стоимость может возрасти также в результате выбора более качественных и более дорогих материалов. Даже при одной и той же технологии изготовления системы имеется возможность повысить ее надежность путем отбора элементов по некоторым

параметрам в процессе входного контроля конкретной партии комплектующих изделий на заводе-изготовителе. При этом стоимость отобранных элементов возрастает за счет стоимости забракованных.

Существенного снижения интенсивности отказов можно добиться облегчением режимов работы элементов. В несколько раз можно снизить интенсивность отказов только за счет снижения электрической нагрузки и создания оптимального температурного режима эксплуатации. Большое значение имеет и снижение механических нагрузок ударного и вибрационного типов, в особенности на соединительные элементы. Это достигается в основном конструктивными методами (введением амортизации, жесткого навесного монтажа, укреплением тяжелых элементов конструкции, правильным подбором резонансных частот и пр.). Весьма эффективным методом является герметизация электронного узла или логического модуля путем заливки компаундами или смолами, что превращает узел или модуль в монолит, исключает вибрацию отдельных элементов и предотвращает замыкание электрических цепей.

Следует, однако, иметь в виду, что повышение надежности элементов не может решить все проблемы надежности системы. Система может оказаться недостаточно надежной, даже если все входящие в ее состав ЭРИ будут идеально надежными. Дело в том, что во всех системах имеется немало соединительных элементов (пайки, провода, клеммы, кабели, разъемы), резервы повышения надежности которых невелики. Так, пайка припоем и сварное электрическое соединение имеют интенсивность отказов порядка 10^{-10} ч^{-1} , клеммное соединение — порядка $(2...3) \cdot 10^{-10} \text{ ч}^{-1}$, одно соединение в разъеме — порядка 10^{-8} ч^{-1} . Количество соединений многократно превышает количество ЭРИ. Поэтому возникает весьма существенная нижняя граница интенсивности отказов каждого прибора и изделия в целом.

Учитывая наблюдаемую во многих технических изделиях зависимость отказов от времени (см. рис. 3.1, *a*), очень важно, чтобы период эксплуатации системы совпадал с периодом нормальной работы всех ее элементов. Поэтому проводится доэксплуатационная тренировка элементов и узлов в заводских условиях с тем, чтобы период приработки закончился еще до начала эксплуатации системы. Точно так же важно не допустить эксплуатацию системы в период интенсивного старения ее элементов. Для этого проводится профилактическая замена элементов с признаками старения новыми элементами, прошедшими предварительную тренировку.

5.2.3. Улучшение восстанавливаемости

Улучшение восстанавливаемости системы направлено на уменьшение времени обнаружения, локализации (определение места возникновения) и устранения отказов, а также времени ее подготовки к включению после восстановления работоспособности. Автоматизация процессов обнаружения и локализации отказов и предпусковой подготовки системы существенно снижает время восстановления, оставляя за обслуживающим персоналом лишь операции устранения отказов и наладки. Однако не всегда целесообразно полностью автоматизировать

контроль, так как средства контроля, в свою очередь, обладают конечной надежностью и могут увеличить общий поток отказов системы. Кроме того, при большой доле систем контроля возникает проблема контроля их работоспособности («кто сторожит сторожей?»).

Практика проектирования и эксплуатации АСОИУ показывает, что существуют некоторые оптимальные пропорции между сложностью основной и контрольной аппаратуры, которые подчиняются закономерностям (3.41)–(3.43). Рекомендации для АСОИУ сводятся к тому, что сложность средств контроля в сопоставимых единицах не должна превышать 15–20% от сложности основной аппаратуры. Этим объясняется то, что в большинстве систем многие функции обнаружения и локализации отказов выполняет оператор. Для их выполнения оператору предоставляется некоторая дополнительная информация о системе и обеспечивается возможность оперативного вмешательства в процесс ее функционирования с целью контроля и управления ресурсами системы. Чтобы обнаружение и локализация отказов происходили успешно, необходимо обеспечить оператору условия для длительного слежения за состоянием системы, облегчить необходимую логическую обработку поступающей к нему информации. Это достигается рациональным выбором формы представления информации, упорядочением информационных полей на панелях контроля и управления, созданием других наиболее благоприятных условий восприятия информации и выработки необходимой реакции у оператора. Эти вопросы изучаются и решаются в рамках эргономики — одного из направлений теории автоматизированных систем обработки информации и управления.

Большой резерв сокращения времени восстановления обеспечивает использование модульной конструкции изделия. В этом случае для устранения отказа сменный модуль с отказавшим элементом заменяют работоспособным без ремонта отказавшего модуля. Такой способ восстановления имеет еще одно достоинство. Он позволяет централизовать ремонт аппаратуры, выполняя его на специальных ремонтных базах или заводах-изготовителях, отказаться от использования ремонтного персонала на местах эксплуатации изделий и проводить восстановление силами оперативного персонала. Однако при этом требуется иметь необходимый запас сменных модулей. Большое значение приобретают правильное планирование состава и количества запасных частей в составе запасного имущества и принадлежностей (ЗИП), рациональная организация пополнения начальных запасов.

При подготовке системы к работе после устранения отказа используются те же инструментальные средства (аппаратура и программы), которые предназначены для обнаружения и локализации отказов. Поэтому их автоматизация сокращает и время подготовки системы к работе.

5.2.4. Резервирование (введение избыточности)

Резервированием называют способ обеспечения надежности объекта за счет использования дополнительных средств и возможностей, избыточных по отношению к минимально необходимым при выполнении требуемых функций. Резервирование может использоваться не только для повышения надежности, но и для

повышения точности, устойчивости, достоверности и пр. Иногда вместо термина «резервирование» используют словосочетание «введение избыточности». Между этими понятиями есть много общего, но есть и различия, поэтому их нельзя воспринимать как синонимы. Под избыточностью понимают превышение веса, габаритов, производительности, стоимости и других технико-экономических показателей изделия над минимально необходимыми. Ясно, что введение избыточности не означает автоматического улучшения показателей надежности, достоверности и др. Чтобы улучшение произошло, необходимо соответствующим образом управлять избыточными ресурсами, создать определенные условия и правила их использования, а в некоторых случаях и предусмотреть специальные технические и программные средства актуализации этих ресурсов. Если это выполнено, то введение избыточности становится резервированием, и тогда оба понятия можно условно рассматривать как синонимы.

Виды и методы резервирования довольно разнообразны и зависят как от типа характеристик, которые должны быть улучшены, так и от класса систем, в которых резервирование используется. Для повышения надежности систем управления применяют структурное, функциональное, временное, информационное, алгоритмическое резервирование. Рассмотрим более подробно эти виды резервирования.

5.3. Виды резервирования

Кроме определения, для каждого вида резервирования необходимо установить его особенности, механизмы влияния на надежность изделий, возможность взаимодействия с другими видами резервирования.

5.3.1. Структурное резервирование

Структурным резервированием (СР) называют способ повышения надежности аппаратуры, состоящий в применении в системе дополнительных (резервных) элементов, которые не являются необходимыми для выполнения возложенных на систему функций, но используются системой после отказа основных элементов. Характерной особенностью структурного резервирования является то, что в идеально надежной системе все резервные элементы могут быть удалены из системы без какого-либо ухудшения качества ее функционирования. Они необходимы только тогда, когда появляется принципиальная возможность отказа основных элементов.

В отличие от последовательной системы, в системе со структурным резервом не любой отказ элемента приводит к отказу системы, так как работа системы поддерживается за счет перестройки (реконфигурации) структуры и подключения резервных элементов. Отказ системы наступает только тогда, когда нарушение работоспособности в одном из основных элементов не удастся компенсировать своевременным подключением работоспособного резервного элемента (группы элементов).

Замечательным свойством структурного резервирования, объясняющим его широкое применение, является то, что введение резервной аппаратуры, увеличивая суммарную интенсивность отказов элементов (основных и резервных), существенно уменьшает интенсивность отказов системы. Как следствие, улучшаются и другие показатели надежности. И наоборот, в отличие от последовательной системы, где любое упрощение полезно с точки зрения надежности, в резервированной системе упрощение путем удаления резервных элементов ухудшает показатели надежности. При наличии потока отказов элементов структурное резервирование позволяет обеспечить непрерывную работу системы в течение промежутка времени, во много раз превосходящего среднюю наработку до отказа нерезервированной системы. В системах, состоящих из нескольких одновременно работающих устройств одинаковой производительности, в которых отказ одного из устройств снижает общую производительность системы, структурное резервирование стабилизирует производительность системы.

Для эффективного использования структурного резервирования иногда необходимо привлекать другие виды резервирования, например временное, для того чтобы гарантировать своевременное обнаружение отказов и своевременное подключение резервной аппаратуры. Для этих же целей активно используются информационное и алгоритмическое резервирование.

5.3.2. Функциональное резервирование

Функциональным резервированием называют способ повышения надежности, использующий свойство технических систем (а также живых организмов, биологических и социальных систем) обеспечивать при отказах элементов безотказное функционирование за счет перераспределения функций и более интенсивной работы элементов, выполнявших до отказа только свои основные функции. Выполнять дополнительные функции они способны лишь временно, и это может сопровождаться некоторым ухудшением общего качества работы, но в допустимых пределах. При функциональном резервировании в системе нет «лишних» элементов — они все необходимы для выполнения требуемого набора функций. Характерной особенностью этого вида резервирования является как раз то, что даже из идеально надежной системы нельзя удалить ни одного элемента, не вызвав перераспределения функций элементов и увеличения их функциональной нагрузки уже на постоянной основе, возможно, с переходом на более тяжелые режимы работы.

Применение функционального резервирования обычно сопровождается введением информационной и алгоритмической избыточности.

5.3.3. Временное резервирование (резервирование времени)

Временное резервирование (ВР) — это способ повышения надежности, при котором системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать некоторое время, называемое резервным, для восстановления технических

характеристик. Резерв времени можно израсходовать на переключение структурного резерва, обнаружение и устранение отказов, повторение работ, обесцененных отказами, ожидание загрузки в работоспособном состоянии. Можно указать несколько источников резервного времени [3].

Резерв времени может создаваться за счет увеличения времени, выделяемого системе для выполнения задания и называемого оперативным временем. Он возникает и при создании запаса производительности всей системы или ее отдельных устройств, причем без увеличения оперативного времени. Запас производительности, в свою очередь, возникает при увеличении быстродействия элементов или при комплексировании нескольких устройств (систем) одинаковой или различной производительности для выполнения общего задания.

В системах, результат работы которых оценивается объемом производимого (обрабатываемого) продукта, резерв времени можно создать за счет внутренних запасов выходной продукции. В АСОИУ такой продукцией является информация, в системах энергоснабжения — электрическая энергия, в системах водоснабжения — водные ресурсы, на машиностроительных предприятиях — детали, узлы, приборы и пр. Для хранения запасов предусматриваются специальные накопители: запоминающие устройства, аккумуляторные батареи, резервуары, бункеры и пр. Пока запас не исчерпан, продукция поступает на выход системы, и смежные с ней системы, не «замечая» частичного или даже полного прекращения ее функционирования, считают ее работоспособной.

Еще одним источником резерва времени является функциональная инерционность протекающих в системе процессов. В работе многих технических систем, в том числе АСОИУ, допускаются незначительные перерывы, протекающие без потери качества функционирования (пока управляемые параметры находятся в пределах допусков), которые можно использовать для восстановления ее работоспособности. Такими свойствами обладают системы управления технологическими процессами (АСУ ТП), системы термостатирования, диспетчерского управления, жизнеобеспечения летательных и других подвижных аппаратов и др.

Для систем с временным резервированием (СВР) нарушение работоспособности не обязательно сопровождается отказом системы даже при последовательном соединении ее элементов, так как есть возможность восстановить работоспособность за резервное время. Отказ СВР — событие, заключающееся в нарушении работоспособности, вызывающем недопустимые последствия или не устраненном за допустимое время. Надежность СВР оценивается по результатам выполнения установленных временных ограничений по всей траектории функционирования или по результатам выполнения некоторого задания.

Задание задается последовательностью и объемом работ, установленными моментами начала и завершения этапов работ, ограничениями на использование различных ресурсов, которыми располагает система, ограничениями на взаимопомощь и взаимодействие различных устройств. Поэтому различают задания одноэтапные, многоэтапные, бригадные, индивидуальные (автономные), групповые, поступающие до начала работы системы и в процессе работы (по расписанию или в случайные моменты времени по заявкам). Выполнение задания — это событие,

закключающееся в завершении заданного объема работ с установленными ограничениями на время выполнения всех работ и отдельных их этапов и при выполнении требований к качеству и ритмичности работы системы. Нарушение установленных требований и ограничений рассматривается как срыв функционирования. Поэтому отказ СВР можно определить и как событие, приводящее немедленно или с некоторой задержкой к срыву выполнения задания, к срыву функционирования.

Для установления признаков отказа СВР необходимо вести статистику потерь времени, проводить специальные измерения, например, запасов продукции в накопителях. Структурно в обобщенной форме СВР может рассматриваться как совокупность исходного объекта и резерва времени (рис. 5.1).

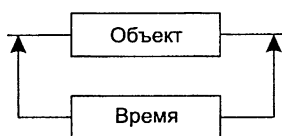


Рис. 5.1. Схема резервирования времени

После отказа объекта начинает действовать резерв времени. Отказы объекта могут различаться по последствиям. Если отказ вызывает лишь задержку выполнения задания, но не приводит к повторению работ, то его называют *необесценивающим* или *неразрушающим*. В противном случае его называют *обесценивающим* или *разрушающим*. Обесценивание выполненных работ может быть полным или частичным. В связи с наличием обесценивающих отказов всю наработку системы разделяют на полезную и обесцененную. Полезной является наработка, не обесцененная отказами объекта. Обесцененная наработка — наработка, не включенная в полезную.

Резервирование времени широко используется в компьютерах, вычислительных сетях, системах связи, в других составных частях АСОИУ. Особенно эффективным является применение временного резервирования для борьбы со сбоями и помехами. Его часто используют и для повышения эффективности других видов резервирования.

5.3.4. Информационное резервирование

В современной технике управления и информационно-вычислительной технике информационная избыточность и информационное резервирование используются для улучшения многих характеристик. Оно влияет на показатели надежности, достоверности обработки и передачи информации, точности вычислений, производительности. Способы введения информационной избыточности весьма разнообразны. Информационная избыточность существует в виде избыточности внутреннего информационного языка устройств обработки и передачи данных, в виде избыточности помехоустойчивых кодов. Ее можно вводить и как избыточность массивов данных в составе файла данных, и как избыточность файловой

структуры в памяти ЭВМ. Можно с уверенностью сказать, что без информационной избыточности в той или иной форме невозможно представить ни один информационный процесс в АСОИУ. Часто без информационной избыточности нельзя использовать другие виды резервирования. Например, структурное резервирование в ИВС требует дублирования информации, хранимой в операционных регистрах и других операционных блоках основного процессора. Аналогичные примеры можно привести и для функционального и временного резервирования. Не останавливаясь на косвенных способах влияния информационной избыточности на показатели надежности, отметим лишь основные способы прямого влияния. Информационная избыточность уменьшает:

- поток отказов системы, так как не все отказы элементов становятся отказами системы; если последствия отказа элемента удастся устранить за счет информационной избыточности, то он не считается отказом системы;
- время восстановления за счет уменьшения объема работ, обесцененных отказом; при этом уменьшается время, затрачиваемое на повторение обесцененной части работ, и увеличивается полезная наработка;
- время восстановления за счет сокращения времени обнаружения и поиска неисправности.

5.3.5. Алгоритмическое резервирование

Для выполнения стоящих перед системой задач необходимо не только иметь некоторый объем информации о характере и условиях выполнения задачи, о процессах, происходящих в системе и окружающей среде, но и обеспечить обработку этой информации в соответствии с алгоритмами функционирования. Каждой системе можно сопоставить алгоритм минимальной сложности. Все прочие алгоритмы, содержащие дополнительное количество операторов, по сравнению с минимальным алгоритмом будут избыточными. Алгоритмическое резервирование вводится для преодоления помех и случайных возмущений, вызванных, в частности, отказами элементов аппаратуры. Оно используется во взаимодействии с другими видами резервирования и в ряде случаев является необходимым условием их реализации.

5.4. Методы структурного и временного резервирования

Методы структурного и временного резервирования решают общую задачу улучшения показателей надежности системы. Они имеют много общих признаков, близкие друг к другу системы классификации и обладают определенной взаимозаменяемостью. Поэтому они рассматриваются здесь совместно.

5.4.1. Методы структурного резервирования

Методы структурного резервирования различаются по масштабу резервирования, соотношению количества основных и резервных элементов, способу включения

резерва, режиму работы резервных элементов и способам подключения резервной аппаратуры [8].

Резервирование называют *общим*, если резервируется вся последовательная система, *раздельным (поэлементным)*, если резервируются отдельные элементы последовательной системы, и *групповым*, если резервируется группа элементов системы. Совокупность основных и резервных элементов, замещающих друг друга при отказе одного из элементов, называют *резервированной группой*. При общем резервировании в системе имеется только одна резервированная группа, при раздельном — столько резервированных групп, сколько элементов в последовательной системе. При групповом резервировании число резервированных групп имеет промежуточное значение. Система со структурным резервом отказывает тогда, когда отказывает хотя бы одна ее резервированная группа. В структурной схеме надежности (эквивалентной схеме проводимости) резервированные группы соединены последовательно, и логика возникновения отказа системы может быть выражена с помощью формул (4.1)–(4.3), а также рис. 4.1. Только в этом случае надо считать, что A обозначает событие — отказ резервированной группы, а элементу цепи на рис. 4.1 соответствует целая резервированная группа. Далее в этом разделе будем рассматривать только резервированную группу.

Скольльзящее резервирование применяют тогда, когда все основные элементы системы одинаковы. Резервные элементы не закрепляются за определенными основными элементами, а могут заменить любой из них.

Основным параметром структурного резервирования является кратность, представляющая собой отношение числа резервных и основных элементов:

$$m_c = m / k,$$

где m — число резервных подсистем; k — число основных подсистем в резервированной группе. Подсистемой здесь названа совокупность основных или резервных элементов, подлежащих замене при отказе хотя бы одного элемента этой совокупности. Из этого определения следует, что все элементы одной подсистемы соединены последовательно. В зависимости от способа резервирования в подсистему входит вся нерезервированная система, группа элементов или один элемент. При $k = 1$ кратность резервирования называют целой, а при $k > 1$ — дробной. В общем случае кратность резервирования в различных резервированных группах одной системы может быть различной. Если же она одинакова, то ее называют кратностью резервирования системы. При резервировании с целой кратностью отказ резервированной группы наступает тогда, когда отказывают все ее подсистемы. Средствами алгебры событий отказ резервированной группы можно выразить с помощью формулы

$$A_i = A_{i0} A_{i1} \cdots A_{im}, \quad (5.1)$$

где A_i — отказ основной подсистемы i -й резервированной группы; A_{ij} — отказ j -й резервной подсистемы i -й резервированной группы. Подставляя (5.1) в (4.1), получим полную формулу для сложного события «отказ системы».

При резервировании с дробной кратностью отказ резервированной группы наступает тогда, когда число отказавших подсистем превышает число резервных подсистем, то есть

$$A_i = B_{i, m+1} \cup B_{i, m+2} \cup \dots \cup B_{m+k}, \quad (5.2)$$

где B_{ij} — событие, состоящее в том, что в i -й резервированной группе неработоспособны j подсистем. При $k = 1$ формула (5.2) совпадает с (5.1).

По способу включения резерва различают *резервирование с постоянно включенным резервом* и с *включением замещением*. При постоянном включении основные и резервные подсистемы функционируют одновременно, начиная с момента включения системы. При включении замещением резервные подсистемы включаются в работу только после отказа основных. До этого они находятся в состоянии хранения (ненагруженный резерв), частично включены (облегченный резерв) или полностью включены (нагруженный резерв). При нагруженном резерве резервная подсистема имеет интенсивность отказов такую же, как основная подсистема: $\lambda_p = \lambda_o$. При ненагруженном резерве интенсивность отказов резервной подсистемы во много раз меньше, чем интенсивность отказов основной подсистемы, так что в расчетах можно считать $\lambda_p = 0$. Облегченный резерв занимает промежуточное положение, когда $0 < \lambda_p < \lambda_o$. Вместо λ_p часто задают коэффициент облегчения резерва $k_\lambda = \lambda_p / \lambda_o$. Ясно, что $0 < k_\lambda < 1$.

Замещение отказавшего основного элемента резервным можно проводить вручную, полуавтоматически или автоматически. В первом случае не требуется никакой аппаратуры переключения, но время переключения довольно велико. При автоматическом переключении используют специальный автомат переключения резерва. Он уменьшает время переключения до нескольких секунд или долей секунд, однако сам обладает конечной надежностью. При полуавтоматическом переключении часть функций выполняет автомат, а другую — оператор.

Для изображения зависимости отказа резервированной группы от отказов элементов наряду с функциями типа (5.1) и (5.2) можно использовать и структурную схему надежности. При резервировании с целой кратностью формуле (5.1) соответствуют схемы рис. 5.2, а или 5.2, б в зависимости от того, используется ли резервирование с постоянным включением или со включением замещением. Аналогичны схемы и при резервировании с дробной кратностью (рис. 5.2, в, г). Скользящему резервированию соответствует схема на рис. 5.2, д. Соединение элементов, выраженное формулами (5.1) и (5.2), а также упомянутыми схемами, называют параллельным соединением.

Комбинируя схемы, изображенные на рис. 5.2 и 4.1, получают различные варианты структурного резервирования с последовательно-параллельным или параллельно-последовательным соединением элементов. В этом определении первым названо внутреннее соединение, а вторым — внешнее. По этой классификации система с общим структурным резервом относится к последовательно-параллельным, а с отдельным резервированием — к параллельно-последовательным соединениям. Рекурсивно можно построить и более сложные схемы, например, последовательно-параллельно-последовательные (рис. 5.2, е) или параллельно-последовательно-параллельные (рис. 5.2, ж) и т. д.

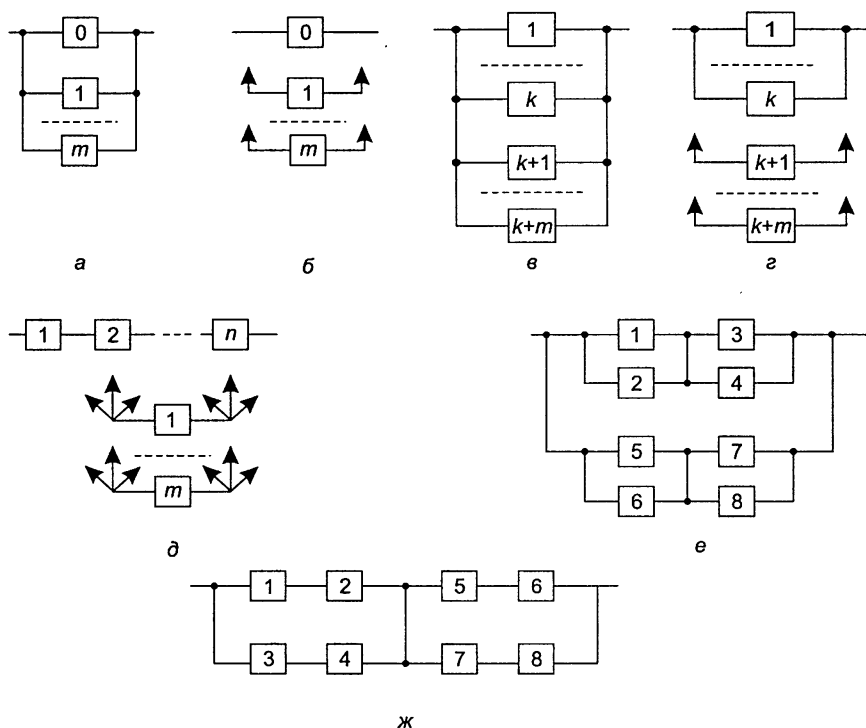


Рис. 5.2. Схемы структурного резервирования

5.4.2. Методы временного резервирования

На методы временного резервирования частично может быть распространена классификация методов структурного резервирования. Среди методов ВР можно выделить *общее, раздельное, групповое, с целой и дробной кратностью* [3]. При общем резервировании созданный резерв времени может быть использован любым элементом системы. При раздельном ВР каждый элемент обеспечивается собственным резервом времени, который не может быть использован другими элементами. При групповом ВР резерв времени предназначается для любого элемента, входящего в данную группу, и не может быть использован элементами вне группы. *Кратность ВР* — это отношение величины резерва времени к минимальному времени выполнения задания. Оно может быть целым или дробным.

По возможности увеличения в процессе функционирования системы с резервом времени (СВР) различают *непополняемый* и *пополняемый резерв времени*. Непополняемый резерв времени создается заранее, до начала работы, и не возрастает при выполнении задания. При работоспособном состоянии всех элементов системы текущее значение резерва времени не меняется, а при отказах элементов может уменьшаться скачкообразно (при обесценивающих отказах) или в линейной зависимости от времени при неработоспособном состоянии системы. Пополняемый резерв возрастает по некоторому закону при работоспособном состоянии всей системы, а также во время восстановления работоспособности

некоторых отказавших элементов. *Мгновенно пополняемый* резерв восстанавливается до исходного уровня скачком сразу же после окончания ремонта. В одной и той же системе могут использоваться оба вида резерва времени — тогда его называют комбинированным или смешанным. При раздельном или групповом резервировании возможны дополнительные ограничения на способ пополнения и использования резерва времени. В этом случае его называют резервом со сложными ограничениями.

Как и при структурном резервировании, по типу структуры различают СВР с последовательным, параллельным, последовательно-параллельным и параллельно-последовательным соединением элементов, а также СВР с сетевой структурой. Однако здесь имеются некоторые особенности. Так, существуют две разновидности последовательного соединения: основное и многофазное. При основном соединении в системе отсутствуют накопители продукции (рис. 5.3, а).

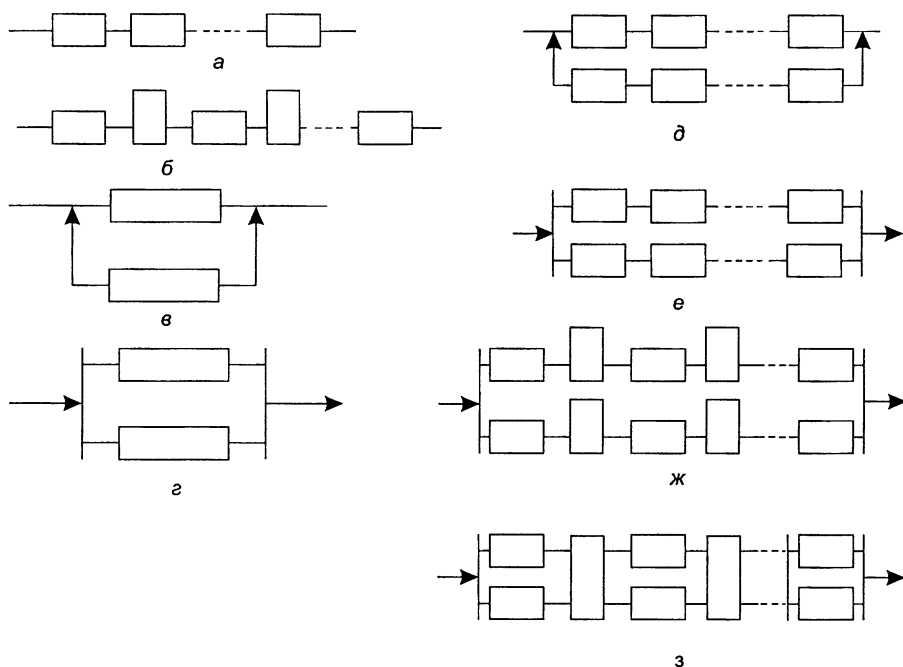


Рис. 5.3. Варианты структур систем с резервом времени

При многофазном соединении в системе есть по крайней мере один накопитель. Число фаз определяют как число накопителей, увеличенное на единицу (рис. 5.3, б). Параллельное соединение также имеет две разновидности: резервное и многоканальное. При резервном соединении имеются четкие различия основных и резервных элементов. Работоспособные основные элементы находятся в работе. Резервные элементы, вне зависимости от режима (нагруженного, ненагруженного, облегченного), не включаются в работу, пока работоспособны основные элементы (рис. 5.3, в). При многоканальном соединении не различают

основные и резервные элементы. Все параллельно включенные элементы участвуют в работе, и результаты их работы так или иначе используют при формировании результатов работы всей системы. Если элементы характеризуются производительностью (пропускной способностью, быстродействием, мощностью и пр.), то в системе с многоканальным соединением элементов может создаваться запас производительности, в отличие от системы с минимально необходимым числом элементов (рис. 5.3, з). Примеры СВР с последовательно-параллельным и параллельно-последовательным соединением элементов приведены на рис. 5.3, д–з. Рекурсивно могут быть построены и более сложные структуры.

5.5. Методы и технология обеспечения надежности программных комплексов

В составе «мягкого оборудования» (software) аппаратно-программных комплексов (АПК) можно выделить три части: математическое (МО), информационное (ИО) и программное обеспечение (ПО). Математическое обеспечение АПК есть совокупность математических моделей, методов и алгоритмов, на основе которых АПК выполняют задачи в соответствии со своим целевым назначением. Информационное обеспечение есть совокупность баз данных (БД) с системами управления (СУБД), файловых структур с каталогами и системами управления, констант и условно-постоянных данных, средств защиты от несанкционированного доступа, средств управления набором данных и других элементов, определяющих формирование, подготовку и условия обработки данных (индикаторы состояний, сигналы дискретных датчиков, управляющие воздействия и пр.). Программное обеспечение АПК реализует его математическое обеспечение и состоит из системного (СПО) и функционального (прикладного) программного обеспечения (ФПО).

Последствия ошибок в различных частях «мягкого оборудования» (потеря функции, снижение качества) не отличаются от последствий отказов технических средств. В этом смысле и говорят об отказах и надежности МО, ИО и ПО. Отказы, порожденные ошибками в МО, проявляются в процессе использования программного комплекса. Поэтому их трудно отличить от отказов ПО. Это часто трудно сделать и по существу, и из-за проблем диагностирования. В связи с этим далее причины отказов МО, ИО и ПО, а также методы их обнаружения, устранения и предупреждения будут рассматриваться совместно.

5.5.1. Основные направления обеспечения надежности программных комплексов

Основными направлениями обеспечения надежности АСОИУ с учетом МО, ИО и ПО являются: корректность (безошибочность) МО, ИО, ПО; отказоустойчивость; параллелизм [4]–[6].

Обеспечение корректности программ и данных

Обеспечение корректности программ и данных означает недопущение ошибок (дефектов) в элементах МО, ИО, ПО до начала их эксплуатации. Программа как результат реализации алгоритмов на языке программирования считается корректной, если она удовлетворяет своим функциональным спецификациям. Чтобы выработать методы повышения показателей корректности, надо проанализировать возможные причины ошибок и факторы, влияющие на уровень показателей.

Основными причинами ошибок в ИО являются необнаруженные при подготовке данных и вводе их в ЭВМ ошибки; ошибки адресации, ошибки в константах (уставки, масштабные коэффициенты), при указании типа операнда, указании текущего состояния; искажения данных, вызванные сбоями в памяти; искажения данных вследствие несанкционированного доступа к ним; необнаруженные ошибки, возникшие при передаче данных по сетям связи, не обнаруженные системой контроля и сохраненные в памяти; необнаруженные при регистрации сигналов от объекта управления (ОУ), а также модификации данных ошибки; отказы и сбои датчиков, установленных на ОУ. Если отказы и сбои не обнаружены системой контроля, то после опроса датчиков возникают ошибочные данные, сохраняемые в памяти.

Причины ошибок в ПО существенно зависят от этапов разработки. Различаются три этапа.

Этап 1. Разработка требований к ПО и процессу его проектирования, выбор алгоритмов выполнения функций.

Этап 2. Реализация алгоритмов на языке программирования.

Этап 3. Отладка элементов ПО и всего АПК в целом до ввода его в эксплуатацию.

На первом этапе, по существу, формируется математическое обеспечение. Поэтому ошибки этапа 1 рассматриваются как ошибки МО. Основными причинами ошибок этого этапа являются нечеткость, неполнота, двусмысленность и противоречивость требований к МО и ПО, приводящие к появлению незамкнутых алгоритмов или алгоритмов с неопределенным поведением на некоторых наборах входных переменных; неправильный выбор структуры ПО и функциональных алгоритмов; неправильное понимание технического задания на проектирование ПО.

Основными причинами ошибок второго этапа являются синтаксические ошибки, допущенные при программировании на конкретном языке, неправильное описание входных и выходных переменных, неправильное применение конструкций языка, неправильное использование организации связи между модулями, неправильная передача параметров от одного модуля к другому; нечеткое и неполное представление о требованиях к сопряжению программ с функционированием аппаратных модулей, с операционными системами, системой управления файлами, библиотеками стандартных программных элементов, некоторые неучтенные особенности нестандартного оборудования; неприемлемая погрешность обработки данных с помощью алгоритмов, допускающих методическую погрешность. Кроме ошибок, имеющих одну из указанных причин, могут возникать системные ошибки, обусловленные несколькими причинами, относящимися к различным

видам обеспечения. Например, при возникновении отказа или сбоя в аппаратуре искажения в данных не обнаруживаются вследствие ошибки в программном модуле, алгоритм последующей обработки из-за ошибки в данных не срабатывает или срабатывает неправильно.

Основными причинами третьего этапа являются: неправильное планирование этапов отладки, несовершенство процедур коррекции (модификации) ПО в процессе отладки после обнаружения ошибки, отклонения в поведении реальных алгоритмов от поведения модельных (эталонных) алгоритмов, отличия характеристик реального объекта управления от модельных характеристик.

Ошибки классифицируются по тяжести последствий и возможности их устранения или *парирования* (так называется процесс восстановления работоспособности путем реконфигурации с изоляцией отказавшего технического или программного модуля или автоматического устранения ошибки в программах или данных). По этому признаку можно различать три класса ошибок:

1. Незначительные ошибки. Эти ошибки проявляются явно или легко обнаруживаются. После обнаружения (проявления) они легко устраняются или парируются, не вызывают деградацию структуры и не обесценивают результатов предыдущей работы.
2. Средние ошибки (ошибки средней тяжести). Эти ошибки после обнаружения или их проявления в процессе выполнения ФСО устраняются или парируются без нарушения временных ограничений. Они могут вызывать частичное обесценивание результатов предыдущей работы и/или снижение качества выполнения функций.
3. Существенные ошибки. К ним относят ошибки, не устранимые без приостановки функционирования СУ, а возможно, и без приостановки технологического процесса в ОУ и не имеющие механизма парирования; ошибки парируемые, но с нарушением временных ограничений.

Методы обеспечения безошибочности данных могут реализовываться при проектировании программных комплексов и применяться непосредственно при их сопровождении и эксплуатации. К таким методам относят применение автоматических процедур проверки корректности данных (например, проверку совместимости элементов структур данных); дублирование работ при подготовке данных; применение средств защиты от несанкционированного доступа; применение корректирующих кодов при передаче данных по сетям связи и при хранении данных.

Методы обеспечения безошибочности программ являются одной из важнейших характеристик технологии программирования. На первом и втором этапах разработки ПО основными методами улучшения показателей безошибочности являются понижение сложности программ; структурирование программных комплексов и оптимальный выбор структурных элементов в соответствии с рекомендациями психологии программирования; широкое применение систем автоматизации проектирования ПО (САПР ПО); формализация технического задания на программирование; применение проблемно ориентированных языков высокого уровня; создание специальной системы организации работ в коллективе программистов.

Основным средством уменьшения числа ошибок, допущенных при проектировании, является отладка ПО. На этом этапе существенную роль играют четкое определение целей и задач каждого этапа отладки, определение оптимальной длительности каждого этапа отладки, создание количественных критериев приостановки этапа отладки, применение средств автоматизации тестирования и отладки, в том числе средств, имитирующих внешнюю среду и реальные условия применения программного обеспечения.

При создании условий для наиболее эффективного выявления ошибок следует иметь в виду, что ПО не отказывает, когда не находится в работе или работает на одних и тех же уже проверенных входных наборах данных. Поэтому следует обеспечить максимальное разнообразие входных наборов, чтобы создавать среду для проявления ошибок и установления их причин. К снижению эффективности отладки приводит недооценка важности регистрации и анализа обнаруженных ошибок.

При модификации ПО в процессе отладки для уменьшения количества новых ошибок следует обеспечить соблюдение установленных правил модификации, максимальную логическую независимость элементов ПО и полное документирование каждого изменения.

Обеспечение отказоустойчивости АПК

Принцип отказоустойчивости как основа методов повышения надежности систем может применяться при организации работ как технических, так и программных комплексов. Отказоустойчивость технических средств обеспечивается путем резервирования и реконфигурации. Для АПК в целом отказоустойчивость означает способность к выполнению всех функций и задач в полном объеме и с надлежащим качеством в условиях возникновения отказов технических средств и проявления программных ошибок. Для обеспечения отказоустойчивости ПО необходимо иметь развитые средства обнаружения и классификации ошибок (дефектов), средства ограничения влияния обнаруженной ошибки, в том числе предотвращения распространения влияния ошибок, средства и процедуры парирования ошибок, средства восстановления работоспособности программ после обнаружения ошибки.

По определению, программа будет отказоустойчивой, если она обеспечивает полезную работоспособность не ниже заданного минимального уровня при наличии собственных программных ошибок и в условиях неблагоприятного влияния на нее окружающей среды, включая некорректные исходные данные и неисправности аппаратуры.

Разработка ПО, нечувствительного к определенным типам ошибок и искажений, считается более перспективным направлением по сравнению с разработкой безошибочных программ. Однако реально при разработке сложных систем оба направления создания надежного ПО сочетаются в определенной пропорции. Более подробно правила обеспечения отказоустойчивости будут изложены далее.

Принцип параллелизма

Принцип параллелизма состоит в том, что в АСОИУ обеспечиваются независимость функционирования различных контуров управления и, как следствие, независимость по отказам контуров управления. Это позволяет сохранить частичную

работоспособность систем и даже добиться сохранения всех функций за счет компенсаторных эффектов при определенных изменениях в функционировании работоспособных контуров управления. Принцип параллелизма может быть реализован в форме многоканального соединения устройств одинакового назначения одинаковой или различной производительности. Здесь он оказывается полезным для повышения надежности, потому что допускает реконфигурацию технических и программных средств в целях исключения неисправных модулей и перераспределения их функций между оставшимися работоспособными модулями. Такое использование последних является разновидностью функционального резервирования и обычно сопровождается снижением показателей качества выполнения функционально самостоятельных операций (ФСО).

5.5.2. Правила обеспечения отказоустойчивости

Проектная задача обеспечения отказоустойчивости системы не сводится только к выбору и реализации некоторой совокупности мероприятий по повышению отказоустойчивости, так как никакая, даже очень развитая, совокупность не является методологически прозрачной, а поэтому трудно уверенно утверждать, что какая-либо конкретная совокупность является достаточной. Прозрачность наступает только тогда, когда сформулировано некоторое небольшое количество ясных, не вызывающих возражений или даже бесспорных правил, которые надо применять при проектировании. Если такие правила найдены и приняты для руководства при проектировании, то ответственному за выполнение программы обеспечения надежности следует лишь проследить за сквозным применением этих правил в разных частях системы и на разных стадиях разработки.

Такие правила существуют для систем различного назначения, в том числе и для АСОИУ, и хорошо известны по отдельности. Задача конкретного проекта состоит в том, чтобы собрать их вместе, систематизировать и превратить в руководство к действию для коллектива разработчиков. Это следующие правила:

- **Правило непрерывности связи СУ и ОУ:** в отказоустойчивой системе связь СУ и ОУ не может прерываться ни по одному из контуров управления при отказе отдельных аппаратурных и/или программных модулей на время, превышающее допустимое значение по технологическим соображениям. Если в технологической системе (объекте управления) использовано дублирование (как в системах безопасности), то связь с каждым из двух дублирующих друг друга технологических каналов должна быть непрерывной.
- **Правило непрерывности связи АПК с операторами системы:** при отказах отдельных модулей АПК связь СУ с операторами не может прекращаться на время, превышающее допустимое значение.
- **Правило мягкого резервирования:** переход от основного комплекта к резервному, вывод из работы для восстановления работоспособности отказавших модулей, возвращение восстановленных или новых модулей (из комплекта ЗИП) происходит без нарушения процесса функционирования других работоспособных модулей либо без нарушения временных ограничений на процесс выполнения программ и подготовки выдаваемой другим модулям информации. Это требование касается не только технических средств: там, где аппаратура рабо-

тает под управлением системного и/или функционального ПО, оно в полной мере распространяется и на поддерживающий работу аппаратуры программный комплекс.

- *Правило сохранения информации:* никакая накопленная к моменту отказа модуля АПК информация не должна теряться или искажаться, и вся информация должна быть доступна в течение времени, определяемого регламентом работы системы или периодом морального старения информации (потери ценности для контроля и управления).
- *Правило инвариантности выхода системы и ее составных частей:* переход от основного комплекта к резервному должен быть безударным по выходу; при работоспособном состоянии обоих комплектов выходные данные и управляющие воздействия из резервного комплекта не должны отличаться от данных и воздействий основного комплекта.
- *Правило контролируемости и реконфигурируемости:* уровень характеристик средств контроля и реконфигурации должен быть согласован с требованиями к надежности так, чтобы эти средства не становились узким местом и не снижали существенно эффективность использования средств повышения надежности.
- *Правило независимости функциональных групп и локальных контуров управления от первичного питания:* общее первичное питание допускается лишь в пределах, обеспечивающих компенсацию потери одного источника питания с помощью управляющих воздействий других контуров измерения и управления.

Практическая реализация правил обеспечения отказоустойчивости включает в себя следующие действия:

1. определение типов и кратностей парируемых неисправностей и программных ошибок;
2. определение допустимых уровней деградации и правил реагирования на возникновение каждого уровня деградации;
3. определение видов и объемов выделяемых ресурсов для обеспечения отказоустойчивости;
4. определение способов и алгоритмов защиты системы контроля и управления от неисправностей и/или программных ошибок различных типов;
5. разработку конкретных технических решений для реализации способов защиты СУ при возникновении различных неисправностей или проявлении программных ошибок определенной кратности в пределах выделенных ресурсов.

5.5.3. Уровни деградации, парируемые неисправности и ошибки

Все выделяемые избыточные ресурсы (аппаратурные, функциональные, программные, временные) делятся на две группы: ресурсы, участвующие в выполнении функций системы при деградации; ресурсы, реализующие механизмы парирования: схемы и программы голосования, средства программного восстановления искаженной или потерянной информации, резервирование времени для выполнения процедур обеспечения отказоустойчивости.

Вторую группу можно разбить на две части: ресурсы, обеспечивающие отказоустойчивость на каждом уровне деградации, и ресурсы, обеспечивающие выполнение процедур деградации. Постепенной деградации подвержены только ресурсы первой группы. К неисправностям, вызывающим деградацию, относятся отказы аппаратуры; сбои в программах, не позволяющие восстановить информацию в автоматическом режиме; проектные ошибки в программах, появившиеся в рабочем режиме. Прочие парируемые неисправности деградации не вызывают.

Деградация ресурсов приводит к следующим результатам: в структурно резервированных подсистемах снижается кратность резервирования; в функционально резервированных подсистемах снижается качество выполнения функциональных операций; при многоверсионном программировании уменьшается количество версий ПО.

По отношению к неисправностям, вызывающим деградацию, применяется единая концепция реагирования, устанавливающая соответствие между последствиями неисправностей и способами использования сохранившихся ресурсов. Выделяют два вида последствий неисправностей: сохранение полного объема функций и продолжение штатного функционирования (штатного режима (ШР)); невозможность сохранения полного объема функций и продолжения штатного функционирования, поэтому происходит переход к одному из нештатных (аварийных) режимов (АР) с сокращенным объемом функций.

Структурное резервирование устройств и подсистем обеспечивает их устойчивость к двум отказам одного и того же типа с переходом после каждого отказа к одной из следующих схем: ШР/ШР, ШР/АР, АР/АР. При деградации типа ШР/ШР/АР обеспечивается продолжение ШР после первого отказа и переход к АР после второго отказа. При деградации типа ШР/АР/АР происходит переход к нештатному режиму после первого отказа и смена одного нештатного режима другим после второго отказа. Например, по отношению к сбоям в программах контроллера без восстановления деградация имеет характеристику ШР/ШР/АР. По отношению к проектным ошибкам ПО обеспечивается деградация типа ШР/АР/АР.

Технические решения по обеспечению отказоустойчивости учитывают существование трех взаимосвязанных уровней:

- ☐ уровень 1, на котором процедуры реагирования позволяют избежать деградации;
- ☐ уровень 2 с докритическим уровнем деградации;
- ☐ уровень 3 при достижении критического уровня.

5.5.4. Уровни защиты от неисправностей

Проектные решения в области надежности определяют для устойчивых неисправностей:

1. уровень и кратность резервирования;
2. процедуру и программно-технические средства реконфигурации, режим ее проведения на каждом уровне деградации;

3. способ и алгоритмы обнаружения отказов в неисправных цепочках путем контроля состояния процессов в ОУ с последующей блокировкой отказавшей цепочки и защитой системы от развития вторичных последствий отказов;
4. способы использования функционального резервирования с помощью других устройств, оперативного персонала, в частности, путем использования дистанционного управления с пульта управления (ПУ) или резервного пульта управления (РПУ), основного щита управления (ОЩУ) или резервного щита управления (РЩУ);
5. типы аварийных режимов, предусмотренных для парирования критических уровней деградации.

Для защиты от сбоев используют:

1. программную и временную избыточность в немajorированных структурах для восстановления потерянной или искаженной информации;
2. маскирование сбоев путем голосования в majorированных структурах;
3. временную избыточность для определения типа неисправности (отказ или сбой).

5.5.5. Методы, средства и процедуры парирования ошибок и неисправностей

Говоря обо всех видах обеспечения технической системы (информационного, математического, программного, технического), можно утверждать, что на практике нельзя создать такое изделие, которое было бы гарантированно свободно от ошибок и дефектов. Нельзя гарантировать и безошибочное функционирование ИО, МО, ПО даже при весьма серьезных усилиях разработчиков на стадии отработки программно-технических решений и отладки ПО. Поэтому важным, если не основным, является использование методов обеспечения нечувствительности МО и ПО к определенным типам ошибок и искажений. Обеспечение свойства отказоустойчивости предполагает решение ряда задач: обнаружение неисправностей и ошибок; локализацию и диагностирование; восстановление процесса функционирования с устранением деградации структуры еще до момента проявления ошибки или искажения. Для решения задач надо выбрать методы, создать средства и процедуры.

Методы обеспечения отказоустойчивости

Мажорирование. Этот вид структурного резервирования применяют для повышения надежности датчиков и реле исполнительных механизмов. Кроме повышения надежности мажорирование решает задачу повышения достоверности информации, маскируя однократные сбои в реальном масштабе времени.

Структурное дублирование аппаратуры. Дублирование применяют для повышения надежности контроллеров, источников питания, головных модулей ввода/вывода, пульта управления (ПУ), рабочих станций, обслуживающих пульт управления. Этот метод резервирования требует существенной программной поддержки для решения задач переключения комплектов, выполнения мягкого

резервирования, безударного по выходу резервирования устройств. В этом случае ПО должно обеспечить выполнение принципа непрерывности связи ПУ с операторами.

Повторное выполнение алгоритмов. Этот метод применяют для парирования обнаруженного сбоя; идентификации типа ошибки (отказ или сбой); обнаружения и маскирования ошибки с помощью последовательного мажорирования.

Функциональное резервирование. Для изделий типа АСОИУ, содержащих программно-аппаратные комплексы, функциональное резервирование — один из наиболее экономичных и эффективных методов обеспечения отказоустойчивости, позволяющий в ряде случаев парировать проектные программные ошибки. К функциональному резервированию можно отнести формирование команд средствами ПУ и специализированной панели управления (например, панели *Magelis*), автоматическое и автоматизированное дистанционное управление исполнительными механизмами (ИМ), резервирование сетей связи (например, *Ethernet — Modbus Plus*), резервирование управления технологическими каналами в объекте управления.

Независимое питание. Этот метод предполагает хранение копий файлов и баз данных в устройствах памяти с независимым питанием.

Информационная избыточность. Этот метод предполагает применение корректирующих кодов с исправлением ошибок при хранении данных в энергетически независимой памяти.

Использование нескольких способов выполнения функции. Этот метод широко применяется в операционных системах. Сюда можно отнести и резервный способ формирования управляющих воздействий с помощью пульта управления и специализированной панели при безотказной работе технических средств.

Многоверсионное программирование. Это весьма распространенный метод, но обычно его применяют только для выполнения очень ответственных функций. К этому методу можно отнести использование различных языков программирования для кодирования одного и того же алгоритма. В таком виде метод применяется в САПР ПО, обычно оснащаемой трансляторами с различных языков программирования.

Последовательное мажорирование аналоговых измерений. Этот метод не только маскирует случайные сбои, но и повышает точность измерений.

Ограничение наборов значений входных переменных. Метод предполагает исключение наборов значений входных переменных, вызывающих проявления ошибок, наборов, не входящих в область допустимых значений, а также некорректных значений входных векторов. Для реализации метода необходима проверка входных векторов на допустимость и корректность.

Средства и процедуры парирования ошибок и неисправностей

Средства и процедуры парирования относятся к ресурсам второй группы (см. 5.5.3). В их состав входят программы мажорирования; программы поддержки идентич-

ности данных (исходных и текущих) для основного и резервного комплексов дублированных устройств. К средствам обеспечения отказоустойчивости здесь следует отнести и выделяемые временные ресурсы, необходимые для выполнения процедур; программы и процедуры, обеспечивающие идентичность всех БД одного назначения путем одновременной их модификации при возникновении изменений в данных; дополнительные объемы памяти для хранения копий файлов, баз данных, для реализации корректирующих кодов; средства и процедуры контроля работоспособности и достоверности (корректности) данных; алгоритмы и процедуры переключения резервных комплектов, сетей связи.

Классификация последствий ошибок и неисправностей

Последствиями ошибок и неисправностей могут быть ухудшение качества выполнения функции системы и деградация ее структуры. В соответствии с изложенным в 5.5.3 выделяют следующие виды последствий:

- без деградации структуры и ухудшения качества; к ним приводят ошибки, обнаруживаемые и парируемые с помощью программных средств без значительных затрат времени;
- с деградацией типа ШР/ШР; к ним приводят отказы технических средств при дублировании и мажорировании, устойчивые искажения данных в одном из резервных комплектов (резервных копий); такой же тип последствий может возникнуть и при функциональном резервировании и многоверсионном программировании; деградация состоит в уменьшении кратности резервирования (потере эффекта резервирования), уменьшении числа версий программ;
- с деградацией типа ШР/АР при возникновении парируемых ошибок и неисправностей с временным переходом на аварийный (нештатный) режим; такой тип деградации возникает, в частности, в нерезервированных цепях на время замены отказавшего модуля работоспособным из комплекта ЗИП без нарушения временных ограничений;
- с деградацией типа ШР/АР при возникновении непарируемых ошибок и неисправностей либо с деградацией типа ШР/АР или АР/АР при возникновении парируемых ошибок и неисправностей с нарушением временных ограничений; примерами ошибок с такого класса последствиями являются программные ошибки при отсутствии других версий программ или отказ модуля при отсутствии запасного модуля в комплекте ЗИП.

Описание процесса

Для каждого типа парируемых средних и серьезных ошибок и неисправностей можно выделить следующие фазы развития процесса: проявление ошибки (неисправности); обнаружение и идентификация; выбор варианта реагирования; процедура устранения или парирования ошибки (неисправности); завершение процедуры и регистрация результатов. При проектировании системы по критериям надежности должны быть созданы средства и процедуры для всех фаз развития процесса и продемонстрирована их работоспособность.

5.5.6. Методы обеспечения сохранности данных

Программный комплекс АСОИУ хранится на тех или иных носителях. Кроме этого при создании системы и в процессе ее эксплуатации подразумеваются интенсивный обмен информацией между элементами системы и ее накопление. Рассмотрим основные методы защиты целостности данных, хранящихся на различных носителях.

К методам защиты целостности данных, используемым в сетевых структурах, относятся следующие: дублирование дисков; зеркальное отображение диска; использование массивов дисков.

Дублирование дисков — это метод обеспечения отказоустойчивости системы, заключающийся в записи одной и той же информации одновременно на два различных жестких диска. При этом для повышения надежности каждый диск снабжается собственным контроллером. Если один диск или контроллер диска выходит из строя, для продолжения работы используется другой.

Зеркальное отображение дисков — это метод обеспечения отказоустойчивости системы, заключающийся в записи одной и той же информации одновременно в два различных раздела жесткого диска или на два различных диска, использующих один и тот же контроллер. Если один диск или раздел диска выходит из строя, для продолжения работы системы используется второй. Возможность зеркального отображения дисков предусмотрена в большинстве сетевых ОС. Однако зеркальное отображение дисков обеспечивает защиту системы лишь на случай отказа одного диска и никак не может заменить плановые мероприятия по созданию резервных копий диска.

Использование массивов дисков подразумевает наличие избыточного блока дисков для хранения данных. Этот способ служит для обеспечения отказоустойчивости системы в случае выхода из строя одного или более дисков. Он состоит в использовании нескольких дисков, объединенных в единый массив. Возможны различные уровни реализации этого способа (в настоящее время используется 5 уровней). Между ними нет существенных различий по скорости или качеству защиты данных. Уровень, который выбирается для конкретной системы, зависит от ее назначения. Альтернативой методу использования массива дисков может служить применение единого дорогого, но высоконадежного диска.

Список литературы

1. Половко А. М. Основы теории надежности. — М.: Наука, 1964. — 401 с. — Гл. 8.
2. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ: Учеб. пособие / ЛПИ. — Л., 1975. — 218 с. — Гл. 4.
3. Черкесов Г. Н., Сухарев М. Г., Морозова В. Н. Надежность систем энергетики и их оборудования: Справ.: В 4 т. Т. 3. Надежность систем газо- и нефтеснабжения. Кн. 1. — М.: Недра, 1994. — 416 с. — Гл. 3.
4. ГОСТ 28195–89. Оценка качества программных средств. Общие положения. — М.: Изд-во стандартов, 1989. — 38 с.

5. *Луцаев В. В.* Качество программного обеспечения. — М.: Финансы и статистика, 1993. — 262 с.
6. *Тейер Т., Липов М., Нельсон Э.* Надежность программного обеспечения. — М.: Мир, 1981. — 326 с.
7. ГОСТ 22771–82. Автоматизированное проектирование. Требования к информационному обеспечению. — М.: Изд-во стандартов, 1982. — 6 с.
8. Надежность в технике. Выбор способов и методов резервирования. Рекомендации Р50-54-82–88. — М.: Изд-во стандартов 1988. — 94 с.
9. Методика. Общие требования к программе обеспечения надежности промышленных изделий / ВНИИС. — М., 1976. — 28 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы назначение и содержание программы обеспечения надежности?
2. Перечислите способы повышения надежности последовательных систем.
3. Перечислите виды резервирования.
4. Что такое структурное резервирование? Назовите его виды.
5. Что такое временное резервирование? Назовите его виды.
6. Что такое функциональное, информационное и алгоритмическое резервирование?
7. Каковы основные способы и правила обеспечения корректности и отказоустойчивости программ и программных комплексов?
8. Перечислите методы обеспечения сохранности данных.

Глава 6

Надежность невосстанавливаемых резервированных систем

6.1. Модели и методы анализа надежности систем с последовательно-параллельным соединением элементов

Если интенсивности отказов элементов постоянны (или кусочно постоянны) и не являются непрерывными функциями времени, то распределения наработки системы до ближайшего изменения состояния будут экспоненциальными. Тогда модель системы будет марковской. Ее особенностью является то, что такая система «не помнит» своей предыстории. Вероятностные характеристики этой системы на некотором отрезке времени зависят только от того, в каком состоянии система находится в начальный момент времени, и не зависят от того, каким образом она пришла в это состояние. Это свойство называют марковским, а момент времени, в котором марковское свойство выполняется, называют *марковской точкой*. В марковской модели каждый момент времени является марковской точкой. Если количество марковских точек конечно или счетно, то модель называют полумарковской. Прочие модели являются немарковскими.

Анализ марковских и полумарковских моделей надежности систем проводят с помощью аппарата теории марковских и полумарковских случайных процессов соответственно. Немарковские модели поддаются анализу только в предположении о независимости отказов элементов системы, так как сводятся к схеме независимых событий (схеме Бернулли) и анализируются с помощью исчисления вероятностей случайных событий. Рассмотрим далее методы анализа надежности применительно к конкретным схемам структурного резервирования.

6.1.1. Исчисление вероятностей в схеме независимых событий

Исчисление вероятностей случайных событий используют в том случае, когда все резервные элементы находятся в нагруженном режиме. Анализ надежности проводят при следующих допущениях:

- в элементах могут возникать внезапные отказы только одного типа (типа «обрыв» или «короткое замыкание»);
- известны функции распределения $F_i(t)$ наработки i -го элемента до отказа;
- отказы различных элементов есть независимые (в совокупности) события;
- отказы в системе обнаруживаются практически в момент их возникновения;
- переключение резерва производится идеальным автоматом переключения, то есть автоматом, срабатывающим мгновенно и безотказно при появлении сигнала об отказе основного элемента.

Рассмотрим теперь частные случаи.

Общее нагруженное резервирование с целой кратностью

Схема с общим нагруженным резервированием с целой кратностью приводится на рис. 5.2, а.

Используя формулу (5.1) и применяя теорему умножения для независимых событий, находим следующее выражение для вероятности отказа системы [1], [3]:

$$Q_c(t) = P(A_0 A_1 \cdots A_m) = P(A_0)P(A_1) \cdots P(A_m) = F_0(t)F_1(t) \cdots F_m(t), \quad (6.1)$$

где $F_0(t)$ и $F_i(t)$ — функции распределения наработки до отказа основного и резервных элементов. Вероятность безотказной работы

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - F_0(t)F_1(t) \cdots F_m(t). \quad (6.2)$$

В частности, при экспоненциальных распределениях наработки

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^m (1 - \exp(-\lambda_i)t). \quad (6.3)$$

Другие показатели надежности можно найти по общим формулам (1.7), (1.8), (1.12). В частности, при одинаковых элементах с интенсивностями отказов $\lambda_i = \lambda$ имеем:

$$a_c(t) = (m+1)\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^m; \quad \bar{T}_{0c} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+1}; \quad (6.4)$$

$$\lambda_c(t) = (m+1)\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^m / (1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}).$$

Общее нагруженное резервирование с дробной кратностью

Схема с общим нагруженным резервированием с дробной кратностью приводится на рис. 5.2, в.

Используя формулу (5.2) и теорему сложения несовместных событий, для случая одинаковых элементов системы, получим следующее выражение для вероятности безотказной работы:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^m C_{k+m}^i (1 - F(t))^{k+m-i} F^i(t), \quad (6.5)$$

где $F(t)$ — функция распределения наработки до отказа одного элемента; C_{k+m}^i — число сочетаний из $k + m$ элементов по i ; i — число неработоспособных элементов. В частности, при экспоненциальных распределениях наработки элементов имеем:

$$P_c(t) = e^{-k\lambda t} \sum_{i=0}^m C_{k+m}^i (1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(m-i)\lambda t}; \quad (6.6)$$

$$a_c(t) = \lambda e^{-k\lambda t} \left((m+k)e^{-m\lambda t} + \sum_{i=1}^m C_{k+m}^i (1 - e^{-\lambda t})^{i-1} e^{-(m-i)\lambda t} ((m+k)(1 - e^{-\lambda t}) - i) \right);$$

$$\lambda_c(t) = \lambda \left((m+k)e^{-m\lambda t} + \sum_{i=1}^m C_{k+m}^i (1 - e^{-\lambda t})^{i-1} e^{-(m-i)\lambda t} \times ((m+k)(1 - e^{-\lambda t}) - i) \right) /$$

$$/ \sum_{i=0}^m C_{k+m}^i (1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(m-i)\lambda t}; \quad \bar{T}_{0c} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^m \frac{1}{k+i}$$

При $k = 1$ формулы (6.6) совпадают с формулами (6.3) и (6.4). Формулу (6.5) легко обобщить на случай различных элементов. Для этого необходимо каждое слагаемое в этой формуле представить как сумму C_{k+m}^i слагаемых, каждое из которых есть произведение вероятностей отказа элементов выбранного подмножества i элементов и вероятностей безотказной работы остальных элементов.

В схемах общего резервирования в качестве структурного элемента может использоваться последовательная система, для которой вероятность безотказной работы находят по формуле (4.4), а интенсивность отказов — по формуле (4.6). Тогда функции $F_i(t)$ и $F(t)$ в формулах (6.2) и (6.5) следует трактовать как вероятность отказов последовательной системы.

Раздельное нагруженное резервирование

При резервировании с целой кратностью система является последовательным соединением n резервированных групп, каждая из которых имеет структуру, приведенную на рис. 5.2, а. В состав i -й группы входят один основной и m_i резервных элементов. Все элементы одной группы одинаковы и имеют одну и ту же функцию распределения наработки до отказа $F_i(t)$. Вероятность безотказной работы i -й группы находят по формуле (6.2) с учетом того, что элементы одинаковы:

$$P_{li}(t) = 1 - F_i^{m_i+1}(t). \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (4.4), найдем вероятность безотказной работы системы:

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n P_{li}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - F_i^{m_i+1}(t)). \quad (6.8)$$

При экспоненциальных распределениях наработки до отказа формула (6.8) приобретает вид

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\lambda_i t})^{m_i+1}).$$

В частности, при $m_i = m$, $\lambda_i = \lambda$ имеем

$$\begin{aligned} P_c(t) &= (1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1})^n; \\ a_c(t) &= n\lambda(m+1)e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^m(1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1})^{n-1}; \\ \lambda_c(t) &= n\lambda(m+1)e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^m / (1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}); \\ \bar{T}_{0c} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^m \frac{1}{(m+1)i+j+1}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

При $n = 1$ формулы (6.9) совпадают с (6.3) и (6.4).

При резервировании с дробной кратностью резервированная группа имеет структуру, приведенную на рис. 5.2, в, с k_i основных и m_i резервных элементов. Вероятность безотказной работы резервированной группы находят по формуле (6.6) при $k = k_i$, $m = m_i$, $\lambda = \lambda_i$. Подставляя (6.6) в (6.8), найдем вероятность безотказной работы системы. При экспоненциальных распределениях наработки до отказа и одинаковых элементах во всех резервированных группах имеем:

$$P_c(t) = e^{-kn\lambda t} \left(\sum_{i=0}^m C_{k+m}^i (1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(m-i)\lambda t} \right)^n. \quad (6.10)$$

В случае мажорирования по схеме «два из трех» $k = 2$, $m = 1$, и тогда формула (6.10) приобретает вид

$$P_c(t) = P^n, \quad P = p^2(1+2q), \quad q = 1 - p = F(t). \quad (6.11)$$

Формула (6.11) верна и при неэкспоненциальных распределениях $F(t)$.

6.1.2. Марковская модель

Основным допущением марковской модели является допущение о постоянстве интенсивности отказов элементов. В этом случае распределение времени до ближайшего изменения состояния системы вследствие отказа какого-либо элемента будет экспоненциальным. Экспоненциальными должны быть распределения и других случайных величин, которые учитываются в модели надежности и могут влиять на изменение состояния системы, например, времени подключения резерва, времени обнаружения отказа, времени реконфигурации структуры. Безусловно, это серьезное ограничение, которого нет в схеме Бернулли. Однако оно всегда выполняется, если техническое изделие находится на участке нормальной эксплуатации (см. рис. 3.1). Вместе с тем, теоретико-вероятностная схема, соответствующая марковской модели, позволяет в значительной степени освободиться от существенного допущения о независимости отказов, принятого в схеме Бернулли. Вместо гипотезы о независимости здесь принимается гипотеза о том, что интенсивность отказов каждого элемента постоянна только при неизменном состоянии системы и может скачкообразно меняться при каждом изменении состояния. Это дает возможность анализировать надежность при

ненагруженном и облегченном резервах, а также при комбинированном резерве, когда в одной и той же системе различные резервные элементы находятся в нагруженном, облегченном и ненагруженном режимах. Для анализа надежности используют математический аппарат теории марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретным пространством состояний.

Основные этапы метода следующие:

1. устанавливают все различные состояния системы, причем каждое состояние системы определяют как некоторую совокупность состояний ее элементов;
2. составляют граф состояний системы как совокупность индексов состояний с указанными с помощью стрелок возможными переходами;
3. на графе состояний указывают интенсивности переходов из одного состояния в другое, равные сумме интенсивностей отказов элементов, вызвавших переход;
4. на графе выделяют подмножества работоспособных E_+ и неработоспособных E_- состояний;
5. для каждого состояния вводят вероятность $P_i(t)$ того, что в момент времени t система окажется в состоянии i ;
6. для вероятностей $P_i(t)$ составляют систему линейных дифференциальных уравнений;
7. выполняют операционное преобразование дифференциальных уравнений по Лапласу—Карсону и находят изображения $P_i^*(s)$;
8. составляют выражения для изображений функции вероятности безотказной работы и вероятности отказа системы:

$$P_c^*(s) = \sum_{i \in E_+} P_i^*(s); \quad Q_c^*(s) = \sum_{i \in E_-} P_i^*(s); \quad (6.12)$$

9. выполняют обратное преобразование в формулах (6.12).

При составлении системы дифференциальных уравнений относительно $P_i(t)$ для каждого состояния определяют два подмножества непосредственно связанных с ним состояний: L_{1i} — подмножество состояний, из которых возможен переход в состояние i , L_{2i} — подмножество состояний, в которые возможен переход из состояния i . Система дифференциальных уравнений имеет вид [2]

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = - \sum_{j \in L_{2i}} \Lambda_{ij} P_j(t) + \sum_{k \in L_{1i}} \Lambda_{ki} P_k(t), \quad i \in E_+. \quad (6.13)$$

Начальные условия имеют следующий вид: $P_0(0) = 1$, $P_i(0) = 0$, $i > 0$.

Проиллюстрируем применение метода марковских процессов к анализу надежности системы с одинаковыми элементами при общем комбинированном резервировании с дробной кратностью. Система состоит из k основных и m резервных элементов, подключаемых автоматически с помощью идеального переключателя, все элементы одинаковы. Резервные элементы могут находиться в любом из трех режимов: нагруженном, облегченном, ненагруженном. При отказе основного элемента один из резервных элементов переходит в рабочий режим, а другие могут изменить свой режим, например, перейти из ненагруженного режима

в облегченный или нагруженный. Кроме того, в элементах, сохранивших свой режим, могут изменяться по определенному закону интенсивности отказов. В соответствии с изложенной ранее последовательностью этапов выделим в системе $m+1$ работоспособное состояние: $0, 1, 2, \dots, m$, где номер состояния совпадает с количеством отказавших элементов. Состояние $m+1$, когда работоспособен только $k-1$ элемент, будет уже неработоспособным. Вследствие ординарности потока отказов в системе возможен переход только в соседнее состояние с номером, на единицу большим. Интенсивность переходов из состояния i в состояние $i+1$ совпадает с суммарной интенсивностью отказов Λ_i всех работоспособных элементов в i -м состоянии. Полученную вероятностную схему называют схемой гибели.

Для схемы гибели система уравнений (6.13) имеет вид

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\Lambda_0 P_0(t); & P'_{m+1}(t) &= \Lambda_m P_m(t); \\ P'_i(t) &= \Lambda_{i-1} P_{i-1}(t) - \Lambda_i P_i(t), & i &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Начальные условия таковы: $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i > 0$.

Операционное преобразование Карсона в (6.14) дает:

$$\begin{aligned} (s + \Lambda_0) P_0^*(s) &= s; & -\Lambda_m P_m^*(s) + s P_{m+1}^*(s) &= 0; \\ -\Lambda_{i-1} P_{i-1}^*(s) + (s + \Lambda_i) P_i^*(s) &= 0, & i &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Если в системе нет резервных ненагруженных элементов, то решение (6.15) относительно $P_{m+1}^*(s)$ можно представить в виде

$$Q_c^*(s) = P_{m+1}^*(s) = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_m}{(s + \Lambda_0)(s + \Lambda_1) \dots (s + \Lambda_m)}. \quad (6.16)$$

Здесь все Λ_i различны, поэтому функция (6.16) имеет только простые полюса: $s_i = \Lambda_i, i = 0 \dots m, s_{m+1} = 0$. Определяя вычеты в простых полюсах, находим:

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = \sum_{i=0}^m e^{-\Lambda_i t} \left/ \prod_{j=0, j \neq i}^m (1 - \Lambda_i / \Lambda_j) \right|. \quad (6.17)$$

Используя формулу (1.12) и тауберovu теорему, найдем выражение для средней наработки до отказа системы:

$$\bar{T}_{0c} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (1 - Q_c^*(s)) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\Lambda_i}. \quad (6.18)$$

Если в системе имеется r элементов в ненагруженном резерве и они расходуются в первую очередь, то интенсивности переходов $\Lambda_i = \Lambda_0$ для $i = 1 \dots r$, и тогда изображение для функции вероятности отказов приобретает вид

$$Q_c^*(s) = \frac{\Lambda_0^{r+1} \Lambda_{r+1} \dots \Lambda_m}{(s + \Lambda_0)^{r+1} (s + \Lambda_{r+1}) \dots (s + \Lambda_m)}. \quad (6.19)$$

Полюс $s_0 = -\Lambda_0$ имеет кратность $r+1$. Вычет в этом полюсе находят по формуле

$$\text{Res}(-\Lambda_0) = \lim_{s \rightarrow -\Lambda_0} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{ds^r} \frac{\Lambda_0^{r+1} \Lambda_{r+1} \dots \Lambda_m}{s(s + \Lambda_{r+1}) \dots (s + \Lambda_m)} e^{st} = -A(t) e^{-\Lambda_0 t}. \quad (6.20)$$

Находя вычеты в простых полюсах функции (6.19) и учитывая (6.20), получим выражение для вероятности безотказной работы системы:

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = A(t)e^{-\Lambda_0 t} + \sum_{i=r+1}^m e^{-\Lambda_i t} / \left(\left(1 - \frac{\Lambda_i}{\Lambda_0} \right) \prod_{j=r+1, j \neq i}^m \left(1 - \frac{\Lambda_j}{\Lambda_i} \right) \right). \quad (6.21)$$

Другой способ получения расчетной формулы состоит в том, чтобы представить формулу (6.19) в виде произведения:

$$Q_c^*(s) = Q_1^*(s)Q_2^*(s); \quad Q_1^*(s) = (\Lambda_0 / (s + \Lambda_0)); \quad Q_2^*(s) = \prod_{i=r+1}^m (\Lambda_i / (s + \Lambda_i)).$$

Произведению изображений в области оригиналов соответствует интеграл типа свертки, функции $Q_1^*(s)$ соответствует распределение Эрланга с параметрами Λ_0 и $r + 1$, функции $Q_2^*(s)$ соответствует функция типа (6.17). Поэтому формулу для вероятности отказа системы находят путем интегрирования:

$$Q_c(t) = \int_0^t Q_2(t-x) \frac{\Lambda_0^{r+1} x^r}{r!} e^{-\Lambda_0 x} dx; \quad (6.22)$$

$$Q_2(t) = 1 - \sum_{i=r+1}^m e^{-\Lambda_i t} / \prod_{j=r+1, j \neq i}^m (1 - \Lambda_j / \Lambda_i).$$

Для каждой конкретной схемы резервирования можно убедиться, что формулы (6.21) и (6.22) приводят к одинаковому результату.

6.1.3. Композиция распределений

Метод композиции распределений используется для анализа надежности систем с общим ненагруженным резервом. Он основан на том, что наработка отказа системы может быть представлена в виде суммы независимых слагаемых:

$$T_{o.c} = T_{01} + T_{02} + \dots + T_{0, m+1},$$

где T_{0i} — наработка до i -го отказа элемента. Согласно формуле (3.8), функция распределения наработки системы до отказа может быть получена как m -кратная свертка распределения $F(t)$ наработки до отказа одного элемента:

$$Q_c(t) = (F(t))^{*(m+1)}, \quad (6.23)$$

где $*$ — знак операции композиции (свертки). При неэкспоненциальном распределении $F(t)$ формула (6.23) соответствует резервированию с целой кратностью. При экспоненциальном распределении она верна также и при резервировании с дробной кратностью. Если в системе есть k основных и m резервных элементов и каждый из них в нагруженном состоянии имеет интенсивность отказов λ , то $F(t) = 1 - \exp(-k\lambda t)$. Тогда с учетом (6.23) получим:

$$Q_c(t) = 1 - \sum_{i=0}^m \frac{(k\lambda t)^i}{i!} e^{-k\lambda t} = I(k\lambda t, m+1), \quad (6.24)$$

где $I(k\lambda t, m+1)$ — неполная гамма-функция с целочисленным параметром.

Распределение Эрланга с параметрами $k\lambda$ и $m + 1$ имеет первый начальный момент — среднюю наработку до отказа

$$\bar{T}_{0,c} = (m + 1) / (k\lambda).$$

Если наработка элемента до отказа имеет распределение Эрланга с параметрами k и λ , то при ненагруженном резервировании с целой кратностью вероятность отказа системы находят по формуле

$$Q_c(t) = I(\lambda t, k(m + 1)). \quad (6.25)$$

В реальных технических проектах возникают схемы резервирования, требующие применения нескольких методов расчета надежности. Некоторые типовые схемы резервирования будут рассмотрены далее.

6.2. Расчет надежности систем с последовательно-параллельной структурой

6.2.1. Принцип декомпозиции

Структурные схемы надежности реальных технических систем могут быть очень сложными. В них одновременно могут использоваться различные способы резервирования: общее и раздельное, нагруженное, облегченное и ненагруженное, постоянное и замещением и т. д. (рис. 6.1). Непосредственный анализ надежности таких систем перебором состояний оказывается весьма затруднительным, если модель марковская, а иногда и невозможным, если модель немарковская. Существенного упрощения задачи анализа и расширения класса систем, поддающихся анализу, можно достичь с помощью принципа декомпозиции.

Принцип декомпозиции состоит в расчленении сложной структуры на ряд более простых и сведении одной сложной задачи к последовательности более простых. Выделяемые при расчленении фрагменты исходной системы должны удовлетворять требованию независимости отказов и могут анализироваться с помощью методов, изложенных в 6.1. В дальнейшем они будут рассматриваться как структурные элементы системы, анализ надежности которой также может быть выполнен с помощью известных методов. Таким образом возникает иерархическая последовательность структурных схем. Каждый элемент первого иерархического уровня рассматривается как система второго уровня. Элементы второго иерархического уровня становятся системами третьего уровня, и так до тех пор, пока не будет рассмотрена вся исходная система.

При декомпозиции рекомендуется следующий порядок действий:

1. Определить тип внешнего соединения (последовательное или параллельное). Внешним является соединение, которое соответствует внешней операции в логической функции работоспособности системы (ЛФРС).

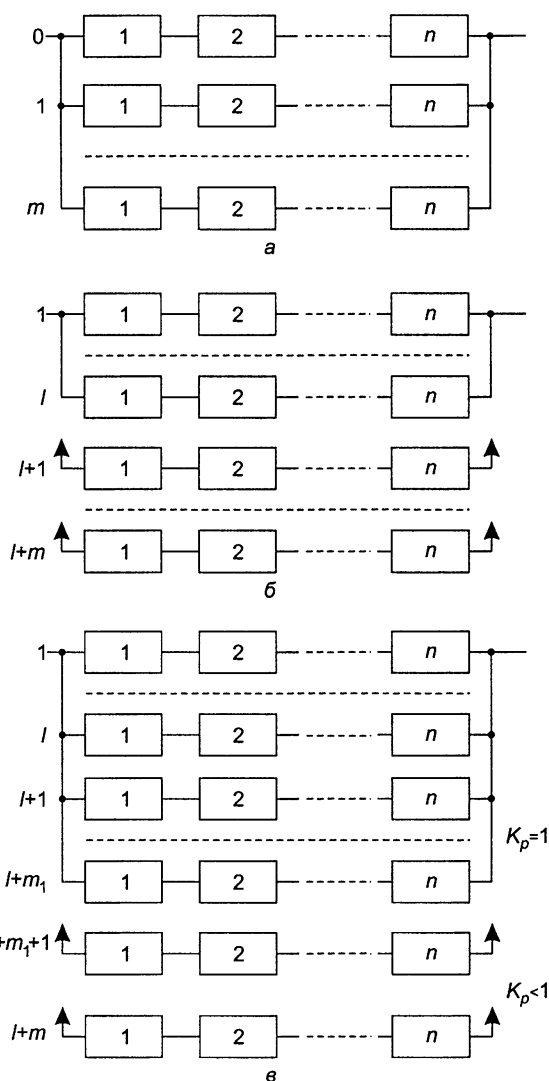


Рис. 6.1. Структурные схемы общего резервирования: а — нагруженное резервирование; б — ненагруженное резервирование; в — нагруженное и облегченное резервирование

2. Все подсистемы, имеющие внешнее соединение, заменить элементами первого (высшего) иерархического уровня. При этом исходная структура сводится к одной из структур, изображенных на рис. 4.1 или 5.2.
3. В каждой из систем, являющихся элементами предыдущего уровня, определить тип внешнего соединения.
4. В каждой из систем рассматриваемого уровня выделить части, имеющие между собой установленное в предыдущем пункте соединение и обладающие свойством независимости отказов. Их заменяют элементами данного уровня.

- 5. Действия пп.3 и 4 выполнять до тех пор, пока элементы некоторого уровня не станут элементами исходной системы. Этот уровень становится последним.
- 6. Для каждой из систем низшего уровня определить показатели надежности с помощью методов, изложенных в 6.1. Их рассматривают как показатели надежности элементов системы следующего, более высокого иерархического уровня.
- 7. Поскольку элементы системы более высокого уровня соединены по одной из схем, изображенных на рис. 4.1 или 5.2, то показатели надежности системы находят по тем же правилам, что и в 6. Такое «восхождение» снизу вверх продолжается до тех пор, пока не будут получены показатели надежности исходной системы.

Принцип декомпозиции дает желаемый результат, если все системы нижнего уровня удастся свести к одной из схем, рассмотренных в разделе 6.1. Для иллюстрации применения принципа декомпозиции рассмотрим пример.

Пример 6.1. Для повышения надежности в системе применено структурное резервирование в соответствии с рис. 6.2.

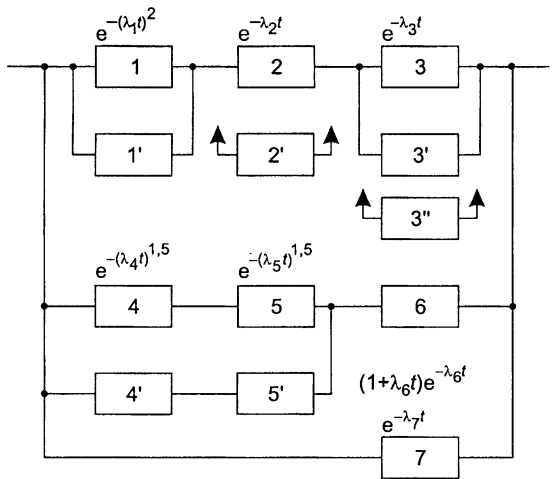


Рис. 6.2. Пример последовательно-параллельной структуры

Элементы 1', 3', 4' и 5' находятся в нагруженном резерве, 3'' — в облегченном с коэффициентом облегчения k_λ , 2' — в ненагруженном резерве. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы, полагая, что

$$\begin{aligned} F_i(t) &= 1 - \exp(-(\lambda_i t)^{m_i}), \quad i = 1 \dots 5, 7; \\ m_1 &= 2, \quad m_2 = m_3 = m_7 = 1, \quad m_4 = m_5 = 1,5; \\ F_6 &= 1 - (1 + \lambda_6 t)e^{-\lambda_6 t}. \end{aligned}$$

Решение. Декомпозиция структуры системы приводит к последовательности структур, изображенных на рис. 6.3.

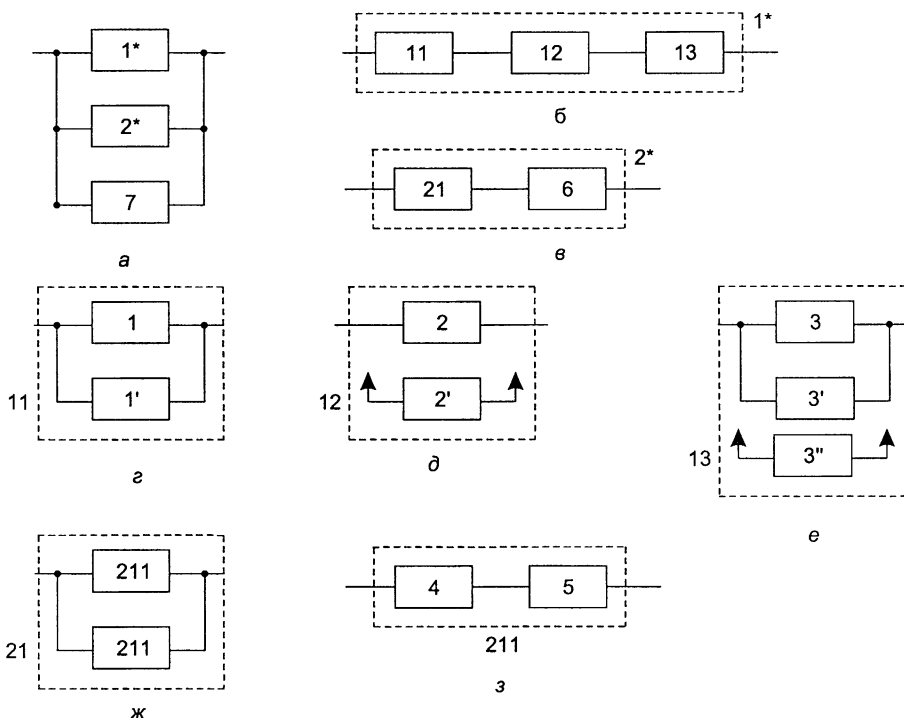


Рис. 6.3. Декомпозиция структуры

Используя формулы (6.2), (6.17) и (6.24), находим:

$$\begin{aligned}
 P_c(t) &= 1 - F_{1*}(t)F_{2*}(t)F_7(t); \quad F_{1*}(t) = 1 - P_{11}(t)P_{12}(t)P_{13}(t); \\
 F_{2*}(t) &= 1 - P_{21}(t)P_6(t); \quad P_{11}(t) = 1 - F_1^2(t); \quad P_{12}(t) = (1 + \lambda_2 t)e^{-\lambda_2 t}; \\
 P_{21}(t) &= 1 - F_{211}^2(t); \quad F_{211}(t) = 1 - P_4(t)P_5(t); \quad P_i(t) = 1 - F_i(t); \\
 P_{13}(t) &= \frac{2}{k_\lambda(1 + k_\lambda)} \exp(-(2 + k_\lambda)\lambda_3 t) - \frac{2 + k_\lambda}{k_\lambda} e^{-2\lambda_3 t} + \frac{2(2 + k_\lambda)}{1 + k_\lambda} e^{-\lambda_3 t}. \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Расчеты по формулам (6.26) нужно проводить, начиная с самого нижнего уровня иерархии (рис. 6.3, ж, д, е, з), затем переходя к более высоким уровням (рис. 6.3, ж, б, в, а).

Применяя принцип декомпозиции, можно найти показатели надежности для основных типовых схем резервирования систем с последовательно-параллельной структурой.

6.2.2. Схемы резервирования систем с последовательно-параллельной структурой

Схемы резервирования различают по следующим признакам: типу модели, режиму резервных элементов, кратности резервирования. По этим признакам можно выделить схемы, речь о которых пойдет далее.

Общее нагруженное резервирование с целой кратностью

Система с общим нагруженным резервированием с целой кратностью (см. рис. 6.1, а) состоит из одной основной подсистемы из n элементов и m нагруженных резервных подсистем, идентичных основной. Элементы в каждой из подсистем соединены последовательно и имеют распределение наработки до отказа $F_i(t)$, $i = 1 \dots n$. Отказы элементов независимы в совокупности. Используя принцип декомпозиции, устанавливают, что внешним соединением элементов в системе является параллельное соединение. Поэтому показатели надежности рассчитывают по формулам (6.1)–(6.4), где функции распределения наработки до отказа основной и резервных подсистем одинаковы и равны $F_0(t) = 1 - P_0(t)$, а вероятность $P_0(t)$ находят по формуле (4.4). После подстановки (4.4) в (6.2) получим:

$$P_c(t) = 1 - (1 - P_0(t))^{m+1}; \quad P_0(t) = \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t)). \quad (6.27)$$

Используя формулу (4.5), найдем зависимость частоты и интенсивности отказов системы от интенсивности отказов элементов:

$$\begin{aligned} a_c(t) &= (m+1)\lambda_0(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda_0(x) dx\right) \left(1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_0(x) dx\right)\right)^m; \\ \lambda_c(t) &= a_c(t) / \left(1 - \left(1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_0(x) dx\right)\right)^{m+1}\right); \\ \lambda_0(t) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(t); \quad \lambda_i(t) = F'_i(t) / (1 - F_i(t)). \end{aligned} \quad (6.28)$$

При постоянных интенсивностях отказов формулы (6.27) и (6.28) приобретают вид

$$\begin{aligned} P_c(t) &= 1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}; \quad a_c(t) = (m+1)\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} (1 - e^{-\lambda_0 t})^m; \quad \lambda_c(t) = a_c(t) / P_c(t); \\ \lambda_0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad \bar{T}_{0c} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

При $m = 1$ схему резервирования называют схемой дублирования.

Общее нагруженное резервирование с дробной кратностью

Система с общим нагруженным резервированием с дробной кратностью (см. рис. 6.1, б) отличается от предыдущей только тем, что в ней работают k основных подсистем. Поскольку в последовательной системе интенсивности отказов суммируются независимо от закона распределения наработки, то интенсивность отказов нерезервированной системы равна $k\lambda_0(t)$. Расчет показателей надежности резервированной системы следует проводить по формулам (6.5) и (6.6) при $F(t) = 1 - P_0(t)$ и $\lambda = \lambda_0$, где $P_0(t)$ определяют по формуле (6.27), а λ_0 — по формуле (6.28). Если использовать марковскую модель, то, согласно (6.17), при $\Lambda_i = (m + k - i) \lambda_0$ вероятность безотказной работы

$$\begin{aligned}
 P_c(t) &= \sum_{i=0}^m \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{k+m-j}{i-j} \exp(-(k+m-i)\lambda_0 t) = \\
 &= C_{k+m}^m \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{k}{k+i} (-1)^i e^{-(k+i)\lambda_0 t}
 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Согласно (6.18), средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_{0c} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \frac{1}{k+i}. \quad (6.31)$$

При $k = 1$ формулы (6.30) и (6.31) совпадают с формулами (6.29).

Формулы (6.5) и (6.6) получены для условий, когда интенсивность отказов элементов не меняется при изменении состояния системы, то есть не зависит от i . Для некоторых систем это может быть не так. Например, после отказа элемента и перераспределения нагрузки между работоспособными элементами интенсивность отказов может возрастать по определенному закону, оставаясь постоянной до следующего изменения состояния. Пусть изменение происходит по линейному закону $\lambda_{0i} = \lambda_0(1 + ai)$. Тогда для расчета вероятности безотказной работы системы следует использовать формулу (6.17) при $\Lambda_i = \lambda_0(1 + ai)(k + m - i)$. После простых преобразований получим:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^m \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{(k+m-j)(1+aj)}{(i-j)(1-a(k+m-i-j))} \exp(-(1+ai)(k+m-i)\lambda_0 t). \quad (6.32)$$

При $a = 0$ формула (6.32) совпадает с (6.30).

Общее ненагруженное резервирование с дробной кратностью

Схема с общим ненагруженным резервированием с дробной кратностью изображена на рис. 6.1, б. При постоянных интенсивностях отказов элементов вероятность безотказной работы рассчитывают по формуле (6.24) при $\lambda = \lambda_0$. Частоту, интенсивность отказов и среднюю наработку до отказа резервированной системы находят по формулам

$$\begin{aligned}
 a_c(t) &= k\lambda_0 \frac{(k\lambda_0 t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-k\lambda_0 t}; \quad \lambda_c(t) = k\lambda_0 \frac{(k\lambda_0 t)^{m-1}}{(m-1)!(1 + k\lambda_0 t + \dots + (k\lambda_0 t)^m / m!)}; \\
 \bar{T}_{0c} &= \frac{m+1}{k\lambda_0}; \quad \lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i.
 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Отсюда следует, что при $m = k - 1$ (например, при $k = 2, m = 1$) средняя наработка до отказа резервированной системы совпадает со средней наработкой одной нерезервированной подсистемы: $\bar{T}_0 = 1/\lambda_0$.

Общее комбинированное резервирование с дробной кратностью

Система с общим комбинированным резервированием с дробной кратностью (см. рис. 6.1, в) состоит из k основных и m резервных подсистем, подключаемых

автоматически идеальным переключателем. Из общего количества m резервных подсистем m_1 подсистем находится в нагруженном, а $m_2 = m - m_1$ — в облегченном резерве с коэффициентом облегчения k_λ . Каждая подсистема состоит из n последовательно соединённых элементов с интенсивностями отказов λ_i , $i = 1 \dots n$. Используя принцип декомпозиции, заменяем подсистему одним структурным элементом с интенсивностью отказов λ_0 . В результате система представлена как параллельное соединение элементов, и для решения задачи расчета ее надежности могут быть использованы марковская модель и формулы (6.17) и (6.18).

При возникновении отказа основного элемента его заменяют нагруженным резервным элементом, но одновременно один из элементов облегченного резерва переводят в режим нагруженного резерва. Так же поступают и при отказе нагруженного резервного элемента. Наблюдение за системой показывает следующее: внешне все выглядит так, что сначала расходуются элементы облегченного резерва и только затем — элементы нагруженного резерва. Поэтому в формуле (6.17) интенсивности переходов принимают значения

$$\Lambda_i = \begin{cases} (k + m_1 + k_\lambda(m_2 - i))\lambda_0, & 0 \leq i \leq m_2; \\ (k + m_1 + m_2 - i)\lambda_0, & m_2 \leq i \leq m = m_1 + m_2. \end{cases} \quad (6.34)$$

Подставляя (6.34) в (6.18), после простых преобразований находим:

$$\begin{aligned} P_c(t) = & \sum_{i=0}^{m_2-1} e^{-(k+m_1+(m_2-i)k_\lambda)\lambda_0 t} \prod_{j=0, j \neq i}^{m_2-1} \frac{k + m_1 + (m_2 - j)k_\lambda}{k_\lambda(i - j)} \prod_{j=0}^{m_1} \frac{k + m_1 - j}{(i - m_2)k_\lambda - i} + \\ & + e^{-(k+m_1)\lambda_0 t} \prod_{j=0}^{m_2-1} \frac{k + m_1 + (m_2 - j)k_\lambda}{k_\lambda(m_2 - j)} \prod_{j=1}^{m_1} \frac{k + m_1 - j}{j} (-1)^{m_1} + \\ & + \sum_{i=1}^{m_1} e^{-(k+m_1-i)\lambda_0 t} \prod_{j=0}^{m_2-1} \frac{k + m_1 + (m_2 - j)k_\lambda}{k_\lambda(m_2 - j) + i} \prod_{j=0, j \neq i}^{m_1} \frac{k + m_1 - j}{i - j} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Первая сумма соответствует состояниям системы, когда расходуются элементы облегченного резерва. Второе слагаемое соответствует состоянию, когда израсходованы все элементы облегченного резерва ($i = m_2$). Третья сумма соответствует состояниям, когда расходуются элементы нагруженного резерва. Второе слагаемое может быть присоединено к первой сумме при $i = m_2$ или к третьей сумме при $i = 0$. В случае нагруженного резерва при $m_2 = 0$ из (6.35) получим формулу (6.30), а при облегченном резерве при $m_1 = 0$ получим:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^m e^{-(k+(m-i)k_\lambda)\lambda_0 t} \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{k + (m - j)k_\lambda}{k_\lambda(i - j)}. \quad (6.36)$$

Из формулы (6.18) с учетом (6.34) находим расчетную формулу для средней наработки до отказа системы:

$$\bar{T}_{0c} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{k + m_1 + ik_\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{1}{k + i}. \quad (6.37)$$

При $m_2 = 0$ формула (6.37) совпадает с (6.31).

Раздельное резервирование

Нагруженное раздельное резервирование рассмотрено в 6.1.1. При ненагруженном раздельном резервировании вероятность безотказной работы рассчитывают по формуле (6.8), где $P_{1i}(t) = 1 - Q_{1i}(t)$, а $Q_{1i}(t)$ находят из (6.24) при $\lambda_0 = \lambda_i$. При комбинированном раздельном резервировании выражение для вероятности $P_{1i}(t)$ находят по формуле (6.35) при $\lambda_0 = \lambda_i$. В частности, при одинаковых кратностях резервирования во всех резервированных группах $k_c = m/k$ вероятность безотказной работы системы

$$P_c(t) = e^{-k\lambda_0 t} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m \frac{(k\lambda_i t)^j}{j!} \right); \quad \lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (6.38)$$

Прочие показатели надежности находят по общим формулам (1.4), (1.7), (1.8) и (1.12) с использованием (6.38).

6.2.3. Основное свойство резервирования. Сравнение способов резервирования

Показатели надежности системы зависят от схемы резервирования, кратности резервирования и режима функционирования резервных элементов. Проанализируем некоторые из этих зависимостей. Для системы с нагруженным резервом с целой кратностью расчет вероятности безотказной работы (ВБР), частоты и интенсивности отказов проводят по формулам (6.27)–(6.30). Отметим некоторые свойства этих показателей. Из графиков (рис. 6.4, а) видно, что при малых значениях $\rho = \lambda_0 t$ ВБР близка к единице, причем величина участка с такими значениями вероятности тем больше, чем больше кратность резервирования.

Эту величину удобно оценивать с помощью квантиля распределения по заданному уровню вероятности p , получаемого как решение уравнения $P_c(\rho, m) = p$. При $p = 0,95$ квантиль $\rho_{0,95} = 0,05$ при $m = 0$; 0,253 при $m = 1$; 0,46 при $m = 2$ и 0,797 при $m = 3$ (в 16 раз больше, чем в нерезервированной системе). При уменьшении вероятности p различия не столь значительны. Так, при $p = 0,5$ квантиль $\rho_{0,5}$ при $m = 3$ лишь втрое больше, чем при $m = 0$.

Эффективность резервирования удобно оценивать по функции выигрыша в надежности по вероятности отказа. При нагруженном резервировании с целой кратностью выигрыш

$$G_Q = Q_c(t, 0) / Q_c(t, m) = 1 / (1 - e^{-\lambda_0 t})^m \approx 1 / \rho^m. \quad (6.39)$$

Выигрыш растет при увеличении кратности резервирования и уменьшении $\rho = \lambda_0 t$. Так, при $\rho = 0,2$ выигрыш $G_Q = 5,5$; 30,2 и 167 для $m = 1, 2$ и 3 соответственно, тогда как при $\rho = 0,5$ он равен, соответственно, 2,5; 6,5 и 16,4. Это значит, что при заданной кратности резервирования выигрыш тем больше, чем более надежной является нерезервированная система. Это свойство характерно не только для конкретной схемы нагруженного резервирования, но и для всех резервированных систем и известно как основное свойство резервирования.

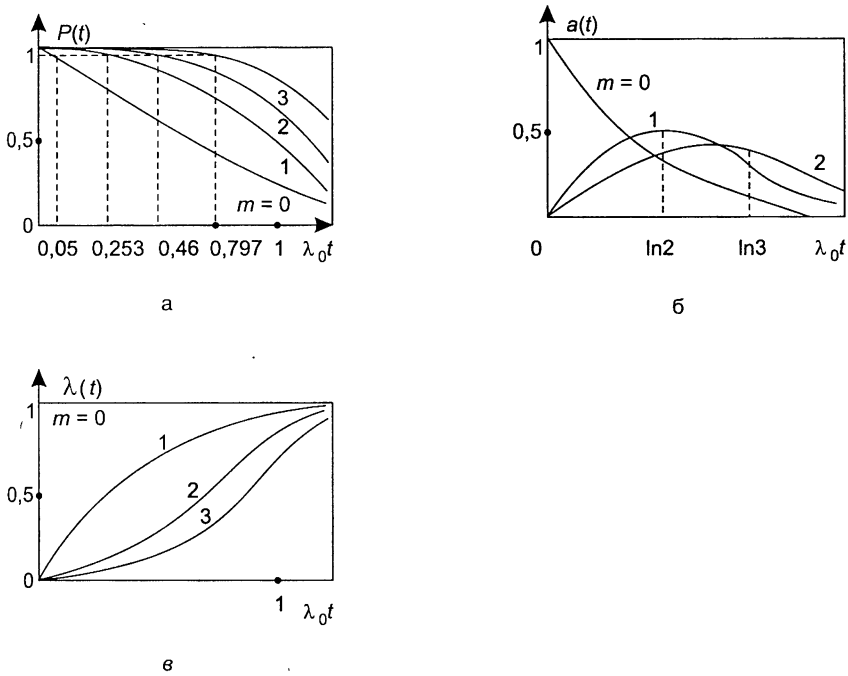


Рис. 6.4. Зависимость показателей надежности системы с нагруженным резервом с целой кратностью от времени

Основное свойство резервирования состоит в том, что эффективность резервирования тем выше, чем более надежной является исходная система. Нетрудно заметить противоречивость этого свойства. Оказывается, что в малонадежных системах, где проблема повышения надежности наиболее остра, резервирование как раз малоэффективно. Поэтому основное свойство резервирования называют еще парадоксом резервирования.

Типовая зависимость частоты отказов системы от времени имеет следующие особенности. В начальный момент времени частота отказов равна нулю при любых схемах структурного резервирования (см. рис. 6.4, б). Распределение наработки — одномодальное, причем значение моды увеличивается с ростом кратности резервирования. При нагруженном резервировании с целой кратностью модальное значение времени $M_0 = \ln(m + 1) / \lambda_0$, а максимальное значение частоты отказов $a_{\max} = \lambda_0 (m / (m + 1))^m$. При увеличении m это значение асимптотически приближается к величине $\lambda_0 / e = \lambda_0 / 2,72$. Число резервных подсистем обычно выбирают так, чтобы оперативный интервал времени полностью находился на начальном участке значений аргумента, когда ВБР не менее заданного значения p , а максимум частоты отказов находился за пределами оперативного интервала.

Типовая зависимость интенсивности отказов системы от времени также имеет характерные особенности (см. рис. 6.4, в). Во-первых, в начальный момент времени интенсивность отказов равна нулю, что объясняется ординарностью потока отказов. С увеличением времени она монотонно возрастает, приближаясь асимптотически к значению $k\lambda_0$ интенсивности отказов нерезервированной системы.

Таким образом, резервированная система всегда является «стареющей», причем «старение» относится не к физической природе отдельных ее элементов, так как в пределах данной модели интенсивности отказов элементов постоянны, а к структуре, которая деградирует со временем неуклонно и необратимо.

В отличие от вероятности отказов системы, которая может уменьшаться при резервировании в десятки и сотни раз даже при небольшой кратности резервирования, средняя наработка системы до отказа увеличивается очень медленно. Максимальный рост средней наработки происходит при ненагруженном резервировании, но и в этом случае зависимость от числа резервных элементов только линейная (см. формулу (6.33)). Наименьшей скоростью роста будет при нагруженном резервировании. Согласно выражению (6.31), при однократном резервировании средняя наработка увеличивается на 50%, а при шестикратном резервировании — всего лишь в 2,45 раза.

При различных значениях выигрыша в надежности по различным показателям возникает вопрос: какой из выигрышей наилучшим образом характеризует эффективность резервирования? Здесь следует обратить внимание на то, что средняя наработка до отказа численно равна площади под кривой зависимости ВБР от времени. При больших t значения ВБР резервированной и нерезервированной систем близки друг к другу (см. рис. 6.4, а). Поэтому общее увеличение площади невелико, хотя на начальном участке значения ВБР значительно различаются. Учитывая, что система всегда имеет ограниченное расчетное время функционирования, не вполне корректно при оценке выигрыша в надежности принимать во внимание то, что происходит за пределами оперативного времени. Именно поэтому среднюю наработку до отказа не следует считать подходящим критерием надежности при сравнении систем, так как из двух систем система с меньшей средней наработкой вполне может иметь большую вероятность безотказной работы. С этой точки зрения весьма примечательны результаты анализа надежности мажорированной системы по схеме «2 из 3». Полагая в (6.11) $F(t) = 1 - \exp(-\lambda_0 t)$, получим:

$$P_c(t) = e^{-2\lambda_0 t} (3 - 2e^{-\lambda_0 t}); \quad a_c(t) = 6\lambda_0 e^{-2\lambda_0 t} (1 - e^{-\lambda_0 t}); \quad (6.40)$$

$$\lambda_c(t) = 6\lambda_0 (1 - e^{-\lambda_0 t}) / (3 - 2e^{-\lambda_0 t}); \quad \bar{T}_{0c} = 5 / 6\lambda_0.$$

Зависимость ВБР от времени приведена на рис. 6.5.

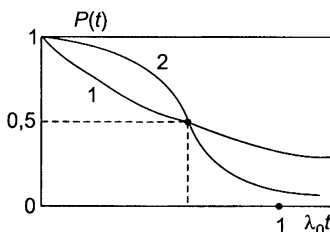


Рис. 6.5. Зависимость вероятности безотказной работы от времени:
1 — нерезервированной; 2 — мажорированной систем

Из графиков видно, что не при любых значениях $\lambda_0 t$ резервирование «2 из 3» улучшает надежность. Это имеет место только на начальном участке, когда $P_c(t) > \exp(-\lambda_0 t)$. Кривые пересекаются в точке $\lambda_0 t = \ln 2 = 0,693$. В этой точке ВБР нерезервированной системы равна 0,5. При других схемах мажорирования критическая точка несколько больше. Так, в схеме «3 из 4» она равна 0,767, а в схеме «4 из 5» — 0,88. Зону выигрыша в надежности удобно проследить по передаточным функциям Шеннона $P_c(p)$ [7, с. 14]. Из (6.40) следует также, что средняя наработка до отказа резервированной системы меньше, чем у резервированной ($\bar{T}_0 = 1/\lambda_0$). Это значит, что выигрыш в надежности по этому показателю отрицательный. Это, однако, не является препятствием для применения схемы мажорирования, так как выигрыш по вероятности отказа при малых $\lambda_0 t$ может быть большим и определяется по приближенной формуле $G_Q = 1/3\rho$, $\rho = \lambda_0 t$. При $\rho = 0,05$ выигрыш равен 6,7.

Сравнивая схемы ненагруженного и нагруженного резервирования, легко установить, что при прочих равных условиях ненагруженное резервирование обеспечивает более высокие показатели надежности. Сравнение можно провести с помощью функции выигрыша в надежности по вероятности отказа как отношения вероятностей отказа при нагруженном и ненагруженном резервировании с одной и той же кратностью. Так, при резервировании с целой кратностью выигрыш определяют по формуле

$$G_Q = \frac{Q_c(t, m, \text{НР})}{Q_c(t, m, \text{ННР})} = (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1} / \left(1 - \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} e^{-\lambda_0 t} \right) \approx (m+1)!$$

В частности, при дублировании $G_Q \approx 2$. Сравнивая общее и отдельное резервирование, можно установить, что при прочих равных условиях более высокие показатели надежности обеспечивает отдельное резервирование. Об этом можно судить по функции выигрыша в надежности по вероятности отказа от перехода к отдельному резервированию. Составляя отношение функций $Q_c(t)$, рассчитанных по формулам (6.8), (6.9), (6.24) и (6.27), получим:

$$G_Q = \begin{cases} n^m, & k_\lambda = 1; \\ n^m / (m+1)!, & k_\lambda = 0. \end{cases}$$

В частности, при дублировании переход от общего к отдельному резервированию уменьшает вероятность отказа в n раз при нагруженном и в $n/2$ раз — при ненагруженном резервировании.

6.2.4. Учет надежности переключателей резерва

Переключатель резерва (ПР) представляет собой логическое устройство, выполняющее функции электронной коммутации и блокировки: на входе он переключает входной сигнал на один из выходов, выбранный из нескольких возможных; на выходе, напротив, он переключает выбранный вход на единственный выход. Функция блокировки состоит в том, что ПР не допускает поступления сигналов на вход и с выхода отказавшего устройства. При параллельной обработке точек

переключения столько, сколько входов и выходов имеет основной элемент. Структура ПР состоит из комбинационной логической схемы собственно переключателя и схемы управления, определяющей момент и направление переключения. Очевидно, что при отказе ПР даже в одной точке переключения не удастся использовать структурный резерв, и поэтому ПР существенно влияет на эффективность структурного резервирования. Поскольку ПР обычно не резервируется, к нему предъявляются повышенные требования по надежности, общий смысл которых состоит в том, что надежность ПР должна быть достаточно высока, чтобы не приводить к существенному снижению эффективности резервирования. Чтобы понять, какими должны быть количественные требования, надо включить ПР в схему расчета надежности системы. Различают два типа отказов ПР: типа «сбой» и типа «устойчивый отказ». В первом случае ПР характеризуется вероятностью p правильного срабатывания ПР при однократном обращении к нему для подключения резерва или для блокировки отказавшего резервного элемента. При устойчивом отказе ПР характеризуется интенсивностью отказов $\lambda_{\text{П}}$. Отказ ПР сам по себе не нарушает работоспособности системы, но проявляется при первом же отказе основного или резервного элемента. Рассмотрим теперь марковские модели надежности системы при общем резервировании с учетом надежности ПР.

Учет отказов ПР типа «сбой»

Рассмотрим сначала два частных случая (дублирование и двукратное резервирование), а затем общий случай комбинированного резервирования. При дублировании система имеет три состояния (0, 1 и 2) с интенсивностями переходов из состояния в состояние $\lambda_{01} = p\Lambda_0$, $\lambda_{02} = q\Lambda_0$, $\lambda_{12} = \Lambda_1$, $q = 1 - p$. Составляя систему дифференциальных уравнений Колмогорова типа (6.13) для вероятностей состояний системы, найдем изображение для вероятности $Q_c(t, m, q)$ отказа системы при наличии m резервных элементов ($m = 1$) и вероятности q несрабатывания ПР:

$$Q_c^*(s, 1, q) = p_2^*(s) = qQ_c^*(s, 0, 0) + pQ_c^*(s, 1, 0) = \frac{\Lambda_0}{s + \Lambda_0} \left(q + p \frac{\Lambda_1}{s + \Lambda_1} \right). \quad (6.41)$$

Обратное преобразование (6.41) дает

$$Q_c(t, 1, q) = 1 - qe^{-\Lambda_0 t} - p \frac{\Lambda_0 e^{-\Lambda_1 t} - \Lambda_1 e^{-\Lambda_0 t}}{\Lambda_0 - \Lambda_1}. \quad (6.42)$$

При двукратном резервировании система имеет четыре состояния (0, 1, 2 и 3) с интенсивностями переходов $\lambda_{01} = p\Lambda_0$, $\lambda_{12} = p\Lambda_1$, $\lambda_{23} = \Lambda_2$, $\lambda_3 = q\Lambda_1$, $i = 0, 1$. Составляя дифференциальные уравнения и выполняя операционное преобразование, получим:

$$\begin{aligned} Q_c^*(s, 2, q) &= p_3^*(s) = qQ_c^*(s, 0, 0) + pqQ_c^*(s, 1, 0) + p^2Q_c^*(s, 2, 0) = \\ &= \frac{\Lambda_0}{s + \Lambda_0} \left(q + p \frac{\Lambda_1}{s + \Lambda_1} \left(q + p \frac{\Lambda_2}{s + \Lambda_2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Отсюда

$$Q_c(t, 2, q) = 1 - qe^{-\Lambda_0 t} - pq \frac{\Lambda_0 e^{-\Lambda_1 t} - \Lambda_1 e^{-\Lambda_0 t}}{\Lambda_0 - \Lambda_1} - p^2 \left(e^{-\Lambda_0 t} / \left(\left(1 - \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1} \right) \left(1 - \frac{\Lambda_0}{\Lambda_2} \right) \right) + \right. \\ \left. + e^{-\Lambda_1 t} / \left(\left(1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right) \left(1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \right) \right) + e^{-\Lambda_2 t} / \left(\left(1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} \right) \left(1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \right) \right) \tag{6.44}$$

В общем случае вероятность отказа системы можно представить в виде

$$Q_c(t, m, q) = \sum_{i=0}^{m-1} Q_c(t, i, 0) + p^m Q_c(t, m, 0), \tag{6.45}$$

где функции вероятности отказа системы $Q_c(t, m, 0)$ при m резервных элементах и идеальном переключателе резерва находят по формуле (6.17).

Учет устойчивых отказов ПР

Система, содержащая m резервных элементов и ненадежный переключатель резерва, может находиться в одном из $2m + 2$ состояний. Кроме состояний $0...m+1$, определенных для системы с идеальным ПР, здесь появляются еще m состояний $i^* = 0^*...(m-1)^*$, в которых ПР неработоспособен и до отказа ПР отказало i^* элементов резервированной системы. Состояние $m + 1$ неработоспособное, остальные состояния — работоспособные. Интенсивности переходов в графе состояний имеют значения $\lambda_{i, i+1} = \Lambda_i, i = 0...m, \lambda_{i i^*} = \lambda_{\backslash ef}, i = 0...m - 1, \lambda_{i^*, m+1} = \Lambda_i, \lambda_{m, m+1} = \Lambda_m$.

При дублировании изображение функции вероятности отказа системы имеет вид

$$Q_c^*(s, 1, \lambda_n) = p_2^*(s) = \frac{\Lambda_0}{s + \Lambda_0 + \lambda_n} \left(\frac{\Lambda_1}{s + \Lambda_1} + \frac{\lambda_n}{s + \Lambda_0} \right). \tag{6.46}$$

Отсюда

$$Q_c(t, 1, \lambda_n) = 1 - e^{-\Lambda_0 t} - \frac{\Lambda_0}{\Lambda_0 - \Lambda_1 + \lambda_n} (e^{-\Lambda_1 t} - e^{-(\Lambda_0 + \lambda_n)t}). \tag{6.47}$$

В общем случае вероятность отказа системы при ненадежном ПР можно представить в виде

$$Q_c(t, m) = Q_{c0}(t, m) + \sum_{i=1}^m Q_{ci}(t, i), \tag{6.48}$$

где $Q_{c0}(t, m)$ — вероятность отказа системы после того, как израсходованы m резервных элементов; $Q_{ci}(t, i)$ — вероятность отказа системы вследствие отказа ПР после того, как израсходованы i резервных элементов. Изображения для функций $Q_{c0}(t, m)$ и $Q_{ci}(t, i)$ имеют вид

$$Q_{c0}^*(s, m) = \frac{\Lambda_m}{s + \Lambda_m} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\Lambda_i}{s + \Lambda_i + \lambda_n}; \quad Q_{ci}^*(s, i) = \frac{\lambda_n}{s + \Lambda_0} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\Lambda_j}{s + \Lambda_j + \lambda_n}. \tag{6.49}$$

Обратное преобразование в (6.49) дает

$$Q_{c0}(t, m) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i + \lambda_n} - \sum_{i=0}^{m-1} e^{-(\Lambda_i + \lambda_n)t} \left/ \left(\left(1 + \frac{\lambda_n}{\Lambda_i} \right) \left(1 - \frac{\Lambda_i + \lambda_n}{\Lambda_m} \right) \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{\Lambda_j}{\Lambda_j} \right) \right) \right. - \\ \left. - e^{-\Lambda_m t} \left/ \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{\Lambda_m - \lambda_n}{\Lambda_j} \right) \right. \right); \quad (6.50)$$

$$Q_{ci}(t, i) = \frac{\lambda_n}{s + \Lambda_0} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\Lambda_j}{\Lambda_j + \lambda_n} - e^{-\Lambda_0 t} \left/ \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{\Lambda_0}{\Lambda_j} \right) \right. - \\ - \sum_{j=0}^{i-1} e^{-(\Lambda_j + \lambda_n)t} \left/ \left(\left(1 + \frac{\lambda_n}{\Lambda_i} \right) \left(\frac{\Lambda_0 - \Lambda_j}{\lambda_n} - 1 \right) \prod_{k=0, k \neq j}^{i-1} \left(1 - \frac{\Lambda_j}{\Lambda_k} \right) \right) \right. \quad (6.51)$$

При $\lambda_n = 0$ функции $Q_{ci}(t, i) = 0$, а $Q_{c0}(t, m)$ совпадает с функцией вероятности отказа системы при идеальном ПР.

При раздельном резервировании ПР используют в каждой резервированной группе. Поэтому для расчета ВБР используют формулу (6.8), где $P_{1i}(t) = 1 - Q_{1i}(t)$ вычисляют с помощью формул (6.41)–(6.51), полагая $Q_{1i}(t) = Q_c(t)$.

6.2.5. Учет характеристик системы контроля и диагностирования

Потребность в учете характеристик системы контроля и диагностирования (СКД) возникает оттого, что СКД существенно влияет на эффективность резервирования. С одной стороны, обнаруженный отказ не позволяет отключить отказавший основной элемент и заменить его работоспособным резервным. Это значит, что с определенной вероятностью система оказывается нерезервированной либо резервированной, но с меньшей кратностью. Несмотря на то что есть работоспособные резервные элементы, они не могут быть использованы из-за отсутствия сигнала переключения резерва от СКД. С другой стороны, на создание СКД необходимо затрачивать определенные ресурсы: аппаратуру для аппаратурного контроля (АК) и оперативное время для программного контроля (ПК). Увеличение количества аппаратуры и оперативного времени снижает безотказность системы. Действие противоречивых факторов создает ситуацию, когда надо выбирать что-то одно — достоверность контроля или безотказность системы. Предпочтительным по критерию надежности может оказаться вариант с неполным контролем. При этом некоторое снижение эффективности резервирования за счет скрытых отказов становится приемлемым ввиду ограничений на ресурсы, выделяемые для создания СКД. Оптимальное соотношение между долей скрытых отказов и выделяемыми ресурсами находят путем решения соответствующей задачи оптимизации. Рассмотрим теперь некоторые схемы резервирования и соответствующие им модели надежности.

Дублированная система с аппаратурным контролем

Рассматривается система с общим нагруженным дублированием, в которой основной и резервный элементы имеют встроенные или внешние средства АК, обеспе-

чивающие одинаковые вероятности обнаружения отказов в этих элементах, то есть $\alpha_o = \alpha_p$. Для учета затрат аппаратуры на создание АК используются экспоненциальная и степенная модели (3.41) и (3.43). Схемы АК имеют собственный контроль (самоконтроль) с вероятностью α_k обнаружения отказа в средствах АК («кто сторожит сторожей»). Полагаем, что необнаруженные отказы АК приводят не к ложному сигналу об отказе основной аппаратуры, а лишь к бездействию после обнаружения и устранения отказа. Работа элемента без АК после обнаружения собственного отказа недопустима.

Интенсивность отказов контролируемой аппаратуры равна λ_o , а контрольной аппаратуры $\lambda_k = \delta \lambda_o$. Суммарная интенсивности отказов элемента (основного и резервного) равна $\lambda = \lambda_o + \lambda_k = (1 + \delta) \lambda_o$. Граф состояний системы содержит четыре состояния (рис. 6.6, а): 0 — оба элемента работоспособны, 1 — отказал один из элементов и этот отказ обнаружен (с вероятностью $\alpha = (\alpha_o + \delta \alpha_k) / (1 + \delta)$), 2 — отказал резервный элемент, и этот отказ не обнаружен средствами АК, 3 — неработоспособное состояние системы, возникающее либо после обнаруженных отказов обоих элементов, либо после необнаруженного отказа основного элемента.

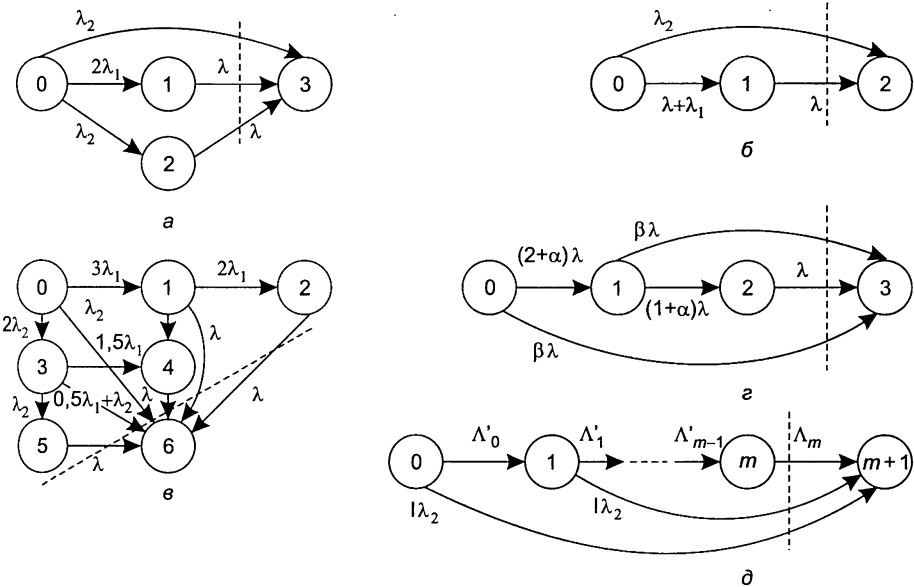


Рис. 6.6. Графы состояний резервированной системы при неполном контроле

Интенсивности переходов в марковской модели надежности связаны с характеристиками элементов следующими соотношениями:

$$\lambda_{01} = 2\lambda_1, \lambda_{02} = \lambda_{03} = \lambda_2, \lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda, \lambda_1 = \alpha_o \lambda_o + \alpha_k \lambda_k = \alpha \lambda = \alpha (1 + \delta) \lambda_o, \\ \lambda_2 = \lambda - \lambda_1 = \beta_o \lambda_o + \beta_k \lambda_k = (\beta_o + \beta_k \delta) \lambda_o = \beta (1 + \delta) \lambda_o = \beta \lambda,$$

где $\beta = (\beta_o + \beta_k \delta) / (1 + \delta)$, $\alpha = (\alpha_o + \alpha_k \delta) / (1 + \delta)$:

Вероятность безотказной работы системы находят с помощью системы дифференциальных уравнений Колмогорова типа (6.13). В данном случае вероятность безотказной работы связана с вероятностями состояний системы соотношением

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - P_3(t).$$

Здесь вероятность $P_3(t)$ — вероятность неработоспособного состояния 3 согласно графу состояний. После операционного преобразования по Карсону система дифференциальных уравнений переходит в систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} p_0^*(s) &= \frac{s}{2\lambda + s}; & p_1^*(s) &= \frac{2\lambda_1}{\lambda + s} p_0^*(s); & p_2^*(s) &= \frac{\lambda_2}{\lambda + s} p_0^*(s); \\ sp_3^*(s) &= \lambda_2 p_0^*(s) + \lambda p_1^*(s) + \lambda p_2^*(s). \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$Q_c^*(s) = P_3^*(s) = \frac{\lambda_2}{s + 2\lambda} + \frac{\lambda(\lambda + \lambda_1)}{(s + \lambda)(s + 2\lambda)} = \frac{s\lambda_2 + 2\lambda^2}{(s + \lambda)(s + 2\lambda)}. \quad (6.52)$$

Обратное преобразование в (6.52) дает

$$P_c(t) = e^{-\lambda t} (2 - \beta - (1 - \beta)e^{-\lambda t}); \quad \beta = \lambda_2 / \lambda = (\beta_0 + \delta\beta_k) / (1 + \delta). \quad (6.53)$$

Если использовать логарифмическую модель затрат аппаратуры (3.41) для создания средств АК, то долю скрытых отказов находят по формуле

$$\beta = \lambda_2 / \lambda = \frac{\left(\beta_0 - \beta_k \frac{1}{a} \ln \beta_0 \right)}{\left(1 - \frac{1}{a} \ln \beta_0 \right)}; \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{1}{a} \ln \beta_0 \right). \quad (6.54)$$

При степенной модели затрат

$$\beta = (\beta_0 + \beta_k (1 - \beta_0)^m) / (1 + (1 - \beta_0)^m); \quad \beta_0 = 1 - \alpha_0. \quad (6.55)$$

В комбинированной модели логарифмическую модель применяют при $\alpha_0 \leq \alpha_{00}$, а степенную — при $\alpha_{00} \leq \alpha_0 \leq 1$. Для сопряжения моделей после выбора α_{00} параметр m находят из условия

$$-\frac{1}{a} \ln(1 - \alpha_{00}) = \alpha_{00}^m. \quad (6.56)$$

Отсюда находим:

$$m = -\ln a + \ln(-\ln(1 - \alpha_{00})); \quad a = -\ln(1 - \alpha_{00}) / \alpha_{00}^m. \quad (6.57)$$

Среднюю наработку до отказа системы найдем с помощью (6.53). Используя общую формулу (1.12), после интегрирования получим:

$$\lambda_0 \bar{T}_{0c} = \frac{3 - \beta}{2(1 + \delta)} = \frac{3 - (\delta\beta_k + \beta_0) / (1 + \delta)}{2(1 + \delta)} = \frac{2 + 2\delta + \alpha_0 + \delta\alpha_k}{2(1 + \delta)^2}. \quad (6.58)$$

В частности, при $\beta_0 = \beta_k$ и $\beta_k = 0$ получим:

$$\lambda_0 \bar{T}_{0c} = \frac{3 - \beta_0}{2(1 + \delta)}; \quad \lambda_0 \bar{T}_{0c} = \frac{3 - \beta_0 / (1 + \delta)}{2(1 + \delta)}. \quad (6.59)$$

Учитывая, что β_0 мало, видим, что значения средней наработки в обоих случаях близки друг к другу. Поэтому можно приближенно рассчитать значение средней наработки, полагая $\beta_k = 0$.

Заметим, что в формуле (6.59) параметры β_0 и δ связаны соотношением (3.41). Поэтому формулу (6.58) можно представить в виде зависимости только от β_0 :

$$\lambda_0 \bar{T}_{0c} = \frac{3 - \beta_0}{2(1 - (\ln \beta_0) / a)}; \quad \lambda_0 \bar{T}_{0c} = \frac{3 - \beta_0 / (1 - (\ln \beta_0) / a)}{2(1 - (\ln \beta_0) / a)}. \quad (6.60)$$

Этими формулами можно пользоваться только для значений $\beta_0 > 1 - \alpha_{00}$.

Пусть теперь резервный элемент оснащен средствами программного контроля (ПК). Все время нахождения элемента в резерве средства ПК включены и обеспечивают совместно с АК обнаружение всех отказов. Тогда резервный элемент не имеет скрытых отказов, и граф состояний имеет три состояния (см. рис. 6.6, б). Составляя по графу состояний систему уравнений и решая ее, убеждаемся, что вероятность безотказной работы совпадает с вероятностью для случая отсутствия ПК. При этом формулы (6.53)–(6.60) сохраняют силу, и расчет по ним проводится без учета наличия средств ПК. Феномен отсутствия влияния ПК на надежность системы легко объясняется тем, что после отказа резервного элемента, обнаруженного или необнаруженного, система остается без резерва и знание об отказе резервного элемента ничего не меняет.

Общее резервирование с кратностью «1/2». **Мажорирование «2 из 3»**

Система из трех элементов может иметь различные структуры их соединения. Схема общего резервирования имеет два основных и один резервный элементы в нагруженном, облегченном или ненагруженном режимах (вариант 1). В схеме мажорирования все три элемента находятся в нагруженном режиме, и среди них не выделяют резервного элемента, так все они выполняют одну и ту же работу и в работоспособном состоянии выдают одинаковые результаты (вариант 2). На выходе системы находится мажорирующий элемент (МЭ), который сравнивает результаты на выходах элементов и выдает на выход системы данные по большинству голосов, то есть данные на выходе МЭ появятся только тогда, когда все три или любые два элемента выдают одинаковые данные. В противном случае МЭ формирует сигнал об отказе системы. Обычно МЭ наделяют еще функциями диагностики, позволяющими определить, который из трех элементов выдает данные, не совпадающие с данными двух остальных элементов. В варианте 1 все элементы оснащаются средствами АК. В варианте 2 в средствах АК нет необходимости, так как отказы обнаруживаются при сравнении результатов на выходах системы. В варианте 1 рассмотрим две разновидности:

в резервном элементе средства контроля такие же, как в основных элементах, и тогда вероятности обнаружения отказов в основных и резервном элементах одинаковы (вариант 1а); в резервном элементе дополнительно используются средства программного контроля (ПК), все время нахождения в резерве средства ПК включены и обеспечивают совместно с АК обнаружение всех отказов (вариант 1б). Проведем анализ этих вариантов и сравним их показатели надежности.

Вариант 1а. Резервный элемент может иметь скрытый отказ, но это не мешает системе сохранять работоспособность. Поэтому система имеет три работоспособных состояния (см. рис. 6.5, а) с интенсивностями переходов

$$\lambda_{01} = 2\lambda_1 + k_p \lambda_1, \lambda_{02} = k_p \lambda_2, \lambda_{03} = 2\lambda_2, \lambda_{13} = \lambda_{23} = 2\lambda = 2\lambda_0(1 + \delta),$$

$$\lambda_1 = \alpha_o \lambda_0 + \alpha_k \lambda_k = \alpha \lambda = \alpha(1 + \delta)\lambda_0, \lambda_2 = \lambda - \lambda_1 = \beta_0 \lambda_0 + \beta_k \lambda_k = (\beta_0 + \beta_k \delta)\lambda_0 = \beta \lambda,$$

где $\beta = (\beta_0 + \beta_k \delta) / (1 + \delta)$, $\alpha = (\alpha_0 + \alpha_k \delta) / (1 + \delta)$. Составляя систему уравнений по графу состояний и решая ее, для случая нагруженного резерва и $\beta_k = 0$ получим:

$$P_c(t) = e^{-2\lambda t} (3 - 2\beta - 2(1 - \beta)e^{-\lambda t}); \quad \beta = \beta_0 / (1 + \delta); \quad \lambda = \lambda_0(1 + \delta). \quad (6.61)$$

Средняя наработка до отказа системы

$$\lambda_0 \bar{T}_{0c} = \frac{5 - 2\beta}{6(1 + \delta)}; \quad \beta = \beta_0 / (1 + \delta); \quad \delta = -\frac{1}{\alpha} \ln \beta_0.$$

В упрощенной модели, когда все отказы обнаруживаются естественным образом, без использования СКД, следует взять $\beta_0 = \delta = 0$, и тогда получим известный классический результат: $\bar{T}_{0c} = 5 / (6\lambda_0)$.

Вариант 1б. Граф состояний содержит три состояния (см. рис. 6.6, б). Как и для дублированной системы, легко установить, что в этом случае все показатели надежности такие же, как в варианте 1а. И здесь средства ПК не влияют на надежность системы по той же причине, что и в дублированной системе.

Вариант 2. Очевидно, что мажорирующий элемент соединен последовательно с группой из трех элементов. Поэтому вероятность безотказной работы

$$P_c(t) = P_c(t, 0)e^{-\lambda_m t} = e^{-(2\lambda_0 + \lambda_m)t} (3 - 2e^{-\lambda_0 t}), \quad (6.62)$$

где $P_c(t, 0)$ — вероятность безотказной работы системы при безотказном МЭ; λ_m — интенсивность отказов МЭ. Средняя наработка до отказа системы может быть представлена в виде

$$\bar{T}_{0c} = \int_0^\infty P_c(t, 0) e^{-\lambda_m t} dt = 1 - Q_c^*(s, 0), \quad (6.63)$$

где $Q_c^*(s, 0)$ — изображение по Стильтесу функции вероятности отказа $Q_c(t, 0)$. Согласно (6.16) (6.16),

$$Q_c^*(s, 0) = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{s^2 + s(\Lambda_0 + \Lambda_1) + \Lambda_0 \Lambda_1}.$$

Здесь $\Lambda_0 = 3\lambda_0$, $\Lambda_1 = 2\lambda_0$. Поэтому из (6.63) находим:

$$\bar{T}_{0c} = \frac{5\lambda_0 + \lambda_m}{6\lambda_0^2 + 5\lambda_0\lambda_m + \lambda_m^2}.$$

Проанализируем полученные формулы. Наиболее значимыми являются два вопроса: как влияет СКД на эффективность резервирования и какая из двух схем (резервирования с дробной кратностью или мажорирования) обеспечивают большую надежность системы?

Влияние скрытых отказов на эффективность резервирования можно оценить по значению вероятности отказа системы. Согласно (6.61), при малых $\rho = \lambda t$ вероятность отказа можно оценить по приближенной формуле

$$Q_c(t) \approx 4\rho^2 + 2\rho\beta.$$

Если $\rho = 0,1$, а $\beta = 0,2$, то вероятность отказов увеличивается вдвое по сравнению с вариантом $\beta = 0$, и это без учета снижения безотказности от введения аппаратуры контроля. Если же учесть затраты на АК, то при $\beta_o = \beta_k$ вероятность $\beta = \beta_o$, и тогда

$$Q_c(t) \approx 4\rho_o^2(1 + \delta)^2 + 2\rho_o\beta(1 + \delta); \quad \rho_o = \lambda_o t.$$

Если использовать логарифмическую модель затрат при $a = 5$, то для $\rho_o = 0,1$, $\beta = 0,2$ получим, что вероятность отказа возрастает уже в 7 раз. Это значит, что влияние СКД на надежность системы весьма существенно.

Сравним теперь варианты 1 и 2 схем резервирования. Поскольку мажорирование обеспечивает маскирование всех отказов на интервале времени работоспособного состояния системы, то сравним варианты для случая $\beta_o = 0$. Пусть $\delta(\beta_o) = \delta(0) = \delta_o$. Тогда, приравнивая вероятности (6.61) и (6.62), получим уравнение для определения зависимости δ_o и λ_m , при которой обе схемы обеспечивают одинаковые показатели надежности:

$$e^{-\lambda_mt} (3 - 2e^{-\lambda_0 t}) = e^{-\lambda_0 \delta_o t} (3 - 2e^{-\lambda_0 (1+\delta_o) t}). \tag{6.64}$$

Согласно степенной модели, $\delta_o = 1$. Тогда уравнение (6.64) приобретает вид

$$p_1 = p_o^2 \frac{3 - 2p_o^2}{3 - 2p_o}; \quad p_o = e^{-\lambda_0 t}; \quad p_1 = e^{-\lambda_mt}.$$

Отсюда следует, что мажорирование предпочтительнее схемы резервирования с кратностью «1/2», если $p_1 \gg p_o^2$ или $\lambda_m < 2\lambda_0$. Поскольку это неравенство практически всегда выполняется, то схема мажорирования всегда обеспечивает более высокую вероятность безотказной работы, чем схема резервирования с дробной кратностью. Аналогичный вывод можно сделать и для критерия средней наработки. Учитывая, что в схеме мажорирования при условии гарантированного обнаружения всех отказов достаточно иметь один работоспособный элемент, более корректным было бы сравнение этой схемы со схемой резервирования «1 из 3» (общее двукратное резервирование).

Общее двукратное резервирование

Система с общим двукратным резервированием состоит из одного основного и двух нагруженных резервных элементов ($l = 1, m = 2$). При $\alpha_0 = \alpha_p$ и $\alpha_k = 1$ граф состояний содержит шесть состояний (см. рис. 6.6, в). В состояниях 1 и 2 все отказы обнаружены. В состояниях 3 и 4 в одном резервном элементе есть необнаруженный отказ, в состоянии 5 оба резервных элемента имеют необнаруженные отказы. Состояние 6 — неработоспособное и возникает либо после обнаруженных отказов всех трех элементов, либо после необнаруженного отказа основного элемента независимо от состояния резервных элементов. При обнаруженном отказе основного элемента в состоянии 3 учитываем, что равновероятно вместо отказавшего основного будет подключен работоспособный или неработоспособный (с необнаруженным отказом) резервный элемент. Поэтому переход из состояния 3 в состояние 4 происходит с интенсивностью $1,5\lambda_1$, а в состояние 6 — с интенсивностью $1,5\lambda_1 + \lambda_2$.

Система уравнений относительно изображений функций вероятностей состояний имеет вид

$$\begin{aligned} p_0^*(s) &= \frac{s}{s + 3\lambda}; \quad p_1^*(s) = \frac{3\lambda_1}{s + 2\lambda} p_0^*(s); \quad p_2^*(s) = \frac{2\lambda_1}{s + \lambda} p_1^*(s); \quad p_3^*(s) = \frac{2\lambda_1}{s + 2\lambda} p_0^*(s); \\ p_4^*(s) &= \frac{\lambda_2 p_1^*(s) + 1,5\lambda_1 p_3^*(s)}{s + \lambda} p_0^*(s); \quad p_5^*(s) = \frac{\lambda_2}{s + \lambda} p_3^*(s); \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$p_6^*(s) = \frac{1}{s} (\lambda_2 p_0^*(s) + \lambda_2 p_1^*(s) + \lambda p_2^*(s) + (1,5\lambda_1 + \lambda_2) p_3^*(s) + \lambda p_4^*(s) + \lambda p_5^*(s)),$$

где $\lambda = \lambda_0 + \lambda_k = (1 + \delta) \lambda_0$, $\lambda_1 = \alpha \lambda_0 + \lambda_k$, $\lambda_2 = \beta \lambda_0$, $\alpha = 1 - \beta = (\alpha_0 + \delta) / (1 + \delta)$.

Решение системы (6.65) имеет вид

$$P_c(t) = (3 - 4\beta + 2\beta^2) e^{-\lambda t} - (3 - 7\beta + 4\beta^2) e^{-2\lambda t} + (1 - 3\beta + 2\beta^2) e^{-3\lambda t}.$$

При $\beta = 0$ имеем:

$$P_c(t) = e^{-\lambda t} (3 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}).$$

Средняя наработка системы до отказа

$$\bar{T}_{0c} = (11 - 9\beta + 4\beta^2) / 6\lambda. \quad (6.66)$$

Если в резервных элементах применяют программный контроль, то $\alpha_p = 1$, и тогда граф состояний имеет всего 4 состояния (см. рис. 6.6, г). Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} p_0^*(s) &= \frac{s}{s + 3\lambda}; \quad p_1^*(s) = \frac{\lambda(2 + \alpha)}{s + 2\lambda} p_0^*(s); \quad p_2^*(s) = \frac{\lambda(1 + \alpha)}{s + \lambda} p_1^*(s); \\ sp_3^*(s) &= \beta p_0^*(s) + \beta p_1^*(s) + p_2^*(s). \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_c^*(s) = p_3^*(s) = \frac{\beta\lambda}{s + 3\lambda} + \frac{\beta\lambda^2(2 + \alpha)}{(s + 2\lambda)(s + 3\lambda)} + \frac{\lambda^3(2 + \alpha)(1 + \alpha)}{(s + \lambda)(s + 2\lambda)(s + 3\lambda)}. \quad (6.67)$$

Обратное преобразование в (6.67) дает

$$P_c(t) = \frac{1}{2}(6 - 5\beta + \beta^2)e^{-\lambda t} - (3 - 4\beta + 4\beta^2)e^{-2\lambda t} + \frac{1}{2}(2 - 3\beta + \beta^2)e^{-3\lambda t}.$$

Средняя наработка системы до отказа

$$\bar{T}_{0c} = (11 - 6\beta + \beta^2) / 6\lambda. \quad (6.68)$$

Сравнивая (6.66) и (6.68), видим, что средняя наработка до отказа при введении ПК возросла на $\alpha\beta / 2\lambda$. Относительное увеличение составляет $3\alpha\beta / (11 - 9\beta + 4\beta^2)$. При $\beta = 0,1$ средняя наработка увеличивается примерно на 2,5%, а при $\beta = 0,2$ — на 5,2%.

Общее резервирование с дробной кратностью

Рассмотрим теперь общий случай, когда система состоит из l основных и m резервных однотипных элементов. Все элементы оснащены средствами АК, обеспечивающими вероятность обнаружения отказов α_0 и имеющими полный самоконтроль ($\alpha_k = 1$). Резервные элементы имеют, кроме того, средства программного контроля, и поэтому для них во время пребывания в резерве вероятность обнаружения отказов $\alpha_p = 1$. Граф состояний содержит $m + 2$ состояния (см. рис. 6.6, д), из которых состояние $m + 1$ неработоспособное, а остальные — работоспособные. Отказ системы возникает либо после $(m + 1)$ -го обнаруженного отказа основных или резервных элементов, либо после первого же необнаруженного отказа основного элемента. Интенсивности переходов определяют по формулам

$$\lambda_{i,i+1} = \Lambda'_i = l\lambda_1 + (m-i)k_p\lambda; \quad \lambda_{i,m+1} = l\lambda_2; \quad i = 0 \dots m-1; \quad \Lambda_m = l\lambda; \quad \lambda = \lambda_0(1 + \delta)$$

$$\lambda_1 = \alpha_0\lambda_0 + \lambda_k = \alpha\lambda; \quad \lambda_2 = \beta_0\lambda_0; \quad \alpha = (\alpha_0 + \delta) / (1 + \delta); \quad \beta = 1 - \alpha = \beta_0 / (1 + \delta),$$

где k_p — коэффициент облегчения резерва. Система уравнений относительно изображений вероятностей состояний имеет вид

$$p_0^*(s) = \frac{s}{s + \Lambda_0}; \quad p_i^*(s) = \frac{\Lambda'_{i-1}}{s + \Lambda_i} p_{i-1}^*(s), \quad i = 1 \dots m;$$

$$Q_c^*(s) = p_{m+1}^*(s) = \frac{1}{s} \left(l\lambda p_m^*(s) + l\lambda_2 \sum_{i=0}^{m-1} p_i^*(s) \right); \quad \Lambda_i = \Lambda'_i + l\lambda_2.$$

Решение системы:

$$Q_c^*(s) = \frac{l\lambda}{s + \Lambda_0} + l\lambda_2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Lambda'_0 \Lambda'_1 \dots \Lambda'_{i-1}}{(s + \Lambda_0) \dots (s + \Lambda_i)} + \frac{l\lambda \Lambda'_0 \Lambda'_1 \dots \Lambda'_{m-1}}{(s + \Lambda_0) \dots (s + \Lambda_i)}. \quad (6.69)$$

При $m = 1$ вторая сумма отсутствует, а в формулу для вероятности отказа входят первое и третье слагаемые. Обратное преобразование в (6.69) дает

$$Q_c(t) = \sum_{i=0}^m Q_c(t, i); \quad Q_c(t, 0) = \frac{l\lambda}{\Lambda_0} (1 - e^{-\Lambda_0 t});$$

$$Q_c(t, i) = \frac{l\lambda_2 \Lambda'_0 \Lambda'_1 \dots \Lambda'_{i-1}}{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_i} - l\lambda_2 \sum_{j=0}^i \Lambda'_0 \Lambda'_1 \dots \Lambda'_{i-1} e^{-\Lambda_j t} / \left(\Lambda_j \prod_{k=0, k \neq j}^i (\Lambda_k - \Lambda_j) \right);$$

$$Q_c(t, m) = \frac{l\lambda\Lambda'_0\Lambda'_1\cdots\Lambda'_{m-1}}{\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_m} - l\lambda\sum_{j=0}^i\Lambda'_0\Lambda'_1\cdots\Lambda'_{m-1}e^{-\Lambda_j t} \Big/ \left(\Lambda_j \prod_{k=0, k \neq j}^m (\Lambda_k - \Lambda_j) \right).$$

Среднюю наработку до отказа находят из системы уравнений

$$\bar{T}_{0c} = \bar{T}_0 = \frac{1}{\Lambda_0} + \frac{\Lambda'_0}{\Lambda_0} \bar{T}_1; \quad \bar{T}_0 = \frac{1}{\Lambda_i} + \frac{\Lambda'_i}{\Lambda_i} \bar{T}_{i+1}, \quad i = 0 \dots m-1, \quad \bar{T}_m = \frac{1}{\Lambda_m}.$$

Отсюда

$$\bar{T}_{0c} = \frac{1}{\Lambda_0} \left(1 + \frac{\Lambda'_0}{\Lambda_1} \left(1 + \frac{\Lambda'_1}{\Lambda_2} \left(1 + \dots + \frac{\Lambda'_{m-1}}{\Lambda_{m-1}\Lambda_m} \right) \dots \right) \right). \quad (6.70)$$

В частности, при дублировании ($m = l = 1$) формула (6.70) приобретает вид

$$\bar{T}_{0c} = \frac{1}{\Lambda_0} \left(1 + \frac{\Lambda'_0}{\Lambda_1} \right) = \frac{2\lambda + \lambda_1}{2\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} (3 - \beta); \quad \lambda = \lambda_0 (1 + \delta).$$

Этот результат совпадает с (6.58). Проанализируем полученные результаты.

1. Расчеты вероятности безотказной работы (ВБР) для дублированной системы при $\rho_0 = \lambda_0 t = 0,2$ и $\alpha = 5,0$ показывают (табл. 6.1), что при увеличении полноты контроля α_0 ВБР сначала растет, достигая максимума, равного 0,923, при $\alpha_0 \cong 0,9$ ($\beta_0 \cong 0,1$), а затем начинает убывать. Это значит, что, согласно принятой модели затрат аппаратуры на организацию АК, более предпочтительным является неполный контроль с долей необнаруживаемых отказов примерно 10%. Если проигнорировать затраты аппаратуры на АК, то получим завышенное значение ВБР. Так, при $\rho_0 = 0,2$ в системе с идеальным контролем без учета затрат вероятность безотказной работы равна 0,9671, а вероятность отказа $Q(0) = 0,0329$. Это примерно в 3,3 раза меньше, чем в системе с учетом затрат. При оптимальном значении полноты контроля вероятность отказов снижается в 2,3 раза. Это значение может быть принято за оценку степени снижения эффективности резервирования.

Таблица 6.1. Зависимость ВБР от полноты контроля, $\lambda_0 t = 0,2$, $P_c(0) = 0,9671$, $a = 5$

№	β_0	δ	β	$P_c(\alpha)$	$Q(\beta)/Q(0)$
1	0	1	0	0,8913	3,3078
2	0,005	0,9597	0,0026	0,8943	3,2169
3	0,01	0,9209	0,0052	0,8971	3,1312
4	0,02	0,7823	0,0112	0,9077	2,8079
5	0,03	0,7012	0,0176	0,9132	2,6414
6	0,04	0,6437	0,0243	0,9166	2,5382
7	0,05	0,5991	0,0313	0,9189	2,4692
8	0,1	0,4604	0,0685	0,9229	2,3467
9	0,2	0,3218	0,1513	0,9190	2,4636
10	0,3	0,2408	0,2418	0,9102	2,7315

№	β_0	δ	β	$P_c(\alpha)$	$Q(\beta)/Q(0)$
11	0,4	0,1832	0,3381	0,8994	3,0626
12	0,5	0,1386	0,4391	0,8873	3,4296
13	1	0	1	0,8187	5,5167

При увеличении параметра a до 10 (табл. 6.2) оптимальное значение полноты контроля увеличивается до 0,95. При этом ВБР также возрастает (от 0,923 до 0,941). Эффективность резервирования уменьшается в 1,8 раза (против 2,3 раза при $a = 5$).

Таблица 6.2. Зависимость ВБР от полноты контроля, $\lambda_0 t = 0,2$, $P_c(0) = 0,9671$, $a = 10$

№	β_0	δ	β	$P_c(\alpha)$	$Q(\beta)/Q(0)$
1	0	1	0	0,8913	3,3078
2	0,005	0,6792	0,0030	0,9180	2,4951
3	0,01	0,4605	0,0068	0,9345	1,9921
4	0,02	0,3912	0,0144	0,9384	1,8758
5	0,03	0,3506	0,0222	0,9400	1,8275
6	0,04	0,3219	0,0303	0,9406	1,8067
7	0,05	0,2995	0,0385	0,9408	1,8009
8	0,1	0,2302	0,0813	0,9386	1,8697
9	0,2	0,1609	0,1723	0,9288	2,1678
10	0,3	0,1204	0,2678	0,9167	2,5339
11	0,4	0,0916	0,3664	0,9038	2,9290
12	0,5	0,0693	0,4676	0,8902	3,3406
13	1	0	1	0,8187	5,5167

При уменьшении времени функционирования вдвое (табл. 6.3) оптимальное значение полноты контроля увеличивается (от 0,9 до 0,95), но эффективность резервирования уменьшается еще в большей степени, чем при $\rho_0 = \lambda_0 t = 0,2$ (в 2,85 раза против 2,3 раза при $\rho_0 = 0,2$). Максимальное снижение эффективности (в 10,5 раза) наблюдается при отсутствии контроля ($\alpha_0 = 0$). Если время функционирования точно не известно, но известен диапазон изменения, то полноту контроля следует выбирать, ориентируясь на минимальное время в этом диапазоне.

2. Весьма примечательной является зависимость средней наработки системы до отказа от полноты контроля (табл. 6.4 и 6.5). Если при идеальном контроле средняя наработка от введения нагруженного дублирования увеличивается на 50% (в 1,5 раза), то с учетом затрат аппаратуры на организацию контроля она возрастает существенно меньше, а при некотором сочетании параметров может и уменьшаться по сравнению со средней наработкой нерезервированной системы. Оптимальное значение полноты контроля по критерию средней наработки меньше, чем по критерию ВБР. Так, при $a = 10$ оптимальное значение $\alpha_0 = 0,7$,

а при $a = 5 - \alpha_0 = 0,5$. Снижение эффективности резервирования оценивается как отношение приращения средней наработки от введения резерва при идеальном контроле к приращению средней наработки с учетом неполноты контроля и затрат аппаратуры. При оптимальном значении полноты контроля снижение эффективности составляет 2,28 при $a = 10$ и 4,0 при $a = 5$. При некоторых значениях α_0 эффективность резервирования становится отрицательной: при $0,99 \leq \alpha_0 \leq 1$ для $a = 10$ и при $0,90 \leq \alpha_0 \leq 1$ для $a = 5$. Поскольку средняя наработка до отказа редко используется в качестве критерия надежности резервированных систем, выбор полноты контроля следует делать по критерию ВБР.

Таблица 6.3. Зависимость ВБР от полноты контроля, $\lambda_0 t = 0,1$, $P_c(0) = 0,9909$, $a = 5$

№	β_0	δ	β	$P_c(\alpha)$	$Q(\beta)/Q(0)$
1	0	1	0	0,9671	3,6284
2	0,005	0,9597	0,0026	0,9680	3,5386
3	0,01	0,9209	0,0052	0,9687	3,4557
4	0,02	0,7823	0,0112	0,9718	3,1121
5	0,03	0,7012	0,0176	0,9732	2,9593
6	0,04	0,6437	0,0243	0,9739	2,8824
7	0,05	0,5991	0,0313	0,9742	2,8463
8	0,1	0,4604	0,0685	0,9735	2,9266
9	0,2	0,3218	0,1513	0,9683	3,5056
10	0,3	0,2408	0,2418	0,9615	4,2555
11	0,4	0,1832	0,3381	0,9540	5,0759
12	0,5	0,1386	0,4391	0,9462	5,9358
13	1	0	1	0,9048	10,5083

Таблица 6.4. Зависимость средней наработки до отказа от полноты контроля, $a = 10$

№	β_0	δ	β	$\lambda_0 \bar{T}_{0c}$
1	0	0	0	1,5
2	0	1,0000	0,0000	0,75
3	0,01	0,4605	0,0068	1,0247
4	0,02	0,3912	0,0144	1,0730
5	0,05	0,2996	0,0385	1,1394
6	0,1	0,2303	0,0813	1,1862
7	0,2	0,1609	0,1723	1,2179
8	0,3	0,1204	0,2678	1,2193
9	0,5	0,0693	0,4676	1,1841
10	0,6	0,0511	0,5708	1,1556
11	0,8	0,0223	0,7825	1,0845
12	1	0,0000	1,0000	1

Таблица 6.5. Зависимость средней наработки до отказа от полноты контроля, $a = 5$

№	β_0	δ	β	$\lambda_0 \bar{T}_{0c}$
1	0	0	0	1,5
2	0	1,0000	0,0000	0,75
3	0,01	0,9210	0,0052	0,7795
4	0,02	0,7824	0,0112	0,8384
5	0,05	0,5991	0,0313	0,9282
6	0,1	0,4605	0,0685	1,0036
7	0,2	0,3219	0,1513	1,0775
8	0,3	0,2408	0,2418	1,1115
9	0,5	0,1386	0,4391	1,1245
10	0,6	0,1022	0,5444	1,1140
11	0,8	0,0446	0,7658	1,0694
12	1	0,0000	1,0000	1

3. Сравнение резервированных систем, состоящих из трех элементов и имеющих различные схемы резервирования, показывает, что надежность системы существенно зависит не только от применяемой схемы резервирования, но и от характеристик аппаратного контроля (табл. 6.6–6.11). При полном контроле ($\beta_0 = 0$), согласно степенной модели затрат, количество контрольной аппаратуры становится равным количеству контролируемой аппаратуры ($\delta = 1$). Тогда система с мажорированием по схеме «2 из 3» имеет меньшую ВБР, чем система с кратностью резервирования «1/2», но уступает системе с двукратным резервированием (табл. 6.6). Такое же соотношение сохраняется и при $\beta_0 > 0$, если это значение невелико, а параметр a находится в типовом диапазоне (5...10) (табл. 6.7 и 6.8). Заметим, что во всех случаях надежность мажорирующего элемента слабо влияет на надежность системы и на соотношение между схемами резервирования. Однако при $a = 2$ (табл. 6.9) с увеличением ρ_0 система с двукратным резервированием становится менее надежной, чем мажорированная система. При уменьшении полноты контроля система с двукратным резервированием уступает по значению ВБР мажорированной системе уже при сравнительно небольших ρ_0 (табл. 6.10 и 6.11).

Таблица 6.6. Вероятность безотказной работы системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $\beta_0 = 0, a = 10, \delta = 1, \varepsilon = \lambda_m / \lambda_0, \gamma = \varepsilon / \delta$

№	ρ_0	ε	γ	β	$P_c(t)$		
					«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	0,01	0	0,97456	0,99260	0,99914
2	0,1	0,01	0,01	0	0,91334	0,97358	0,99404
3	0,2	0,01	0,01	0	0,74560	0,91151	0,96417
4	0,5	0,01	0,01	0	0,30643	0,65410	0,74742
5	1	0,01	0,01	0	0,04999	0,30338	0,35354
6	0,1	0	0	0	0,91334	0,97456	0,99404

Таблица 6.7. Вероятность безотказной работы системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $\beta_0 = 0,05$, $a = 10$, $\varepsilon = \lambda_m / \lambda_0$, $\gamma = \varepsilon / \delta$

№	ρ_0	ε	δ	γ	β	$P_c(t)$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	0,2996	0,0334	0,0385	0,98437	0,99260	0,99727
2	0,1	0,01	0,2996	0,0334	0,0385	0,95183	0,97358	0,99333
3	0,2	0,01	0,2996	0,0334	0,0385	0,85635	0,91151	0,97892
4	0,5	0,01	0,2996	0,0334	0,0385	0,52319	0,65410	0,87450
5	1	0,01	0,2996	0,0334	0,0385	0,17831	0,30338	0,59935
6	0,1	0	0,2996	0	0,0385	0,95183	0,97456	0,99333

Таблица 6.8. Вероятность безотказной работы системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $\beta_0 = 0,05$, $a = 5$, $\varepsilon = \lambda_m / \lambda_0$, $\gamma = \varepsilon / \delta$

№	ρ_0	ε	δ	γ	β	$P_c(t)$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,97910	0,99260	0,99708
2	0,1	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,93422	0,97358	0,99197
3	0,2	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,80721	0,91151	0,97075
4	0,5	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,41758	0,65410	0,81913
5	1,0	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,10396	0,30338	0,48095
6	0,1	0	0,5991	0	0,0313	0,93422	0,97456	0,99197

Таблица 6.9. Вероятность безотказной работы системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $\beta_0 = 0,05$, $a = 2$, $\varepsilon = \lambda_m / \lambda_0$, $\gamma = \varepsilon / \delta$

№	ρ_0	ε	δ	γ	β	$P_c(t)$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	1,4979	0,0067	0,0200	0,95822	0,99260	0,99594
2	0,1	0,01	1,4979	0,0067	0,0200	0,86966	0,97358	0,98462
3	0,2	0,01	1,4979	0,0067	0,0200	0,65195	0,91151	0,93163
4	0,5	0,01	1,4979	0,0067	0,0200	0,19725	0,65410	0,62880
5	1,0	0,01	1,4979	0,0067	0,0200	0,01894	0,30338	0,22346
6	0,1	0	1,4979	0,0000	0,0200	0,86966	0,97456	0,98462

Таблица 6.10. Вероятность безотказной работы системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $\beta_0 = 0,1$, $a = 10$, $\varepsilon = \lambda_m / \lambda_0$, $\gamma = \varepsilon / \delta$

№	β_0	ε	δ	γ	β	$P_c(t)$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	0,2996	0,0334	0,0385	0,95183	0,97358	0,99333
2	0,1	0,01	0,2303	0,0434	0,0813	0,94819	0,97358	0,98872
3	0,2	0,01	0,1609	0,0621	0,1723	0,93665	0,97358	0,97926

№	β_0	ε	δ	γ	β	$P_c(t)$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
4	0,3	0,01	0,1204	0,0831	0,2678	0,92331	0,97358	0,96976
5	0,5	0,01	0,0693	0,1443	0,4676	0,89465	0,97358	0,95087
6	0,95	0	0,0051	0,0000	0,9452	0,82647	0,97456	0,90936

Таблица 6.11. Вероятность безотказной работы системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $\beta_0 = 0,1, a = 5, \varepsilon = \lambda_m / \lambda_0, \gamma = \varepsilon / \delta$

№	β_0	ε	δ	γ	β	$P_c(t)$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,93422	0,97358	0,99197
2	0,1	0,01	0,4605	0,0217	0,0685	0,93573	0,97358	0,98785
3	0,2	0,01	0,3219	0,0311	0,1513	0,92904	0,97358	0,97879
4	0,3	0,01	0,2408	0,0415	0,2418	0,91830	0,97358	0,96948
5	0,5	0,01	0,1386	0,0721	0,4391	0,89248	0,97358	0,95077
6	0,95	0	0,0103	0,0000	0,9403	0,82642	0,97456	0,90935

4. Сравнение резервированных систем по критерию средней наработки дает более определенный результат (табл. 6.12 и 6.13). Во всем диапазоне значений полноты контроля мажорированная система превосходит систему с кратностью резервирования «1/2» и уступает системе с кратностью «2/1».

Таблица 6.12. Средняя наработка до отказа системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $a = 5, \varepsilon = 0,01, \gamma = \varepsilon / \delta$

№	β_0	ε	δ	γ	β	$\lambda_0 \cdot \bar{T}_{0c}$		
						«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	0,5991	0,0167	0,0313	0,51461	0,82809	1,11756
2	0,1	0,01	0,4605	0,0217	0,0685	0,55495	0,82809	1,18710
3	0,2	0,01	0,3219	0,0311	0,1513	0,59225	0,82809	1,22676
4	0,3	0,01	0,2408	0,0415	0,2418	0,60666	0,82809	1,21666
5	0,5	0,01	0,1386	0,0721	0,4391	0,60333	0,82809	1,14455
6	0,95	0	0,0103	0,0000	0,9403	0,51459	0,83333	1,00200
7	0	0,01	1	0,01	0,0000	0,41667	0,82809	0,91667

Таблица 6.13. Средняя наработка до отказа системы из трех элементов при различных схемах резервирования, $a = 10, \varepsilon = 0,01, \gamma = \varepsilon / \delta$

№	β_0	ε	a	δ	γ	β	$\lambda_0 \cdot \bar{T}_{0c}$		
							«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
1	0,05	0,01	10	0,2996	0,0167	0,0385	0,63137	0,82809	1,36707
2	0,1	0,01	10	0,2303	0,0217	0,0813	0,65534	0,82809	1,39468

продолжение ➤

Таблица 6.13 (продолжение)

№	β_0	ε	a	δ	γ	β	$\lambda_0 \cdot \bar{T}_{0c}$		
							«1/2»	«2 из 3»	«2/1»
3	0,2	0,01	10	0,1609	0,0311	0,1723	0,66834	0,82809	1,37363
4	0,3	0,01	10	0,1204	0,0415	0,2678	0,66412	0,82809	1,32050
5	0,5	0,01	10	0,0693	0,0721	0,4676	0,63356	0,82809	1,19489
6	0,95	0	10	0,0051	0,0000	0,9452	0,51564	0,83333	1,00599
7	0	0,01	10	1	0,01	0,0000	0,41667	0,82809	0,91667

Закономерности, подмеченные для конкретных вариантов резервированных систем, наблюдаются и для других схем резервирования, хотя для каждой из них существует собственный диапазон значений параметров, где эти закономерности имеют место.

6.3. Расчет надежности систем со сложной структурой

Система с последовательно-параллельной структурой обладает следующей особенностью: путем декомпозиции ее можно расчленить на совокупность схем только с последовательным или только с параллельным соединением элементов. Однако в практике проектирования АСОИУ встречаются случаи, когда структурную схему системы не удастся отнести к последовательно-параллельной. Классическим примером такой схемы является так называемая мостиковая схема (рис. 6.7).

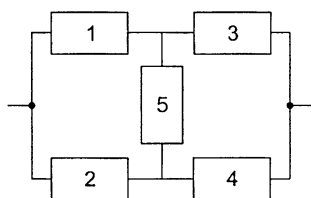


Рис. 6.7. Мостиковая схема

Так может быть организована система передачи данных с двумя ретрансляционными станциями А и Б. В ней элементы 1–5 представляют собой не что иное как каналы связи. Такая же структурная схема может возникнуть в системе электропитания аппаратуры, если элементы 1 и 2 — источники первичного питания, 3 и 4 — генераторы постоянного тока, а 5 — коммутирующее устройство, позволяющее подсоединить источник 1 к генератору 4 или источник 2 — к генератору 3. Эта схема относится к классу сложных структур.

Все точки соединения в любой структурной схеме можно подразделить на периферийные и внутренние. *Периферийной точкой*, или *полюсом*, называют входную

и выходную точки соединения в эквивалентной схеме проводимости (структурной схеме надежности). Все остальные точки называют *внутренними*. По количеству входных и выходных полюсов все структурные схемы можно разделить на несколько классов. Если структура имеет один входной и один выходной полюс, ее называют *двухполюсной*. Если структура имеет один входной и несколько выходных полюсов или один выходной и несколько входных, ее называют *ветвящейся*. Наконец, если структура имеет несколько входных и несколько выходных полюсов, ее называют *многополюсной*. Далее в этом разделе рассматриваются только двухполюсные структуры.

Внутренние точки соединения могут быть двух типов: узлами или простыми точками. Внутреннюю точку называют *узлом*, если после удаления всех элементов, соединенных с обоими полюсами, разрезание в точке соединения приводит к потере связности структурной схемы, то есть структурная схема распадается на два изолированных фрагмента. Узлами структурной схемы исходной системы являются также узлы любого фрагмента этой схемы, расположенного между двумя узлами или между узлом и одним из полюсов. В последнем случае фрагмент становится изолированным после разрезания в полюсе и узле. Внутреннюю точку соединения, не являющуюся узлом, называют *простой точкой соединения*. Разрезание структуры в простой точке не приводит к потере связности. Используя введенные понятия внутренних точек, можно дать более строгие определения классов структур.

Определение 1. Последовательно-параллельной называют структуру, к которой все внутренние точки соединения являются узлами.

Определение 2. Сложной называют структуру, в которой есть хотя бы одна простая внутренняя точка соединения.

Установить принадлежность любой структурной схемы к одному из этих классов можно с помощью многошаговой процедуры с двумя операциями: удаление элементов, соединенных с обоими полюсами, и разрезание по внутренним точкам соединения. Если применение этих операций во внутренних точках соединения исходной структуры и всех ее изолированных фрагментов приводит к расчленению структурной схемы на изолированные элементы, то она последовательно-параллельная. Если в результате применения процедуры остается хотя бы один фрагмент, который не удастся расчленить на изолированные элементы, структура является сложной.

При анализе надежности систем со сложной структурой принимаются следующие допущения: соединения всех элементов в структурной схеме постоянные (режим работы нагруженный), отказы элементов — независимые события, для каждого элемента задана функция вероятности безотказной работы.

Рассмотрим далее некоторые методы анализа надежности систем со сложной структурой.

6.3.1. Метод перебора гипотез

Метод перебора гипотез используется для анализа надежности систем, состоящих из одинаковых элементов. Согласно этому методу вероятность безотказной работы находят по формуле [3]

$$P_c(t) = \sum_{i=1}^n A_i p^i q^{n-i}, \quad (6.71)$$

где l — глубина схемы, число элементов в минимальном замыкающем множестве; A_i — число различных замыкающих множеств, состоящих из i элементов; $p = 1 - q$ — вероятность безотказной работы элемента. *Замыкающим* называют такое множество элементов, работоспособное состояние которых обеспечивает работоспособность системы.

Вместо (6.71) можно использовать формулу

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = \sum_{i=s}^n B_i q^i p^{n-i}, \quad (6.72)$$

где s — ширина схемы, число элементов в минимальном размыкающем множестве; B_i — число различных размыкающих множеств, состоящих из i элементов. *Размыкающим* называют такое множество элементов, отказ которых приводит к отказу системы.

Вычисляя несколько первых членов суммы в (6.71) и (6.72), удастся получить двустороннюю оценку точного значения вероятности:

$$\sum_{i=l}^{n_1} A_i p^i q^{n-i} \leq P_c(t) \leq 1 - \sum_{i=s}^{n_2} B_i q^i p^{n-i}.$$

Пример 6.2. Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема соединения элементов которой приведена на рис. 6.7.

Решение. Глубина схемы $l = 2$. Поэтому необходимо найти четыре коэффициента A_i . Замыкающие множества содержат следующие элементы: (13, 24) при $i = 2$; (135, 134, 123, 245, 124, 234, 145, 235) при $i = 3$; (1234, 1235, 1245, 2345) при $i = 4$; (12 345) при $i = 5$. Подставляя значения A_i в формулу (6.71), получим:

$$P_c(t) = 2p^2 q^3 + 8p^3 q^2 + 5p^4 q + p^5. \quad (6.73)$$

Ширина схемы $s = 2$. Размыкающие множества содержат следующие элементы: (13, 24) при $i = 2$; (125, 124, 123, 134, 234, 345, 145, 235) при $i = 3$; (1234, 1235, 1245, 2345) при $i = 4$; (12 345) при $i = 5$. Подставляя значения B_i в формулу (6.72), получим:

$$Q_c(t) = 2p^3 q^2 + 8p^2 q^3 + 5pq^4 + q^5. \quad (6.74)$$

В результате несложных преобразований можно убедиться в том, что из (6.73) и (6.74) получается одно и то же значение вероятности безотказной работы системы.

Метод перебора гипотез может быть обобщен на случай различных элементов системы. При этом также, как и в случае однотипных элементов, составляются перечни замыкающих и размыкающих множеств. Только вероятности возникновения каждого множества в отдельности определяются в соответствии с исходными данными о надежности элементов. Поэтому в формулах (6.71) и (6.72) вместо каждого из слагаемых появляется сумма из A_i или B_i слагаемых, каждое из которых есть произведение вероятностей безотказной работы или вероятностей отказа элементов. Например, вместо первого слагаемого в (6.73) появится сумма $p_1 q_2 p_3 q_4 q_5 + q_1 p_2 q_3 p_4 q_5$, а вместо первого слагаемого в (6.74) — сумма $q_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5$.

6.3.2. Метод эквивалентных схем

Метод эквивалентных схем основан на использовании формулы полной вероятности в виде

$$P_c(t) = f(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 P(t | p_1 = 1) + q_1 P(t | p_1 = 0). \quad (6.75)$$

Входящие в (6.75) условные вероятности представляют собой вероятности безотказной работы систем, одна из которых отличается от исходной лишь тем, что ее первый элемент идеально надежный, а в другой первый элемент вообще отсутствует. Операция разбиения функции $P_c(t)$ на два слагаемых в (6.75) называется разрезанием по элементу 1. Вообще говоря, разрезание может быть проведено по любому элементу системы. Последовательность действий при использовании метода эквивалентных схем следующая.

1. В исходной системе выбирают элемент, по которому будет производиться разрезание. Обычно им становится элемент, расположенный между простыми точками соединения.
2. Исходную структурную схему преобразуют в две эквивалентные схемы, в одной из которых выбранный элемент заменяется безотказной перемычкой, а в другой удаляется.
3. Если обе полученные в предыдущем пункте схемы являются последовательно-параллельными, то для расчета их надежности используют методы, изложенные в 6.1 и 6.2. После подстановки в (6.75) получают искомую вероятность. Если же одна или обе схемы остаются в классе сложных структур, то в них проводят действия в соответствии с пп. 1 и 2, и так до тех пор, пока все эквивалентные схемы не станут последовательно-параллельными.

Пример 6.3. Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема которой представлена на рис. 6.7.

Решение. Здесь можно провести разрезание по элементу 5. Замыкание и обрыв приводят к схемам с последовательно-параллельным соединением элементов (рис. 6.8).

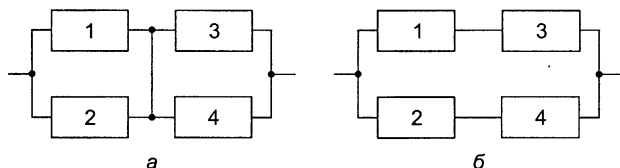


Рис. 6.8. Эквивалентные схемы системы с мостиковой структурой

Используя формулы общего и раздельного резервирования с целой кратностью, находим:

$$P_c(t) = p_5(1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4) + q_5(1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4)), \quad (6.76)$$

где $p_i = 1 - q_i$ — вероятность безотказной работы i -го элемента. В частности, при одинаковых элементах из (6.76) имеем:

$$P_c(t) = 2p^5 - 3p^4 + 2p^3 + 2p^2. \quad (6.77)$$

Нетрудно установить, что формула (6.77) дает такой же результат, что и формулы (6.73) и (6.74).

Разрезание можно проводить и по нескольким элементам одновременно. При этом получается 2^m эквивалентных схем, а в формуле для вероятности безотказной работы будет 2^m слагаемых, где m — количество элементов, по которым проводится разрезание. В частности, при разрезании по двум элементам с номерами i и j вместо формулы (6.75) имеем:

$$P_c(t) = p_i p_j P_c(t | p_i = p_j = 1) + q_i p_j P_c(t | p_i = 0, p_j = 1) + p_i q_j P_c(t | p_i = 1, p_j = 0) + q_i q_j P_c(t | p_i = p_j = 0).$$

Пример 6.4. Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема которой представлена на рис. 6.9.

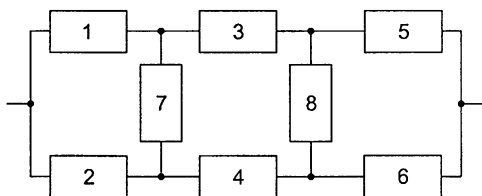


Рис. 6.9. Система со сложной структурой типа «лестница»

Решение. Проводя разрезание по элементам 7 и 8, получим четыре эквивалентных схемы, каждая из которых относится к классу последовательно-параллельных схем (рис. 6.10).

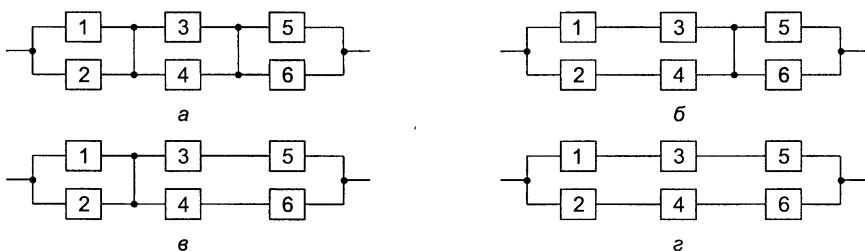


Рис. 6.10. Эквивалентные схемы системы со сложной структурой типа «лестница»

Используя формулы из 6.2, получим:

$$P_c(t) = p_7 p_8 (1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4)(1 - q_5 q_6) + q_7 p_8 (1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4)) \times \\ \times (1 - q_5 q_6) + p_7 q_8 (1 - (1 - p_3 p_5)(1 - p_4 p_6))(1 - q_1 q_2) + q_7 q_8 \times \\ \times (1 - (1 - p_1 p_3 p_5)(1 - p_2 p_4 p_6)). \quad (6.78)$$

При $p_5 = p_6 = p_8 = 1$ формула (6.78) совпадает с (6.76).

6.3.3. Логико-вероятностный метод

Основная идея логико-вероятностного метода состоит в использовании математического аппарата булевой алгебры на начальной стадии анализа надежности структурно сложных систем [4]–[6]. Построение расчетной формулы происходит в три этапа.

Этап 1. Каждому элементу сопоставляется логическая переменная x_i , принимающая два значения: 1, если элемент работоспособен, и 0, если неработоспособен. Затем из условий работоспособности системы составляется логическая функция работоспособности (ЛФРС) вида $f(X)$, где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор-строка логических переменных, многомерный аргумент функции. Функция $f(X) = 1$, если есть хотя бы один работоспособный путь от входного полюса к выходному. Путь работоспособен, если работоспособны все входящие в него элементы. Каждому пути в логической функции работоспособности соответствует элементарная конъюнкция булевых переменных, соответствующих входящим в путь элементам, в $f(X)$ есть дизъюнкция всех элементарных конъюнкций, соответствующих возможным путям между входным и выходным полюсами. Полученная таким образом форма функции является исходной.

Этап 2. Исходная форма преобразуется к одной из стандартных форм, называемых формами перехода к полному замещению (ФППЗ) и допускающих замещение логических переменных вероятностями, а логических операций – арифметическими.

Этап 3. В стандартной форме логической функции проводится замещение логической переменной x_i вероятностью $p_i = P(x_i = 1)$, отрицания логической переменной x_i' вероятностью $q_i = 1 - p_i = P(x_i = 0)$, дизъюнкции $\vee$ сложением $+$, конъюнкции $\wedge$ умножением $\times$, логического отрицания $\neg$ вычитанием из единицы $1 - P(y = 1)$.

В настоящее время известно несколько форм перехода к полному замещению. Рассмотрим здесь три из них. Для этого сформулируем три теоремы.

Теорема 6.1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) является формой перехода к полному замещению (ФППЗ-1). Доказательство теоремы сводится к констатации того, что конституенты единицы, входящие в СДНФ, ортогональны и поэтому можно использовать формулу сложения исчисления вероятностей для несовместных событий.

Пример 6.5. Логическая функция работоспособности мажорированной системы по схеме «2 из 3» имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3. \tag{6.79}$$

Найти вероятность $P_c = P(f = 1)$.

Решение. Используя правила преобразования логических функций, приведем дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) вида (6.79) к СДНФ:

$$f = x_1x_2x'_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x'_2x_3 \vee x'_1x_2x_3.$$

Отсюда замещением находим:

$$P_c = P(f = 1) = p_1p_2p_3 + p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3.$$

СДНФ является не совсем удобной формой перехода к полному замещению из-за большой трудоемкости преобразований на втором этапе и громоздкого вида конечной формулы. Однако она хорошо приспособлена к формализации процесса анализа.

Теорема 6.2. Бесповторная форма логической функции в базисе «конъюнкция — отрицание» является формой перехода к полному замещению (ФППЗ-2).

Бесповторной называют форму логической функции, если каждая переменная входит в нее не больше одного раза. Для получения бесповторной формы могут использоваться операции поглощения, склеивания, распределительный закон булевой алгебры, а для исключения операции дизъюнкции — правило де Моргана

$$x_1 \vee x_2 = (x'_1 x'_2) '.$$

Пример 6.6. Пусть $f = x_1 \vee x_2 x'_3 \vee x_2 x_4$. Необходимо найти $P_c = P(f = 1)$.

Решение. Сначала с помощью распределительного закона получаем бесповторную форму функции:

$$f = x_1 \vee x_2 (x'_3 \vee x_4).$$

Затем дважды применяем правило де Моргана:

$$f = (x'_1 (x_2 (x_3 x'_4) ')) '.$$

Проводим здесь замещение:

$$P_c = 1 - q_1(1 - p_2(1 - p_3 p_4)).$$

Теорема 6.3. Дизъюнкция ортогональных бесповторных форм в базисе «конъюнкция—отрицание» является формой перехода к полному замещению (ФППЗ-3). ФППЗ-3 имеет вид

$$f = Y_1 \vee Y_1 \vee \dots \vee Y_m, \quad (6.80)$$

где $Y_i Y_j = 0$ для $i \neq j$; Y_i — бесповторная форма в базисе «конъюнкция—отрицание». Теорема 6.3 является обобщением теоремы 6.2. В (6.80) бесповторность должна существовать только в пределах каждого дизъюнктивного члена, а в различных Y_i переменные могут повторяться. Теоремы 6.2 и 6.3 легко доказать, если перейти от булевой алгебры к алгебре событий и использовать формулы сложения и умножения исчисления вероятностей случайных событий.

Основной трудностью в применении логико-вероятностного метода является преобразование исходной формы ЛФРС к виду (6.80). Чтобы сделать это преобразование упорядоченным и пригодным к автоматизации, были разработаны два следующих алгоритма [8], [9].

Алгоритм разрезания. Алгоритм основан на использовании формулы разложения функций в булевой алгебре:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \dots, x_n) \vee x'_1 f(0, x_2, \dots, x_n). \quad (6.81)$$

Оба логических слагаемых в (6.81) ортогональны по построению. Последовательность действий в алгоритме следующая:

1. Подсчитывают количество вхождений каждой переменной в исходную форму f и выбирают букву x_i с наибольшим числом вхождений.

2. Проводят разрезание функции f по переменной x_i в соответствии с формулой (6.81).
3. В каждом из слагаемых выполняют преобразования с целью получить бесповторную форму в базисе $(\vee, \neg)$ типа ФППЗ-2.
4. Если хотя бы в одном из слагаемых не удастся получить ФППЗ-2, то проводят разрезание в этом слагаемом по другой переменной согласно пп.1 и 2 алгоритма. Если же во всех слагаемых получены формы ФППЗ-2, то алгоритм заканчивает работу.

Пример 6.7. С помощью алгоритма разрезания найти вероятность безотказной работы системы с мостиковой структурой (рис. 6.7).

Решение. ЛФРС имеет вид

$$f = x_1(x_3 \vee x_4 x_5) \vee x_2(x_4 \vee x_3 x_5). \quad (6.82)$$

Подсчитывая число вхождений, убеждаемся, что дважды входят три переменные: x_3, x_4, x_5 . Выбираем x_5 и проводим разрезание:

$$f = x_5(x_1(x_3 \vee x_4) \vee x_2(x_3 \vee x_4)) \vee x'_5(x_1 x_3 \vee x_2 x_4).$$

Преобразуем здесь каждое слагаемое к ФППЗ-2:

$$\begin{aligned} f &= x_5(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \vee x'_5(x_1 x_3 \vee x_2 x_4) = \\ &= x_5((x'_1 x'_2) \vee (x'_3 x'_4)) \vee x'_5((x_1 x_3) \vee (x_2 x_4))'. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P_c = P(f = 1) = p_5(1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4) + q_5(1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_4)). \quad (6.83)$$

Формула (6.83) совпадает с (6.76). Это не случайно. Алгоритм разрезания представляет собой иную форму метода эквивалентных схем.

Алгоритм ортогонализации. Исходной формой функции в этом алгоритме является ДНФ. Ее преобразование к ФППЗ-3 основано на использовании следующих формул булевой алгебры:

$$f = Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_m = Q_1 \vee Q'_1 Q_2 \vee Q'_1 Q'_2 Q_3 \vee \dots \vee Q'_1 \dots Q'_{m-1} Q_m; \quad (6.84)$$

$$(xf) \vee x = f'x; \quad (x'f)x = x; \quad (xf'_1)'(xf'_2)' = (x(f'_1 f'_2))'. \quad (6.85)$$

Последовательность действий в алгоритме следующая:

1. Исходную форму ЛФРС преобразуют к ДНФ и все элементарные конъюнкции располагают в порядке возрастания числа букв.
2. ДНФ преобразуют к ортогональной дизъюнктивной форме по формуле (6.84).
3. Каждое слагаемое упрощают с помощью формул (6.85), пока не будут получены неповторные формы ФППЗ-2.
4. Проводят замещение булевых переменных и логических операций.

Пример 6.8. Найти с помощью алгоритма ортогонализации вероятность безотказной работы системы с мостиковой структурой (см. рис. 6.7).

Решение. Функцию (6.82) преобразуем к виду

$$f = x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_1 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5.$$

Проводим ортогонализацию:

$$f = x_1 x_3 \vee (x_1 x_3) \wedge x_2 x_4 \vee (x_1 x_3) \wedge (x_2 x_4) \wedge x_1 x_4 x_5 \vee (x_1 x_3) \wedge (x_2 x_4) \wedge (x_1 x_4 x_5) \wedge x_2 x_3 x_5.$$

Упрощаем с помощью формул (6.85):

$$f = x_1 x_3 \vee (x_1 x_3) \wedge x_2 x_4 \vee x'_2 x'_3 x_1 x_4 x_5 \vee x'_1 x'_4 x_2 x_3 x_5.$$

Отсюда

$$P_c = P(f = 1) = p_1 p_3 + (1 - p_1 p_3) p_2 p_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 q_4 p_5. \quad (6.86)$$

Сравнение формул (6.83) и (6.86) показывает, что в данном примере метод разрезания дает более компактные формулы: формула (6.83) содержит 14 чисел, включая константы, и 14 операций, тогда как формула (6.86) — 17 чисел и 16 операций. В других примерах алгоритм ортогонализации имеет преимущество. В целом по большому количеству примеров различной сложности можно заключить, что ни один из приведенных алгоритмов не имеет ощутимого преимущества. Поэтому оба алгоритма могут быть рекомендованы к применению для решения практических задач.

6.4. Расчет надежности систем при двух типах отказов

Задача расчета надежности при двух типах отказов возникает в процессе анализа резервированных структур, состоящих из ЭРИ, таких как диоды, резисторы, конденсаторы, реле, переключатели и пр. Для них последовательное или параллельное соединение в логической структуре соответствует последовательному или параллельному электрическому соединению. Каждый элемент системы, имеющий два типа отказов, может находиться в одном из трех состояний: 0 — работоспособное состояние, 1 — обрыв, 2 — короткое замыкание. Состояния 1 и 2 — неработоспособные, поэтому вероятность отказа i -го элемента можно представить в виде

$$q_i(t) = q_{1i}(t) + q_{2i}(t),$$

а вероятность безотказной работы — в виде

$$p_i(t) = p_{0i}(t) = 1 - q_{1i}(t) - q_{2i}(t),$$

где $q_{ij}(t)$ — вероятность отказа типа j ($j = 1, 2$). При постоянных интенсивностях отказов задают два числа: λ_{0i} и $\lambda_{.i}$ — интенсивности отказов типа «обрыв» и «короткое замыкание» либо λ_i и φ_i — суммарная интенсивность отказов элемента и доля отказов типа «обрыв». Тогда

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t}; \quad q_{1i}(t) = \varphi_i (1 - e^{-\lambda_i t}); \quad q_{2i}(t) = (1 - \varphi_i) (1 - e^{-\lambda_i t}).$$

Для расчета показателей надежности последовательно-параллельных систем удобно использовать принцип декомпозиции, разбивая исходную структуру на некоторую совокупность структур, в каждой из которых элементы соединены либо последовательно, либо параллельно.

Система с последовательным соединением элементов работоспособна, если ни один из ее элементов не имеет отказов типа «обрыв» и хотя бы один элемент работоспособен. Поэтому при независимости отказов элементов вероятности состояний находят по формулам

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= \prod_{i=1}^n p_i(t) + \sum_{i=1}^n q_{2i}(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n p_j(t) + \\
 &+ \sum_{i, k=1}^n q_{2i}(t) q_{2k}(t) \prod_{j=1, j \neq i, j \neq k}^n p_j(t) + \dots + \sum_{i=1}^n p_i(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n q_{2j}(t); \\
 Q_2(t) &= \prod_{i=1}^n q_{2i}(t); \quad Q_1(t) = 1 - P_0(t) - Q_2(t).
 \end{aligned}$$

При наличии одинаковых элементов имеем:

$$P_0(t) = (p(t) + q_2(t))^n - q_2^n(t); \quad Q_2(t) = q_2^n(t); \quad Q_1(t) = 1 - (p(t) + q_2(t))^n. \quad (6.87)$$

Система с параллельным соединением элементов работоспособна, если ни один из ее элементов не имеет отказа типа «короткое замыкание» и хотя бы один элемент работоспособен. Поэтому вероятности состояний такой системы

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= \prod_{i=1}^n p_i(t) + \sum_{i=1}^n q_{1i}(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n p_j(t) + \\
 &+ \sum_{i, k=1}^n q_{1i}(t) q_{1k}(t) \prod_{j=1, j \neq i, j \neq k}^n p_j(t) + \dots + \sum_{i=1}^n p_i(t) \prod_{j=1, j \neq i}^n q_{1j}(t); \\
 Q_1(t) &= \prod_{i=1}^n q_{1i}(t); \quad Q_2(t) = 1 - P_0(t) - Q_1(t).
 \end{aligned}$$

При наличии одинаковых элементов

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= (p(t) + q_1(t))^n - q_1^n(t); \quad Q_1(t) = q_1^n(t); \\
 Q_2(t) &= 1 - (p(t) + q_1(t))^n.
 \end{aligned} \quad (6.88)$$

Пример 6.9. Сравнить по вероятности безотказной работы две диодные схемы (рис. 6.11), полагая, что в обеих схемах диоды имеют одинаковые интенсивности отказов λ , но различные доли отказов типа «обрыв»: φ_1 в схеме а и φ_2 в схеме б. Отказы диодов независимы.

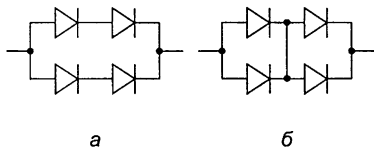


Рис. 6.11. Диодные схемы

Решение. Для схемы а необходимо формулы (6.87) подставить в (6.88). Тогда

$$\begin{aligned}
 P_c(t) &= P_0^2(t) + 2P_0(t)Q_1(t) = p(t)(p(t) + 2q_2(t))(p(t)p(t) + 2q_2(t)) + \\
 &+ 2(1 - (p(t) + q_2(t))^2) = p(t)(p(t) + 2q_2(t))(2 - (p(t) + q_2(t))^2 - q_2^2(t)); \\
 Q_{c1}(t) &= Q_1^2(t) = (1 - (p(t) + q_2(t))^2)^2; \\
 Q_{c2}(t) &= 1 - (P_0(t) + Q_1(t))^2 = 1 - (1 - Q_2(t))^2 = 1 - (1 - q_2^2(t))^2.
 \end{aligned} \quad (6.89)$$

Если здесь представить $q_1(t) = \varphi_1 q(t)$, $q_2(t) = (1 - \varphi_1)q(t)$, то формулы (6.89) приобретают вид

$$P_c(t) = p(t)(1 + q(t)(1 - 2\varphi_1))(2 - p^2(t) - 2q(t)(1 - \varphi_1)(1 - \varphi_1 q(t)));$$

$$Q_{c1}(t) = (1 - (1 - \varphi_1 q(t))^2)^2; \quad Q_{c2}(t) = 1 - (1 - (1 - \varphi_1)^2 q^2(t))^2. \quad (6.90)$$

Система с раздельным резервированием (рис. 6.11, б) имеет следующие характеристики:

$$P_c(t) = p(t)(p(t) + 2q_1(t))(2 - (p(t) + q_1(t))^2 - q_1^2(t));$$

$$Q_{c1}(t) = 1 - (1 - q_1^2(t))^2; \quad Q_{c2}(t) = (1 - (1 - (p(t) + q_1(t))^2)^2). \quad (6.91)$$

Если $q_1(t) = \varphi_2 q(t)$, $q_2(t) = (1 - \varphi_1)q(t)$, то формулы (6.91) приобретают вид

$$P_c(t) = p(t)(p(t) + 2\varphi_2 q(t))(2 - p^2(t) - 2\varphi_2 q(t)(p(t) + \varphi_2 q(t)));$$

$$Q_{c1}(t) = 1 - (1 - \varphi_2^2 q^2(t))^2; \quad Q_{c2}(t) = (1 - (p(t) + \varphi_2 q(t))^2)^2. \quad (6.92)$$

Если доли отказов типа «обрыв» в обеих схемах совпадают ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$), то с помощью (6.90) и (6.92) можно установить, что схемы имеют одинаковую надежность при $\varphi = 0,5$, при $\varphi > 0,5$ большую вероятность безотказной работы имеет схема раздельного резервирования (схема б), а при $\varphi < 0,5$ — схема общего резервирования (схема а). При неравных φ_1 и φ_2 вероятности совпадают в двух случаях: при $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$. Это значит, что схема а с отказами типа «обрыв» эквивалентна по надежности схеме б с отказами типа «короткое замыкание», и наоборот, схема б с отказами типа «обрыв» эквивалентна схеме а с отказами типа «короткое замыкание».

Список литературы

1. Половко А. М. Основы теории надежности. — М.: Наука, 1964. — 446 с. — Гл. 5–7.
2. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965. — 524 с. — Гл. 5.
3. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ: Учеб. пособие / ЛПИ. — Л., 1975. — 218 с. — Гл. 5.
4. Рябилин И. А., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. — М.: Радио и связь, 1981. — 264 с.
5. Черкесов Г. Н. Проектирование систем контроля с учетом надежности. — М.: Знание, 1989. — 66 с.
6. Черкесов Г. Н., Можаяев А. С. Логико-вероятностные методы расчета надежности структурно-сложных систем. — М.: Знание, 1991. — 64 с.
7. Шеннон К. Работы по математической теории информации и кибернетике. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 830 с.

8. *Мерекин Ю. В.* Решение задач вероятностного расчета одноктактных схем методом ортогонализации // Вычислительные системы. Вып. 5 / СО АН СССР. — Новосибирск, 1962. — С. 10—22.
9. *Малюгин В. Д.* Один метод расчета надежности одноктактных схем // Вычислительные системы. Вып. 13 / СО АН СССР. — Новосибирск, 1964. — С. 15—26.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите перечень методов расчета надежности и условий их применения.
2. Назовите два основных правила расчета надежности систем с последовательно-параллельных структурой. В чем заключается принцип декомпозиции?
3. Каковы основные этапы расчета надежности при использовании марковской модели?
4. Назовите основное свойство резервирования.
5. Перечислите виды отказов переключателей резерва и способы их учета.
6. В чем состоит способ учета характеристик средств диагностирования при расчете надежности резервированной системы?
7. Дайте понятие сложной структуры и ее признаков.
8. Приведите перечень методов расчета надежности систем со сложной структурой.
9. Назовите основные этапы логико-вероятностного метода. Какие существуют формы перехода к полному замещению?
10. В чем заключается способ учета двух типов отказов в элементах системы?

Глава 7

Надежность восстанавливаемых резервированных систем

7.1. Модели надежности восстанавливаемых резервированных систем

При формировании модели надежности восстанавливаемой резервированной системы должны быть указаны:

- ☐ вид и характеристики потоков отказов элементов;
- ☐ порядок восстановления и характеристики процесса восстановления (распределение времени восстановления, количество бригад в ремонтном органе, обеспеченность запасными элементами, организация очереди при ожидании восстановления);
- ☐ метод контроля работоспособности системы и ее элементов и характеристики системы контроля и диагностирования;
- ☐ метод резервирования;
- ☐ способ и время переключения резерва;
- ☐ график работы системы и ее отдельных элементов.

Используя эти сведения, для каждого элемента восстанавливаемой системы нетрудно указать состояние, в котором он может находиться: работа, проверка работоспособности, локализация отказа, ожидание ремонта, ремонт, пребывание в резерве, включение в работу и т. д. В каждом конкретном случае этот перечень может сокращаться (путем объединения названных состояний или расширяться за счет новых состояний). Если перенумеровать состояния в некотором порядке, то для i -го элемента удастся ввести функцию $\xi_i(t)$, которая при заданном t явля-

ется случайной величиной, принимающей одно из дискретных значений из заданного множества. Совокупность состояний элементов определяет состояние системы. Для обозначения состояний системы из n элементов используют значения вектора $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$. Ясно, что при конечном числе состояний элементов число состояний системы также конечно. Процесс функционирования системы можно представить как процесс изменения состояний, в котором время пребывания в каждом из состояний и переходы из одного состояния в другие подчиняются определенным вероятностным закономерностям. В зависимости от этих закономерностей все модели надежности можно разбить на четыре группы: модели независимых событий, марковские, полумарковские, немарковские. Моделью независимых событий называют такую модель, в которой компоненты вектора $\xi_c(t)$ — независимые случайные процессы. Вводя события $A_{ij} = (\xi_i(t) = j, \text{ состоящие в том, что } i\text{-й элемент в момент } t \text{ окажется в состоянии } j, \text{ анализ вероятностных характеристик случайного процесса функционирования можно свести к анализу характеристик сложного случайного события, которое состоит в том, что система в момент } t \text{ окажется в заданном состоянии, с помощью алгебры независимых событий и классических методов исчисления вероятностей.}$

Модель надежности системы называют *марковской*, если вероятностные характеристики надежности системы в некотором промежутке времени t зависят от того, в каком состоянии система была в начальный момент времени, и не зависят от того, каким образом система попала в это состояние и сколько времени она в нем находилась до начала рассматриваемого промежутка. Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы модель надежности была марковской, являются:

1. экспоненциальность распределения времени пребывания в каждом из состояний с параметром λ_i , зависящим только от номера состояния;
2. постоянство условных вероятностей перехода p_{ij} из состояния i в состояние j (при условии, что состояние изменилось).

Таким образом, чтобы полностью задать процесс функционирования в марковской модели, необходимо задать множество параметров $\{\lambda_i\}$ и матрицу условных вероятностей $P = \{p_{ij}\}$. Вместо матрицы P можно задавать матрицу интенсивностей переходов $\Lambda = \lambda_{ij}$, где $\lambda_{ij} = \lambda_{p_{ij}}$.

При продолжительной эксплуатации система может бывать в каждом из своих состояний, причем неоднократно. Если собрать вместе все интервалы времени пребывания в i -м состоянии, то получим последовательность моментов времени, являющихся одновременно моментами выхода и возвращения в состояние i . Назовем эту последовательность потоком восстановлений i -го состояния. В каждой системе потоков восстановлений столько, сколько у нее имеется различных состояний. В марковской модели все потоки восстановлений простейшие с параметром λ_i .

Модель надежности системы, называют *полумарковской*, если вероятностные характеристики надежности системы в некотором промежутке времени зависят от того, в каком состоянии система была в начальный момент времени и сколько времени она находилась в нем до рассматриваемого интервала, но не зависят от того, каким образом она попала в начальное состояние. В полумарковской модели интервалы времени пребывания в каждом из состояний могут иметь любое

неэкспоненциальное распределение $F_i(t)$, зависящее от номера состояния, а условные вероятности переходов p_{ij} , как и в марковской модели, должны быть постоянными. Другим признаком полумарковской модели является то, что все потоки восстановления состояний в системе ординарные с ограниченным последствием.

Модели надежности системы, которые не удается отнести ни к одному из описанных классов, называют *немарковскими*.

7.2. Методы анализа надежности восстанавливаемых резервированных систем

Выбор метода анализа надежности восстанавливаемых резервированных систем в значительной степени определяется классом построенной модели надежности. В настоящее время основными классами моделей, исследуемых в теории надежности, являются модели независимых событий, марковские и полумарковские модели. Для их анализа используются методы исчисления вероятностей, методы теории марковских случайных процессов, в частности, схема гибели и размножения, а также методы, основанные на составлении интегральных уравнений [1], [2].

7.2.1. Методы исчисления вероятностей. Методы анализа сложных структур

Методы исчисления вероятностей, а также методы анализа сложных структур применяются для расчета коэффициента готовности в том случае, если в системе используется нагруженное резервирование и имеется неограниченное восстановление, то есть каждый элемент, входящий в резервную группу с параллельным соединением (см. рис. 5.2) или в систему со сложной структурой (см. рис. 6.7), восстанавливается автономно независимо от других элементов. Прочие условия, при которых правомерно применение этих методов, такие же, как в случае невозстанавливаемых систем (см. 6.1.1 и 6.3). Эти условия обеспечивают независимость процессов функционирования различных элементов как по отказам, так и по восстановлению. Поэтому при анализе показателей готовности системы можно применять схему независимых событий и использовать в расчетах формулы главы 6, лишь заменив всюду вероятности безотказной работы коэффициентами готовности, а вероятности отказа — коэффициентами простоя.

Пример 7.1. Для повышения надежности в системе использовано общее нагруженное резервирование с целой кратностью (рис. 6.1, а). Найти коэффициент готовности системы, если известно, что отказы элементов — независимые события, восстановление различных подсистем проводится различными бригадами, число бригад, восстанавливающих каждую подсистему, равно r , при отказе одного из элементов подсистемы остальные работоспособные элементы на время ремонта либо выключаются (режим А), либо не выключаются (режим Б). Рассмотреть три случая: (А; $r = 1$); (Б; $r = 1$); (Б; $r = n$).

Решение. Применяя принцип декомпозиции, найдем сначала коэффициент готовности одной подсистемы с помощью формул (4.16), (4.21) и (4.12). Затем, используя схему независимых событий в параллельном соединении, найдем по формуле (6.2) искомое выражение для трех заданных вариантов условий эксплуатации:

$$K_{r.c} = \begin{cases} 1 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} / \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) \right)^{m+1}, & (\text{А}, r = 1); \\ 1 - \left(\sum_{i=1}^n A_n^i \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i / \left(1 + \sum_{i=1}^n A_n^i \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right) \right)^{m+1}, & (\text{Б}, r = 1); \\ 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \right)^{m+1}, & (\text{Б}, r = n). \end{cases}$$

7.2.2. Метод, основанный на использовании обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова

Метод, основанный на использовании обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова, применяется для анализа надежности системы с марковской моделью и называется далее *методом Колмогорова*. Он является обобщением метода, рассмотренного в 6.1.2, на тот случай, когда в системе допускается восстановление в процессе работы. При этом в графе состояний появляются дополнительные переходы, вызванные окончанием ремонта отдельных элементов, в том числе переходы из множества неработоспособных состояний системы E_- в работоспособные E_+ . Интенсивности этих переходов зависят от интенсивности восстановления работоспособности элементов в ремонтном органе и способа организации очереди на обслуживание и должны быть постоянными, так как только тогда правомерно использование марковской модели функционирования системы.

С помощью метода Колмогорова можно находить как показатели безотказности (вероятности отказа и безотказной работы, частота и интенсивность отказов, средняя наработка до первого отказа), так и показатели готовности (функция и коэффициент готовности).

При составлении расчетной формулы для функции готовности рекомендуется следующая последовательность действий.

1. Составить граф состояний системы и в нем указать все интенсивности переходов, вызванных отказами элементов Λ_{ij} и восстановлением элементов M_{ij} .
2. На графе состояний указать границу подмножеств работоспособных E_+ и неработоспособных E_- состояний.
3. Составить систему дифференциальных уравнений относительно вероятностей $P_i(t)$ того, что система в момент t окажется в состоянии i . Повторяя рассуждения, использованные при выводе (6.13), находим, что уравнения этой системы имеют следующий вид:

$$P'_i(t) = - \left(\sum_{j \in L_{1j}} \Lambda_{ij} + \sum_{v \in L_{2i}} M_{iv} \right) P_i(t) + \sum_{k \in K_{1i}} \Lambda_{ki} P_k(t) + \sum_{s \in K_{2i}} M_{si} P_s(t),$$

где L_{1i} и L_{2i} — подмножества состояний, в которые система может перейти из состояния i ; K_{1i} и K_{2i} — подмножества состояний, из которых возможны переходы в состояние i . Система уравнений (7.1) решается при начальных условиях $P_i(0) = p_{i0}$. В отсутствие восстановления интенсивности переходов $M_{iv} = M_{si} = 0$ и система (7.1) совпадает с (6.13).

4. В (7.1) выполняют операционное преобразование по Карсону и получают систему алгебраических уравнений

$$\left(s + \sum_{j \in L_{1j}} \Lambda_{ij} + \sum_{v \in L_{2i}} M_{iv} \right) P_i^*(s) - \sum_{k \in K_{1i}} \Lambda_{ki} P_k^*(s) - \sum_{s \in K_{2i}} M_{si} P_s^*(s) = s p_{i0}. \quad (7.1)$$

Отсюда по правилу Крамера находят изображения $P_i^*(s)$. При этом следует иметь в виду, что

$$P_0^*(s) + P_1^*(s) + \dots + P_N^*(s) = 1. \quad (7.2)$$

5. Составить выражение в операционной форме для функции готовности (нестационарного коэффициента готовности):

$$K_{r.c}^*(s) = \sum_{i \in E_+} P_i^*(s) = 1 - \sum_{i \in E_-} P_i^*(s). \quad (7.3)$$

6. В (7.3) выполнить обратное преобразование и получить искомую функцию $K_{r.c}(t)$.

Такая последовательность действий уже была использована в 3.3 при определении $K_r(t)$ для восстанавливаемого элемента. Там граф содержал только два состояния, а система (7.1) состояла только из двух уравнений. Приведенную здесь методику можно рассматривать как обобщение методики, изложенной в 3.3, на случай системы с графом состояний произвольной конфигурации.

Чтобы найти коэффициент готовности системы $K_{r.c}$, совсем не обязательно знать функцию $K_{r.c}(t)$ или $K_{r.c}^*(s)$. Можно показать, что при увеличении t вероятности $P_i(t)$ асимптотически приближаются к постоянным значениям p_i , а их производные $P'_i(t)$ стремятся к нулю. Полагая в (7.1) $t \rightarrow \infty$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left(\sum_{j \in L_{1j}} \Lambda_{ij} + \sum_{v \in L_{2i}} M_{iv} \right) p_i - \sum_{k \in K_{1i}} \Lambda_{ki} p_k - \sum_{s \in K_{2i}} M_{si} p_s = 0. \quad (7.4)$$

Кроме того, из (7.2) имеем

$$p_0 + p_1 + \dots + p_N = 1. \quad (7.5)$$

Из (7.4) и (7.5) находим:

$$K_{r.c} = \sum_{i \in E_+} p_i = 1 - \sum_{i \in E_-} p_i. \quad (7.6)$$

Методика составления уравнений для вероятности отказа системы несколько отличается от методики для функции готовности. В восстанавливаемой системе вероятность отказа $Q_c(t)$ уже не является локальной характеристикой, относящейся к состоянию системы в момент времени t , как это было в невосстанавливаемой системе. Вероятность $Q_c(t)$ выражает вероятность того, что внутри промежутка длительностью t произойдет хотя бы один переход в одно из неработоспособных состояний. При этом в момент t система может оказаться уже работоспособной. Дифференциальные же уравнения по самому принципу их составления выражают связь функций в момент t . Чтобы воспользоваться аппаратом дифференциальных уравнений и при определении интервальной характеристики — вероятности отказа, применяется искусственный прием — введение поглощающих состояний. Попад в поглощающее состояние, система уже не выходит из него до конца рассматриваемого промежутка времени, «запоминая» переход в него внутри промежутка. Чтобы «запомнить» отказ системы, необходимо сделать поглощающими все неработоспособные состояния системы, в которые возможен переход из какого-либо работоспособного состояния (так называемые граничные состояния). Для этого в графе состояний запрещаются все переходы из граничных неработоспособных состояний в множество работоспособных. Запрет некоторых переходов вовсе не означает, что в реальной системе прекращается восстановление работоспособности. Введение в математической модели поглощающих состояний соответствует введению в реальной системе индикаторов состояний, которые зажигаются при возникновении отказа, но не гасятся после восстановления работоспособности. После внесения изменений в граф состояний составляют уравнения типа (7.1) для всех работоспособных состояний, только в них полагают равными нулю интенсивности M_{si} , соответствующие запрещенным переходам. Кроме того, составляют уравнения для вероятности граничных неработоспособных состояний. Так как эти состояния поглощающие, уравнения приобретают вид

$$P'_i(t) = \sum_{k \in K_{i_i}} \Lambda_{ki} P_k(t). \quad (7.7)$$

Уравнения (7.1) и (7.7) решаются с помощью операционного преобразования. Порядок системы уравнений (7.1) и (7.7) меньше порядка системы для определения функции готовности за счет исключения неработоспособных состояний, не являющихся граничными.

7.2.3. Метод, основанный на использовании интегральных уравнений

Метод анализа надежности восстанавливаемых резервированных систем, основанный на использовании интегральных уравнений, используется при анализе надежности систем, описываемых полумарковскими или немарковскими моделями [5], [6]. Основная идея метода состоит в том, что в процессе функционирования системы отыскиваются особые моменты времени (особые точки), обладающие тем свойством, что если наблюдение за процессом начинается с особой точки, то вероятностные характеристики надежности системы определяются только ее начальным состоянием и не зависят от того, как протекал процесс до начала рассматриваемого интервала. Это свойство называют марковским.

Особые точки также называют марковскими. Они обычно совпадают с моментами изменения состояния системы. При наличии особых точек случайный процесс функционирования будет полумарковским, и тогда можно составить систему интегральных уравнений.

Пусть $P_k(t)$ — вероятность безотказной работы системы в течение времени t при условии того, что в начальный момент, являющийся марковским, система находилась в состоянии k ; $1 - F_k(t)$ — вероятность того, что система в течение времени t проработает безотказно, не выходя из состояния k ; $P_{ki}(t)$ — функция распределения времени между соседними марковскими моментами: моментами перехода в состояние k и в состояние i . Система может проработать безотказно в течение времени t следующими несовместными способами:

1. не выходя из состояния k ;
2. перейдя в момент $x < t$ в соседнее работоспособное состояние i , а затем проработав безотказно в течение $t - x$, начиная уже из состояния $i \in E_+$. Суммируя вероятности несовместных событий, получаем:

$$P_k(t) = 1 - F_k(t) + \sum_{i \in E_+} \int_0^t P_i(t-x) dP_{ki}(x), \quad k \in E_+, \quad (7.8)$$

где $F_k(t)$ — вероятность того, что система откажет, находясь в состоянии k . Если удастся выразить $P_{ki}(t)$ через известные функции распределения, то, составляя уравнения (7.8) для всех k , получают замкнутую систему интегральных уравнений Вольтера с разностным ядром, которую решают затем аналитически или численно, определяя искомую функцию $P_c(t) = P_0(t)$, где 0 — начальное состояние системы.

Система может иметь состояние, максимально возможное время пребывания в котором ограничено величиной t_s . Тогда при $t > t_s$ дифференциал функции $dP_{si}(x) = 0$, и вместо (7.8) получим:

$$P_s(t) = \sum_{i \in E_s} \int_0^{t_s} P_i(t-x) dP_{si}(x). \quad (7.9)$$

Аналогичную систему интегральных уравнений можно составить и относительно вероятностей отказа:

$$Q_k(t) = \sum_{i \in E_-} P_{ki}(t) + \sum_{i \in E_+} \int_0^t Q_i(t-x) dP_{ki}(x), \quad k \in E_+. \quad (7.10)$$

Выполняя в (7.8) и (7.10) операционное преобразование Лапласа—Карсона, получим системы алгебраических уравнений относительно изображений для функций $P_k(t)$ или $Q_k(t)$. Системы имеют следующий вид:

$$P_k^*(s) = 1 - F_k^*(s) + \sum_{i \in E_+} P_i^*(s) P_{ki}^*(s), \quad k \in E_+; \quad (7.11)$$

$$Q_k^*(s) = \sum_{i \in E_-} P_{ki}^*(s) + \sum_{i \in E_+} Q_i^*(s) P_{ki}^*(s), \quad k \in E_+. \quad (7.12)$$

Эти системы эквивалентны в том смысле, что они дают одинаковые результаты при определении вероятностей $P_k(t) = 1 - Q_k(t)$.

Из системы уравнений (7.11) можно получить систему алгебраических уравнений относительно средних значений времени до отказа $\bar{T}_k$ при условии, что k — начальное состояние. Для этого надо использовать формулу (1.12) и тауберovu теорему. Тогда

$$\bar{T}_k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P_k^*(s). \quad (7.13)$$

Разделив почленно уравнение (7.11) на s и выполнив предельный переход, получим:

$$\bar{T}_k = \bar{\tau}_k + \sum_{i \in E_+} \bar{T}_i p_{ki}, \quad k \in E_+, \quad \bar{\tau}_k = \int_0^t (1 - F_k(x)) dx, \quad p_{ki} = \lim_{s \rightarrow 0} P_{ki}^*(s). \quad (7.14)$$

В марковской модели надежности

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t}, \quad \bar{\tau}_k = 1 / \lambda_k, \quad p_{ki} = \lambda_{ki} / \lambda_k.$$

Тогда системы уравнений (7.11) и (7.14) приобретают вид

$$P_k^*(s) = \frac{s}{s + \lambda_k} + \sum_{i \in E_+} P_i^*(s) \frac{\lambda_{ki}}{s + \lambda_k}, \quad k \in E_+; \\ \bar{T}_k = \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{i \in E_+} \bar{T}_i \frac{\lambda_{ki}}{\lambda_k}, \quad k \in E_+, \quad \bar{\tau}_k = 1 / \lambda_k, \quad p_{ki} = \lambda_{ki} / \lambda_k. \quad (7.15)$$

Чтобы найти стационарное значение средней наработки на отказ (1.21), необходимо учесть, что в резервированной системе может быть несколько вариантов перехода из множества работоспособных состояний E_+ в множество неработоспособных состояний E_- и обратно. В этом случае среднюю наработку на отказ можно трактовать как среднее время пребывания полумарковского процесса в множестве состояний E_+ . Согласно теории полумарковских случайных процессов, среднюю наработку на отказ находят по формуле

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{E_+} = \frac{\sum_{i \in E_+} \pi_i \bar{\tau}_i}{\sum_{i \in H_+} \pi_i \sum_{j \in E_-} p_{ij}} = \frac{\sum_{i \in E_+} \pi_i \bar{\tau}_i}{\sum_{i \in H_-} \pi_i \sum_{j \in E_+} p_{ij}}, \quad (7.16)$$

где H_+ — подмножество граничных состояний, имеющих прямой переход в E_- , множества работоспособных состояний E_+ ; H_- — подмножество граничных состояний множества E_- , определяемое аналогично; π_i — стационарные вероятности состояний вложенной марковской цепи, определяемые из системы уравнений

$$\pi_k = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ik}, \quad k \in E, \quad \sum_{i \in E} \pi_i = 1. \quad (7.17)$$

Оба варианта формулы (7.16) дают один и тот же результат. При практическом использовании нужно выбирать тот из них, который дает более компактную формулу.

В случае марковской модели формула (7.16) приобретает вид

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{E_+} = \frac{\sum_{i \in E_+} p_i}{\sum_{i \in H_+} p_i \sum_{j \in E_-} \lambda_{ij}} = \frac{\sum_{i \in E_+} p_i}{\sum_{i \in H_-} p_i \sum_{j \in E_+} \lambda_{ij}}, \quad (7.18)$$

где p_i находят с помощью системы уравнений (7.4) и (7.5).

Если заявка на выполнение работ поступает в резервированную систему в случайный момент времени на стационарном участке эксплуатации, то первый интервал до ближайшей смены состояния имеет распределение $F_{1k}(t)$, отличное от распределения $F_k(t)$, входящего в уравнение (7.8). Используя формулу (3.38), получим:

$$F_{1k}(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_k} \int_0^t (1 - F_k(x)) dx; \quad F_{1k}^*(s) = \frac{1}{s\bar{\tau}_k} (1 - F_k^*(s)). \quad (7.18a)$$

Вероятность безотказной работы в этом случае находят по формуле

$$P_{1c}^{(k)}(t) = 1 - F_{1k}(t) + \sum_{i \in E_1} \int_0^t P_i(t-x) q_{ki}(x) dF_{1k}(x); \quad q_{ki}(x) = P'_{ki}(x) / F'_k(x). \quad (7.18б)$$

Вероятности $P_i(t)$ определяются из системы интегральных уравнений (7.8). Функции $q_{ki}(x)$ — это вероятности перехода из состояния k в состояние i при условии, что в момент x переход имел место.

Коэффициент оперативной готовности системы определяют по формуле

$$K_{o.r.c.}(t) = \sum_{k \in E_+} p_k P_{1c}^{(k)}(t), \quad p_k = \pi_k \bar{\tau}_k / \sum_{i \in E} \pi_i \bar{\tau}_i. \quad (7.18в)$$

Значения $\bar{\tau}_k$ и π_k находят по формулам (7.14) и (7.17).

7.3. Расчет надежности систем с последовательно-параллельной структурой

Рассмотрим систему, использующую общее резервирование с дробной кратностью. Система состоит из k основных и m резервных элементов (см. рис. 5.2, в, з), подключаемых постоянно или способом замещения при отказе одного из основных элементов с помощью идеального переключателя. Все элементы (основные и резервные) одинаковы, и каждый из них при более детальном анализе может быть представлен системой с последовательным соединением элементов. После обнаружения отказа неработоспособный элемент немедленно отключают и направляют в ремонтный орган, откуда после восстановления работоспособности его вновь возвращают в систему и включают в работу, если общее число работоспособных элементов меньше k , либо оставляют в резерве, если это число не менее k .

Из-за того что элементы неразличимы с точки зрения надежности, система имеет всего $n = k + m + 1$ различных состояний. Присваивая каждому из них номер, равный числу неработоспособных элементов, получим граф состояний, приведенный на рис. 7.1.

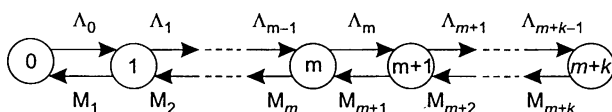


Рис. 7.1. Граф состояний системы при общем резервировании с дробной кратностью

Вследствие ординарности суммарного потока отказов элементов и потока восстановлений из состояния i возможен переход лишь в два соседних состояния: в $i + 1$ при отказе еще одного элемента и в $i - 1$ при восстановлении работоспособности одного из i элементов. Далее рассмотрим два типа моделей надежности: марковскую и полумарковскую.

7.3.1. Марковская модель надежности

Полагая, что интенсивности отказов и восстановлений элементов одинаковы ($\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu$), получим граф состояний с постоянными интенсивностями переходов Λ_i и M_i , зависящими от числа работоспособных элементов, режима основных и резервных элементов, числа бригад в ремонтном органе (см. рис. 7.1). При анализе надежности найдем три основных ее характеристики: вероятность безотказной работы, среднюю наработку до первого отказа и коэффициент готовности.

Вероятность безотказной работы

В графе состояний неработоспособными являются состояния $m + 1, m + 2, \dots, m + k$. Запрещая переход из состояния m в состояние $m + 1$ с интенсивностью M_{m+1} , получим систему дифференциальных уравнений вида (7.1) и (7.7):

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\Lambda_0 P_0(t) + M_1 P_1(t); \\ P'_i(t) &= \Lambda_{i-1} P_{i-1}(t) - (\Lambda_i + M_i) P_i(t) + M_{i+1} P_{i+1}(t), \quad i = 1 \dots m; \\ P'_{m+1}(t) &= \Lambda_m P_m(t). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Начальные условия таковы: $P_0(0) = 1; P_i(0) = 0, i > 0$.

Выполняя здесь операционное преобразование по Карсону, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (s + \Lambda_0) P_0^*(s) - M_1 P_1^*(s) &= s; \\ \Lambda_{i-1} P_{i-1}^*(s) - (s + \Lambda_i + M_i) P_i^*(s) + M_{i+1} P_{i+1}^*(s), \quad i = 1 \dots m; \\ s P_{m+1}^*(s) &= \Lambda_m P_m^*(s). \end{aligned}$$

Отсюда по правилу Крамера найдем изображение для вероятности отказа как отношение определителей $(k + 2)$ -го порядка. Раскрывая определитель в знаменателе по элементам правого столбца, а затем определитель в числителе — по элементам сначала правого, а затем левого столбца, находим:

$$P_{m+1}^*(s) = \Delta(0) / \Delta(s),$$

где

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s + \Lambda_0 & -M_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda_0 & s + \Lambda_1 + M_1 & -M_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_0 & s + \Lambda_2 + M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + \Lambda_{m-1} + M_{m-1} & M_m \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda_{m-1} & s + \Lambda_m + M_m \end{vmatrix};$$

$$\Delta(0) = (-1)^{m+1} \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_m. \quad (7.20)$$

Определитель $\Delta(s)$ представляет собой полином $(m+1)$ -го порядка относительно s . Разлагая его на множители, имеем:

$$P_{m+1}^*(s) = \Delta(0) / ((s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_{m+1})). \quad (7.21)$$

Используя теперь теорему вычетов для простых полюсов и равенство $s_1 s_2 \cdots s_{m+1} = -\Delta(0)$, находим выражение для вероятности безотказной работы:

$$P_c(t) = 1 - P_{m+1}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} e^{-\lambda_i t} \left/ \prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (1 - s_i / s_j) \right. \quad (7.22)$$

Аналогично находят вероятность безотказной работы системы, если она начинает работу из другого работоспособного состояния $i > 0$. Тогда в системе уравнений (7.19) следует использовать другие начальные условия, а именно: $P_i(0) = 1$; $P_j(0) = 0, j \neq i$.

Чтобы воспользоваться формулой (7.22), необходимо найти зависимость интенсивностей переходов Λ_i и M_i от интенсивностей отказов и восстановления элементов. При вычислении Λ_i необходимо учесть режимы резервных элементов и зависимость между отказами различных элементов. Если отказы элементов независимы, а из m резервных элементов m_1 — это нагруженные, m_2 — облегченные с коэффициентом облегчения k_λ и m_3 — ненагруженные, то интенсивности переходов

$$\Lambda_i = \begin{cases} (k + m_1 + k_\lambda m_2) \lambda, & i \leq m_3; \\ (k + m_1 + k_\lambda (m_2 + m_3 - i)) \lambda, & m_3 \leq i \leq m_2 + m_3; \\ (k + m - i) \lambda, & m_2 + m_3 \leq i \leq m + k, \end{cases} \quad (7.23)$$

где λ — интенсивность отказов одного элемента.

Интенсивности переходов M_i зависят от количества и производительности ремонтных бригад. Если число бригад $r < m + k$, то при $i \leq r$ все отказавшие элементы обслуживаются параллельно, а при $i > r$ все r бригад заняты работой по восстановлению r элементов, а $i - r$ находится в очереди, ожидая обслуживания. Если все бригады имеют одинаковую производительность, обеспечивая восстановление с интенсивностью μ в каждой бригаде, то

$$M_i = \begin{cases} i\mu, & i \leq r; \\ r\mu, & r \leq i \leq m + k. \end{cases} \quad (7.24)$$

Как и в невосстанавливаемых системах (см. 6.2.2, формулу (6.32)), здесь также можно учесть зависимость интенсивностей отказов элементов при постоянном включении резерва от числа работоспособных элементов. Кроме того, схема гибели и размножения позволяет учесть неравную производительность бригад в ремонтном органе. Если i -я бригада обеспечивает восстановление с интенсивностью μ_i , причем $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r$, и загрузка бригад происходит в порядке возрастания номера, то

$$M_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^i \mu_j, & i \leq r; \\ \sum_{j=1}^r \mu_j, & r \leq i \leq m+k. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь более подробно один частный случай, когда на k основных элементов имеется один резервный. Из (7.22) при $m = 1$ находим:

$$P_c(t) = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{s_1(s_2 - s_1)} e^{-s_1 t} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{s_2(s_2 - s_1)} e^{-s_2 t}. \quad (7.25)$$

Значения s_1 и s_2 определяются из разложения определителя $\Delta(s)$ на простые множители

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s + \Lambda_0 & -M_1 \\ -\Lambda_0 & s + \Lambda_1 + M_1 \end{vmatrix} = s^2 + s(\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1) + \Lambda_0 \Lambda_1 = (s + s_1)(s + s_2);$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}(\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1)^2 - \Lambda_0 \Lambda_1}. \quad (7.26)$$

Учитывая, что $s_1 s_2 = \Lambda_0 \Lambda_1$, преобразуем (7.25) к виду

$$P_c(t) = \frac{1}{s_2 - s_1} (s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}). \quad (7.27)$$

В технических системах время восстановления в среднем обычно значительно меньше времени безотказной работы, а интенсивность восстановления, напротив, значительно больше интенсивности отказов. Учитывая это обстоятельство, можно получить приближенное значение $P_c(t)$. Разлагая квадратный корень в (7.26) по степеням $4\Lambda_0 \Lambda_1 / (\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1)^2$ и оставляя главный член, получим $s_1 \cong \Lambda_0 \Lambda_1 / (\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1)^2$ а $s_2 \cong \Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1 \gg s_1$. Вторая экспонента в (7.27) быстро затухает. Поэтому уже при небольших t вместо (7.27) можно пользоваться приближенным выражением

$$P_c(t) \approx \exp\left(-\frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1}\right) = e^{-t/\bar{T}_{0c}}, \quad (7.28)$$

где $\bar{T}_{0c} = (\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1) / \Lambda_0 \Lambda_1$.

Если система начинает работу в состоянии 1, то вероятность безотказной работы

$$P_c^{(1)}(t) = \frac{1}{s_2 - s_1} ((s_2 - \Lambda_1)e^{-s_1 t} - (s_1 - \Lambda_1)e^{-s_2 t}) \approx$$

$$\approx \exp\left(-\frac{\Lambda_0 \Lambda_1 t}{\Lambda_0 + M_1}\right) = \exp(-t / \bar{T}_{0c}^{(1)}). \quad (7.28a)$$

Здесь $\bar{T}_{0c}^{(1)}$ — средняя наработка до отказа системы при стартовом состоянии 1. При нагруженном резервировании $\Lambda_0 = (k+1)\lambda$, $\Lambda_1 = k\lambda$, а при ненагруженном $\Lambda_0 = \Lambda_1 = k\lambda$. Поэтому, согласно (7.28),

$$P_c(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{k(k+1)\lambda^2 t}{\mu + (2k+1)\lambda}\right), & k_\lambda = 1; \\ \exp\left(-\frac{k^2 \lambda^2 t}{\mu + 2k\lambda}\right), & k_\lambda = 0. \end{cases} \quad (7.29)$$

Формулу (7.28) можно обобщить и на случай произвольного числа резервных элементов. При быстром восстановлении, когда $\bar{T}_в < \bar{T}$, вероятность безотказной работы можно рассчитывать по приближенной формуле

$$P_c(t) \approx e^{-t/\bar{T}_{0c}}, \quad (7.29a)$$

где $\bar{T}_{0c}$ — средняя наработка системы до отказа.

Пример 7.2. Запоминающее устройство (ЗУ) с интенсивностью отказов $\lambda = 0,01$ ч⁻¹ предназначено для непрерывной работы каждые сутки в течение $t = 20$ ч. Для повышения надежности использовано постоянное резервирование по схеме «два из трех». Найти вероятность отказа резервированного ЗУ и выигрыш надежности от введения структурного резервирования. Определить, на сколько уменьшится вероятность отказа, если в оперативном интервале времени допускается восстановление отказавших блоков. Время восстановления распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu = 1$ ч⁻¹.

Решение. Без резервирования вероятность отказа ЗУ $Q_c(t) = 1 - \exp(-0,2) = 0,1813$. Из (6.40) находим: $Q_c(t) = 1 - 0,8187^2(1 + 2 \cdot 0,1813) = 0,0866$. Выигрыш надежности по вероятности отказа $G_q = 0,1813/0,0866 = 2,1$. С введением восстановления согласно (7.29) при $k = 2$ вероятность отказа

$$Q_c(t) = 1 - \exp(-0,06 \cdot 0,2 / 1,05) = 1 - \exp(-0,0116) = 0,0115.$$

Выигрыш надежности от резервирования по вероятности отказа $G_Q = 15,8$, в том числе выигрыш от восстановления $G_Q = 7,55$. При уменьшении вдвое среднего времени восстановления выигрыш надежности также возрастает приблизительно вдвое.

Средняя наработка до первого отказа

Для определения средней наработки до первого отказа удобно использовать ее связь с изображением по Карсону для вероятности безотказной работы

$$\bar{T}_{0c} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (1 - Q_c^*(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{dQ_c^*(s)}{ds} \right).$$

Подставляя сюда формулу (7.21), находим:

$$\bar{T}_{0c} = \Delta'(0) / \Delta(0) = \bar{\Delta}'(0), \quad (7.30)$$

где $\bar{\Delta}(s) = \Delta(s) / \Delta(0)$ — нормированный определитель, $\Delta(s)$ и $\Delta(0)$ определяются из (7.20). В частности, при резервировании с кратностью $1/k$ из (7.26) и (7.30) имеем:

$$\bar{T}_{0c} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{s^2}{\Lambda_0 \Lambda_1} + \frac{s(\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1)}{\Lambda_0 \Lambda_1} + 1 \right) \right) = \frac{\Lambda_0 + \Lambda_1 + M_1}{\Lambda_0 \Lambda_1}. \quad (7.31)$$

При $m > 1$ присвоим определителю (7.29) индекс, равный его порядку, и разложим по элементам последнего столбца:

$$\Delta_{m+1}(s) = -(s + \Lambda_m + M_m)\Delta_m(s) - \Lambda_{m-1}M_m\Delta_{m-1}(s). \quad (7.32)$$

Дифференцируя (7.32) по s , полагая $s = 0$ и учитывая (7.30), после некоторых преобразований находим:

$$\bar{T}_{o.c} = \sum_{i=0}^m (1 + \theta_1 + \dots + \theta_i) / \Lambda_i \theta_i. \quad (7.33)$$

Формула (7.33) при $m = 1$ совпадает с (7.30), а при $M_i = 0$ — с (6.18). Сравнивая (6.18) и (7.33), можно найти приращение $\bar{T}_{o.c}$, вызванное восстановлением системы, как разность значений средней наработки в восстанавливаемой и невозстанавливаемой системах:

$$\Delta \bar{T}_{o.c} = \sum_{i=1}^m (1 + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) / \Lambda_i \theta_i. \quad (7.34)$$

Поскольку в технических системах обычно $\Lambda_i \ll M_i$, то в числителе (7.34) можно пренебречь θ_i по сравнению с единицей, а в знаменателе оставить главный член, соответствующий $i = m$. Тогда

$$\Delta \bar{T}_{o.c} \approx 1 / \Lambda_m \theta_m = \frac{M_1 M_2 \dots M_m}{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_m} = \frac{M_1 M_2 \dots M_m}{\Lambda_1 \dots \Lambda_m} \bar{T}_{o.c,0}, \quad (7.35)$$

где $\bar{T}_{o.c,0} = 1 / \lambda_0$ — средняя наработка до отказа нерезервированной системы. При одном резервном элементе

$$\Delta \bar{T}_{o.c} \approx 1 / \Lambda_1 \theta_1 = \frac{M_1}{\Lambda_0 \Lambda_1} = \frac{M_1}{\Lambda_1} \bar{T}_{o.c,0}. \quad (7.36)$$

Из (7.35) и (7.36) следует, что при достаточно быстром восстановлении приращение средней наработки, обусловленное введением восстановления, может значительно превосходить приращение средней наработки, обеспечиваемое резервированием без восстановления.

Среднюю наработку системы до отказа можно получить, не решая систему дифференциальных уравнений (7.19). Для этих целей можно использовать систему алгебраических уравнений (7.15). Согласно графу состояний (см. рис. 7.1), имеем

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{\Lambda_0} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + M_i \bar{T}_{i-1} + \Lambda_i \bar{T}_{i+1}}{\Lambda_i + M_i}, \quad i = 0 \dots m-1;$$

$$\bar{T}_m = \frac{1 + M_m \bar{T}_{m-1}}{\Lambda_m + M_m}.$$

Отсюда находим:

$$\Delta T_0 = \bar{T}_0 - \bar{T}_1 = \frac{1}{\Lambda_0}; \quad \Delta T_i = \bar{T}_i - \bar{T}_{i-1} = \frac{1 + M_i \Delta T_{i-1}}{\Lambda_i}, \quad i = 1 \dots m-1;$$

$$\bar{T}_m = \frac{1}{\Lambda_m} + \frac{M_m}{\Lambda_m} \Delta T_{m-1}. \quad (7.37)$$

Из рекуррентного соотношения (7.37) легко получить формулу

$$\Delta T_i = \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_i}{\Lambda_i \theta_i}, \quad i = 1 \dots m-1, \quad \theta_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{i-1}}{M_1 M_2 \dots M_i}. \quad (7.38)$$

Подставляя (7.38) при $i = m + 1$ в третье уравнение (7.37), имеем:

$$\bar{T}_m = \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_m}{\Lambda_m \theta_m}. \quad (7.39)$$

Теперь используем очевидное равенство

$$\bar{T}_{0c} = \bar{T}_0 = \bar{T}_m + \sum_{i=0}^{m-1} \Delta T_i = \sum_{i=0}^m \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_i}{\Lambda_i \theta_i}.$$

Это выражение совпадает с (7.33). Учитывая, что состояние m является единственным граничным работоспособным состоянием системы, приходим к заключению, что средняя наработка системы на отказ $\bar{T}_{н.с}$ совпадает с величиной $\bar{T}_m$, задаваемой формулой (7.39). Эта же формула следует и из общей формулы (7.18), согласно которой

$$\bar{T}_{н.с} = \frac{K_{г.с}}{p_m \Lambda_m} = \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_m}{p_m \Lambda_m} = \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_m}{\Lambda_m \theta_m},$$

где p_i — стационарная вероятность состояний i . Формула для p_i будет получена далее.

Пример 7.3. Для повышения надежности системы со средней наработкой до первого отказа $\bar{T}_{о.с,0} = 1/\lambda_0 = 100$ ч используется общее дублирование с восстановлением. Найти среднюю наработку резервированной системы, полагая $\mu = 2$ ч⁻¹, и сравнить со средней наработкой той же системы без восстановления.

Решение. Из формулы (7.31) при $M_1 = \mu = 2$ ч⁻¹, $\Lambda_1 = 1/\bar{T}_{о.с,0} = 0,01$ ч⁻¹ и $\Lambda_0 = (1 + k_\lambda)/\bar{T}_{о.с,0} = 0,01(1 + k_\lambda)$ ч⁻¹ находим:

$$\bar{T}_{о.с} = \begin{cases} 10150, & k_\lambda = 1; \\ 20200, & k_\lambda = 0. \end{cases}$$

В системе без восстановления $\bar{T}_{о.с} = 150$ ч при $k_\lambda = 1$ и 200 ч при $k_\lambda = 0$.

Выигрыш надежности по $\bar{T}_{о.с}$ равен 101,5 при нагруженном резерве и 202 — при ненагруженном. Это больше, соответственно, в 68 и 101 раз, чем в системе без восстановления.

Коэффициент готовности

При выводе расчетной формулы для коэффициента готовности используют тот же граф состояний, что и при выводе (7.19), учитывая, однако, возможность перехода из состояния $m + 1$ в состояние m с интенсивностью M_{m+1} . Опуская этап составления дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний $P_i(t)$, запишем сразу систему алгебраических уравнений типа (7.1) относительно стационарных значений этих вероятностей:

$$\Lambda_0 p_0 - M_1 p_1 = 0; \quad \Lambda_{k+m-1} p_{k+m-1} - M_{k+m} p_{k+m} = 0; \quad (7.40)$$

$$\Lambda_{i-1} p_{i-1} - (\Lambda_i + M_i) p_i + M_{i+1} p_{i+1} = 0, \quad i = 1..k+m-1. \quad (7.41)$$

Здесь нормировочное условие

$$p_0 + p_1 + \dots + p_{k+m} = 1. \quad (7.42)$$

Из первого уравнения (7.40) и уравнения (7.41) находим:

$$\Lambda_{i-1} p_{i-1} - M_i p_i = \Lambda_i p_i + M_{i+1} p_{i+1} = \Lambda_0 p_0 - M_1 p_1 = 0.$$

Отсюда

$$p_i = \frac{\Lambda_{i-1}}{M_i} p_i = \frac{\Lambda_{i-1} \Lambda_{i-2} \dots \Lambda_0}{M_i M_{i-1} \dots M_1} p_0 = \theta_i p_0. \quad (7.43)$$

Подставив (7.43) в (7.42), найдем:

$$p_0 = 1 / (1 + \theta_1 + \dots + \theta_{k+m}).$$

Теперь, согласно (7.43),

$$p_i = \theta_i / (1 + \theta_1 + \dots + \theta_{k+m}), \quad i = 1..k+m. \quad (7.44)$$

Коэффициент готовности системы

$$K_{г.с} = (1 + \theta_1 + \dots + \theta_m) / (1 + \theta_1 + \dots + \theta_{k+m}). \quad (7.45)$$

В частности, при $k = m = 1$

$$\begin{aligned} K_{г.с} &= (1 + \Lambda_0 / M_1) / (1 + \Lambda_0 / M_1 + \Lambda_0 \Lambda_1 / M_1 M_2) = \\ &= (M_2 (\Lambda_0 + M_1)) / (M_1 M_2 + \Lambda_0 M_2 + \Lambda_0 \Lambda_1). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Подставляя в (7.46) Λ_i и M_i из (7.23) и (7.24), находим, что при одной ремонтной бригаде

$$K_{г.с} = \begin{cases} \mu(\mu + 2\lambda) / (\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda^2), & k_\lambda = 1; \\ \mu(\mu + \lambda) / (\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2), & k_\lambda = 0, \end{cases}$$

а при двух бригадах

$$K_{г.с} = \begin{cases} \mu(\mu + 2\lambda) / (\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2) = 1 - (\lambda / (\lambda + \mu))^2, & k_\lambda = 1; \\ 2\mu(\mu + \lambda) / (2\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2), & k_\lambda = 0. \end{cases}$$

Составляя отношение значений коэффициента простоя $K_{п.с} = 1 - K_{г.с}$ с различных дублированных систем, можно определить выигрыш надежности от проведения мероприятий по повышению надежности. Так, при переводе резервного элемента из нагруженного режима в ненагруженный коэффициент простоя уменьшается приблизительно в $2(1 - \beta)$ раз, $\beta = \lambda/\mu$, независимо от числа ремонтных бригад. Введение же второй ремонтной бригады уменьшает коэффициент простоя в $2(1 - \beta^2)$ раз при нагруженном режиме и в $2(1 - \beta^2/2)$ раз при ненагруженном. Использование обоих мероприятий (изменение режима и введение второй ремонтной бригады) уменьшают коэффициент простоя в $4(1 - \beta)$ раз.

В системе из k основных и m резервных элементов перевод всех резервных элементов из нагруженного режима в ненагруженный и увеличение числа ремонтных бригад с $r = 1$ до $r = m + 1$ приводят к выигрышу в надежности по коэффициенту простоя, определяемому по формуле

$$G_{K_{\text{ис}}} \cong \frac{(m+1)!(k+m)!}{(k-1)!k^{m+1}}(1-m\beta).$$

Следует, однако, отметить, что все дополнительные ремонтные бригады имеют весьма небольшую загрузку, измеряемую долей времени, когда они заняты работой по восстановлению работоспособности. В самом деле, первая бригада занята всегда, когда есть хотя бы один отказавший элемент, вторая бригада занята, когда число отказавших элементов не менее двух, и т. д. Поэтому коэффициент загрузки i -й бригады

$$K_{zi} = \sum_{j=i}^{k+m} p_j = \frac{\theta_i + \theta_{i+1} + \dots + \theta_{k+m}}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{k+m}}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

При $\lambda \ll \mu$ коэффициент загрузки можно оценивать по его главному члену:

$$K_{zi} \approx \theta_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{i-1}}{M_1 M_2 \dots M_i}.$$

Пример 7.4. Найти коэффициент готовности системы, рассмотренной в примере 7.1, полагая, что восстановление проводится одной бригадой. На сколько увеличивает $K_{г.с}$ введение: а) еще одной, б) еще двух бригад той же производительности.

Решение. В формулах (7.40) и (7.41) полагаем $k = 2$, $m = 1$, $M_1 = M_2 = M_3 = \mu$, $\Lambda_0 = 3\lambda$, $\Lambda_1 = 2\lambda$, $\Lambda_2 = \lambda$. Тогда

$$K_{г.с} = (1 + 3\beta)/(1 + 3\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3) = 1 - 0,588 \cdot 10^{-3}.$$

При двух ремонтных бригадах $M_2 = M_3 = 2\mu$, а поэтому $K_{г.с} = (1 + 3\beta)/(1 + 3\beta + 3\beta^2 + 1,5\beta^3) = 1 - 0,2926 \cdot 10^{-3}$. При трех ремонтных бригадах $K_{г.с} = 1 - 0,2921 \times 10^{-3}$. Если введение второй бригады уменьшает коэффициент простоя приблизительно вдвое, то введение третьей бригады практически его не изменяет (уменьшает на 0,15%).

Коэффициенты загрузки бригад: при одной бригаде $K_{31} = 0,0297$; при трех бригадах $K_{31} = 0,0294$, $K_{32} = 0,292 \cdot 10^{-3}$, $K_{33} = 10^{-6}$. Вследствие незначительного уменьшения коэффициента простоя и низкого коэффициента загрузки введение третьей бригады нецелесообразно.

Коэффициент оперативной готовности

В отличие от последовательной системы, резервированные системы имеют несколько работоспособных состояний и при возникновении заявки на выполнение работы на стационарном участке эксплуатации могут начать функционирование в любом из них. Поэтому для нахождения коэффициента оперативной готовности уже нельзя использовать формулу (1.25) в виде произведения коэффициента

готовности и вероятности безотказной работы, а надо учитывать многообразие стартовых состояний с помощью формулы

$$K_{\text{о.г.с}}(t) = \sum_{i \in E_+} p_i P_c^{(i)}(t),$$

где p_i — стационарная вероятность состояния i ; $P_c^{(i)}(t)$ — вероятность безотказной работы при условии, что начальным было состояние i ; E_+ — множество работоспособных состояний. Для схемы гибели и размножения вероятности p_i определяют по формуле (7.44), а вероятности $P_c^{(i)}(t)$ находят как решение системы уравнений (7.19) при начальных условиях: $P_i(0) = 1$; $P_j(0) = 0, j \neq i$.

Для дублированной системы

$$K_{\text{о.г.с}}(t) = \left(P_c^{(0)}(t) + \frac{\Lambda_0}{M_1} P_c^{(1)}(t) \right) / \left(1 + \frac{\Lambda_0}{M_1} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{M_1 M_2} \right),$$

где $P_c^{(0)}(t)$ и $P_c^{(1)}(t)$ определяют по формулам (7.27) и (7.28а). Учитывая, что в реальных системах интенсивность отказов значительно меньше интенсивности восстановления, а поэтому вероятность $P_c^{(1)}(t)$ близка к вероятности $P_c^{(0)}(t)$, но немного меньше нее, можно получить следующую приближенную верхнюю оценку для коэффициента оперативной готовности:

$$K_{\text{о.г.с}}(t) \approx K_{\text{о.г}} P_c(t); \quad K_{\text{о.г}} = p_0 + p_1.$$

Вероятность $P_c(t)$ находят по формуле (7.27).

7.3.2. Полумарковская модель надежности

Законы, по которым работают некоторые технические устройства и системы, могут отличаться от экспоненциальных законов, которыми обладали элементы системы, рассмотренной в предыдущем разделе. Очевидно, что при анализе надежности таких систем нельзя пользоваться марковскими моделями, не убедившись в том, что влияние вида закона распределения незначительно. Выяснить, каково это влияние, важно также и для постановки статистического эксперимента по определению показателей надежности элементов, так как при слабом влиянии задачу определения вида функции распределения можно не ставить, а ограничиться оценкой средних значений наработки до отказа и времени восстановления. В настоящее время вопрос о характере и степени влияния закона распределения наработки до отказа и времени восстановления элементов на показатели надежности резервированной системы нельзя считать полностью решенным. Однако уже получены достоверные результаты для наиболее распространенного вида резервирования — общего дублирования. Поэтому далее излагаются результаты, относящиеся лишь к системе с общим дублированием.

Дублированная система с произвольным распределением времени восстановления

Рассмотрим систему, состоящую из основной (первой) подсистемы с интенсивностью отказов λ_1 и распределением времени восстановления $F_{в1}(t)$ и резервной (второй) подсистемы с интенсивностью отказов λ_2 в рабочем состоянии

и $\lambda_3 \leq \lambda_2$ при нахождении в резерве и распределением времени восстановления $F_{b2}(t)$. Поскольку характеристики надежности подсистем известны, в структурной схеме надежности они будут рассматриваться как элементы.

Здесь принимаются те же допущения о порядке функционирования системы, что и в 7.3.1. Дополнительно известно лишь то, что после восстановления первый элемент сразу же включается в работу, даже если второй элемент работоспособен. Последний в этом случае вновь переводится в резерв. При $\lambda_1 = \lambda_2$ и $F_{b1}(t) = F_{b2}(t)$ разделение элементов на основные и резервные значения не имеет, и модель надежности не меняется, если в резерв отправляется первый элемент.

Анализируя временную диаграмму работы системы (рис. 7.2), замечаем, что система имеет четыре различных состояния: 0 — оба элемента работоспособны; 1 — первый элемент восстанавливается, второй работает; 2 — второй элемент восстанавливается, первый работает; 3 — оба элемента восстанавливаются (неработоспособное состояние). Марковскими точками являются моменты перехода в состояния 0 (из 1 или 2), 1 (из 0) и 2 (из 0).

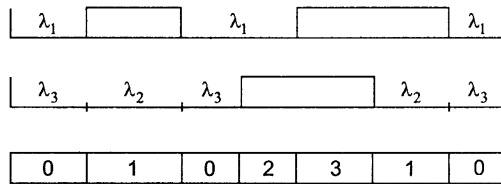


Рис. 7.2. Временная диаграмма работы системы

Найдем расчетные формулы для показателей надежности, используя метод, основанный на составлении системы интегральных уравнений типа (7.8)–(7.10). Для этого можно применить непосредственный вывод интегральных уравнений, учитывая полную группу событий, приводящих к изменению состояния системы.

Обозначим через $Q_i(t)$ вероятность отказа системы при условии, что система начала работу в состоянии $i = 0, 1$ или 2 в марковский момент времени. Начиная из состояния 0, система может отказаться, только перейдя в состояние 1 или 2. Поэтому

$$Q_c(t) = Q_0(t) = \int_0^t \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)x} Q_1(t-x) dx + \int_0^t \lambda_3 e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)x} Q_2(t-x) dx. \quad (7.47)$$

Начиная из состояния 1, система может отказаться двумя способами: 1) если второй элемент откажет раньше, чем восстановлен первый элемент, 2) если первый элемент восстановлен раньше, чем откажет второй, и система перейдет в состояние 0, но затем до момента t система откажет, начиная уже из состояния 0. Суммируя вероятности этих событий, получаем второе уравнение:

$$Q_1(t) = \int_0^t \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} (1 - F_{b1}(x)) dx + \int_0^t e^{-\lambda_2 x} Q_0(t-x) dF_{b1}(x). \quad (7.48)$$

Аналогично составляется и третье уравнение:

$$Q_2(t) = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} (1 - F_{n2}(x)) dx + \int_0^t e^{-\lambda_1 x} Q_0(t-x) dF_{n2}(x). \quad (7.49)$$

Выполним в (7.47) операционное преобразование Лапласа—Карсона:

$$Q_0^*(s) = \frac{\lambda_1 Q_1^*(s) + \lambda_3 Q_2^*(s)}{s + \lambda_1 + \lambda_3}. \quad (7.50)$$

Аналогично преобразуем (7.48) и (7.49):

$$Q_1^*(s) = \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} (1 - F_{n1}^*(s + \lambda_2)) + Q_0^*(s) F_{n1}^*(s + \lambda_2); \quad (7.51)$$

$$Q_2^*(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} (1 - F_{n2}^*(s + \lambda_1)) + Q_0^*(s) F_{n2}^*(s + \lambda_1). \quad (7.52)$$

Решая систему алгебраических уравнений (7.50)–(7.52), получаем:

$$Q_c^*(s) = Q_0^*(s) = \lambda_1 \frac{\frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} (1 - F_{n1}^*(s + \lambda_2)) + \frac{\lambda_3}{s + \lambda_1} (1 - F_{n2}^*(s + \lambda_1))}{s + \lambda_1 (1 - F_{n1}^*(s + \lambda_2)) + \lambda_3 (1 - F_{n2}^*(s + \lambda_1))}. \quad (7.53)$$

Отсюда легко найти среднюю наработку до отказа:

$$\bar{T}_{o.c} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (1 - Q_0^*(s)) = \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - F_{n1}^*(\lambda_2)) + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} (1 - F_{n2}^*(\lambda_1))}{\lambda_1 (1 - F_{n1}^*(\lambda_2)) + \lambda_3 (1 - F_{n2}^*(\lambda_1))}. \quad (7.54)$$

Эти же результаты можно получить, используя при составлении системы интегральных уравнений математический аппарат теории полумарковских случайных процессов. Для этого необходимо найти функциональную матрицу переходных вероятностей и числовую матрицу стационарных вероятностей состояний вложенной марковской цепи:

$$P_{01}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}); \quad P_{02}(t) = \frac{\lambda_3}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_3;$$

$$P_{10}(t) = \int_0^t e^{-\lambda_2 x} dF_{n1}(x); \quad P_{20}(t) = \int_0^t e^{-\lambda_1 x} dF_{n2}(x);$$

$$P_{13}(t) = \int_0^t \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} (1 - F_{n1}(x)) dx; \quad P_{23}(t) = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} (1 - F_{n2}(x)) dx; \quad (7.55)$$

$$p_{01} = \frac{\lambda_1}{\lambda}; \quad p_{02} = \frac{\lambda_3}{\lambda}; \quad p_{10} = F_{n1}^*(\lambda_2); \quad p_{20} = F_{n2}^*(\lambda_1); \quad p_{13} = 1 - p_{10}; \quad p_{23} = 1 - p_{20}.$$

Здесь $F_{ni}^*(\lambda_j)$ — изображения по Карсону функций $F_{ni}(t)$ при $s = \lambda_j$.

Отсюда можно найти функции распределения и средние значения времени пребывания системы в различных состояниях:

$$F_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad F_1(t) = 1 - (1 - F_{\text{в}1}(t))e^{-\lambda_2 t}; \quad F_2(t) = 1 - (1 - F_{\text{в}2}(t))e^{-\lambda_1 t};$$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{\lambda}; \quad \bar{\tau}_1 = \frac{1}{\lambda_2}(1 - F_{\text{в}1}^*(\lambda_2)); \quad \bar{\tau}_2 = \frac{1}{\lambda_1}(1 - F_{\text{в}2}^*(\lambda_1)). \quad (7.56)$$

Чтобы получить изображения для функций вероятности безотказной работы, необходимо составить систему уравнений типа (7.11). Для этого надо выполнить операционное преобразование в формулах (7.55) и (7.56):

$$P_{01}^*(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda}; \quad P_{02}^*(s) = \frac{\lambda_3}{s + \lambda}; \quad P_{10}^*(s) = F_{\text{в}1}^*(s + \lambda_2); \quad P_{20}^*(s) = F_{\text{в}2}^*(s + \lambda_1);$$

$$P_{13}^*(s) = \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}(1 - F_{\text{в}1}^*(s + \lambda_2)); \quad P_{23}^*(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1}(1 - F_{\text{в}2}^*(s + \lambda_1)); \quad (7.57)$$

$$1 - F_1^*(s) = \frac{s}{s + \lambda_2}(1 - F_{\text{в}1}^*(s + \lambda_2)); \quad 1 - F_2^*(s) = \frac{s}{s + \lambda_1}(1 - F_{\text{в}2}^*(s + \lambda_1)).$$

Система уравнений (7.11) приобретает вид

$$P_0^*(s) = \frac{s}{s + \lambda} + P_{01}^*(s)P_1^*(s) + P_{02}^*(s)P_2^*(s);$$

$$P_1^*(s) = 1 - F_1^*(s) + P_{10}^*(s)P_0^*(s); \quad P_2^*(s) = 1 - F_2^*(s) + P_{20}^*(s)P_0^*(s).$$

Отсюда

$$P_c^*(s) = P_0^*(s) = \frac{1 - P_{01}^*(s)F_1^*(s) - P_{02}^*(s)F_2^*(s)}{1 - P_{01}^*(s)P_{10}^*(s) - P_{02}^*(s)P_{20}^*(s)}. \quad (7.58)$$

Подставляя в (7.58) формулы (7.57), получим:

$$P_c^*(s) = s \frac{1 + \frac{\lambda_1}{s + \lambda_2}(1 - F_{\text{в}1}^*(s + \lambda_2)) + \frac{\lambda_3}{s + \lambda_1}(1 - F_{\text{в}2}^*(s + \lambda_1))}{s + \lambda_1(1 - F_{\text{в}1}^*(s + \lambda_2)) + \lambda_3(1 - F_{\text{в}2}^*(s + \lambda_1))}. \quad (7.59)$$

Легко установить, что формулы (7.53) и (7.59) дают один и тот же результат для $P_c^*(s)$. Переходя в (7.59) к пределу типа (7.13), получим:

$$\bar{T}_{\text{о.с.}} = \frac{1 + \lambda_1 \bar{\tau}_1 + \lambda_3 \bar{\tau}_2}{\lambda_1(1 - F_{\text{в}1}^*(\lambda_2)) + \lambda_3(1 - F_{\text{в}2}^*(\lambda_1))}. \quad (7.60)$$

С учетом (7.52), нетрудно установить, что формулы (7.60) и (7.54) совпадают.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и $F_{\text{в}1}(t) = F_{\text{в}2}(t)$, в частности, имеем:

$$\lambda \bar{T}_{\text{о.с.}} = \begin{cases} (1 + 3\rho) / 2\rho; \\ (3 - (1 - e^{-2\rho}) / \rho) / (2 - (1 - e^{-2\rho}) / \rho) \\ (1,5 - 1/(1 + \rho/k)^k) / (1 - 1/(1 + \rho/k)^k), \end{cases} \quad (7.61)$$

где $\rho = \lambda \bar{\tau}_{\text{в}}$; $\bar{\tau}_{\text{в}}$ — среднее время восстановления. В формуле (7.61) первая строка соответствует экспоненциальному распределению, вторая — равномерному в интервале $(0, 2\bar{\tau}_{\text{в}})$, а третья — гамма-распределению с параметрами k и $\mu = k / \bar{\tau}_{\text{в}}$.

Результаты расчетов по формуле (7.61), приведенные в табл. 7.1, показывают, что влияние закона восстановления на среднюю наработку системы незначительно. Различия находятся в пределах точности исходных данных. Данный вывод справедлив не только для рассмотренного здесь частного случая, он имеет более общий характер. Это следует из теоремы об асимптотическом поведении, которую мы приведем здесь без доказательства [2, с. 136].

Таблица 7.1. Влияние закона восстановления на величину средней наработки до отказа

ρ	$\lambda \bar{T}_{0,c}$		
	Экспоненциальное	Равномерное	Гамма
0,2	4,0	3,86	3,88
0,1	6,5	6,35	6,37
0,05	11,5	11,3	11,4
0,01	51,5	51,0	51
0,001	501,5	501	502,4

Теорема 7.1. Пусть: 1) функции распределения $F_{wi}(t)$ обладают свойством

$$F_{wi}(\mu_i, t) = \Phi_i(\mu_i, t), \quad i = 1, 2. \tag{7.62}$$

2) существуют конечные моменты распределения

$$\mu_i^{-1} = \int_0^\infty x dF_{wi}(x), \quad \alpha_{2i} = \int_0^\infty x^2 dF_{wi}(x).$$

Тогда при $\lambda_j / \mu_i \rightarrow 0, i \neq j$ средняя наработка дублированной системы до первого отказа асимптотически равна средней наработке в предположении, что $F_{wi}(t) = 1 - \exp(-\mu_i t)$.

Нетрудно проверить, что условию (7.62) удовлетворяют многие распределения: экспоненциальное, гамма-распределение, равномерное, Вейбулла. Но гиперэкспоненциальное распределение этому условию не удовлетворяет. Чтобы выяснить, как влияет вид функции распределения на вероятность отказа, необходимо провести обратное преобразование в (7.53). К сожалению, для большинства используемых в теории надежности законов распределения получить точное выражение в замкнутой аналитической форме не удастся. Однако можно провести анализ с помощью приближенной асимптотической формулы, вид которой следует из теоремы, приводимой здесь также без доказательства [2, с. 140].

Теорема 7.2. Пусть: 1) зависимость функций $F_{wi}(t)$ от параметров μ такова, что при любом λ и $\mu_i \rightarrow \infty$

$$F_{wi}^*(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_{wi}(x) \rightarrow 1,$$

2) μ_i изменяются так, что

$$0 < A < \frac{1 - F_{w1}^*(\lambda_2)}{1 - F_{w2}^*(\lambda_1)} < B < \infty,$$

где A и B — постоянные числа. Тогда при $\mu_i \rightarrow \infty$ вероятность отказа системы

$$Q_c(t) \rightarrow 1 - e^{-\Lambda t}, \quad (7.63)$$

где

$$\Lambda = \lambda_1(1 - F_{b1}^*(\lambda_2)) + \lambda_3(1 - F_{b2}^*(\lambda_1)). \quad (7.64)$$

Расчеты по формулам (7.63) и (7.64) показывают, что и вероятность отказа слабо зависит от вида закона восстановления, а определяющим фактором является среднее время восстановления (табл. 7.2).

Таблица 7.2. Влияние закона восстановления на величину вероятности отказа

ρ	λt	$Q_c(t)$		
		Экспоненциальное	Равномерное	Гамма
0,1	0,1	0,0180	0,0185	0,0184
0,1	0,5	0,0869	0,0892	0,0888
0,1	1,0	0,1664	0,1706	0,1697
0,1	2,0	0,3051	0,3120	0,3100
0,05	0,5	0,0453	0,0471	0,0469
0,05	1,0	0,0908	0,0921	0,0918
0,05	2,0	0,1740	0,1757	0,1752
0,05	3,0	0,2487	0,2517	0,2510
0,01	1,0	0,0195	0,0198	0,0196
0,01	2,0	0,0389	0,0392	0,0390
0,01	3,0	0,0580	0,0582	0,0581
0,01	5,0	0,0938	0,0952	0,0941

Оценим влияние закона восстановления на коэффициент готовности дублированной системы, полагая, что после отказа в ней проводится восстановление обеих подсистем и только затем она возобновляет работу. В этом случае

$$K_{г.с} = \bar{T}_{о.с} / (\bar{T}_{о.с} + \bar{\tau}_{в.с}),$$

где $\bar{T}_{о.с}$ определяется по формуле (7.60). При $F_{b1}(t) = F_{b2}(t) = F_b(t)$ и восстановлении с помощью одной бригады среднее время восстановления системы

$$\bar{\tau}_{в.с} = \bar{\tau}_b + \frac{1}{\bar{\tau}_b} \int_0^\infty \int_0^\infty (1 - F_b(x)) dx dt = \frac{3}{2} \bar{\tau}_b + \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}_b}.$$

При восстановлении с помощью двух бригад

$$\bar{\tau}_{в.с} = M(\max(T_{b1}, T_{b2})) = \frac{1}{\bar{\tau}_b} \int_0^\infty \left(1 - \frac{F_b(t)}{\bar{\tau}_b} \int_0^t (1 - F_b(x)) dx \right) dt = \bar{\tau}_b + \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}_b}.$$

Таким образом, на коэффициент готовности существенно влияют первые два момента распределения времени восстановления.

В общем случае коэффициент готовности находят по формуле

$$K_{г.с} = \sum_{i \in E_i} p_i; \quad p_i = \pi_i \bar{\tau}_i / \sum_{j \in E} \pi_j \bar{\tau}_j, \quad (7.65)$$

где π_i — стационарные вероятности состояний вложенной марковской цепи, определяемые из системы алгебраических уравнений

$$\pi_i = \sum_{j \in E} \pi_j p_{ji}, \quad i \in E, \quad \sum_{j \in E} \pi_j = 1.$$

Для дублированной системы имеем:

$$\pi_0 = \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20}; \quad \pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_3 p_{31}; \quad \pi_2 = \pi_0 p_{02} + \pi_3 p_{32}; \quad \pi_3 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{23};$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

Здесь вероятности p_{ij} следует взять из (7.55) при $i = 0, 1, 2$. Для $i = 3$ при двух ремонтных бригадах вероятности находят по формулам

$$p_{31} = 1 - p_{32} = \int_0^{\infty} (1 - F_{в1}(x)) dF_{в2}(x).$$

Отсюда

$$\pi_i = a_i \pi_0; \quad \pi_0 = 1 / ((1 + (1 + p_{13})(p_{01}(1 - p_{23}p_{32}) + p_{02}p_{23}p_{31}))/\Delta +$$

$$+ (1 + p_{23})(p_{02}(1 - p_{13}p_{31}) + p_{01}p_{13}p_{32})/\Delta; \quad \Delta = 1 - p_{13}p_{31} - p_{23}p_{32};$$

$$a_1 = (p_{01}(1 - p_{23}p_{32}) + p_{02}p_{23}p_{31})/\Delta; \quad a_2 = (p_{02}(1 - p_{13}p_{31}) + p_{01}p_{13}p_{32})/\Delta;$$

$$a_3 = a_1 p_{13} + a_2 p_{23}. \quad (7.66)$$

Коэффициент готовности

$$K_{г.с} = 1 - p_3 = 1 - \bar{\tau}_3 a_3 / \bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_1 a_1 + \bar{\tau}_2 a_2 + \bar{\tau}_3 a_3, \quad (7.67)$$

где $\bar{\tau}_i$ для $i = 0, 1$ и 2 следует взять из (7.56), а коэффициенты a_i — из формулы (7.66). Среднее время $\bar{\tau}_3$ находят по формуле

$$\bar{\tau}_3 = \int_0^{\infty} (1 - F_{в1}(x))(1 - F_{в1}(x)) dx.$$

В случае марковской модели при двух ремонтных бригадах и $F_{вi}(t) = 1 - \exp(-\mu, t)$ имеем:

$$p_i = \theta_i p_0; \quad \theta_1 = \frac{\lambda_1(\mu + \lambda_1 + \lambda_3)}{\mu_1(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)}; \quad \theta_2 = \frac{\mu\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3}{\mu_2(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)};$$

$$\theta_3 = (\lambda_2\theta_1 + \lambda_1\theta_2)/\mu; \quad \mu = \mu_1 + \mu_2; \quad p_0 = 1 / \left(1 + \theta_1 \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu} \right) + \theta_2 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu} \right) \right).$$

В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ имеем $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \lambda/\mu$, $\theta_3 = (\lambda/\mu)^2$. Коэффициент готовности

$$K_{г.с} = 1 - p_3 = 1 - \frac{\lambda\theta}{\mu + (\lambda + 2\mu)\theta} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = 0$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ имеем:

$$\theta_1 = \frac{(\lambda + 2\mu)\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)}; \quad \theta_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu(\lambda + \mu)}; \quad K_{r.c} = 1 - \frac{\lambda^2}{2\mu^2 + (\lambda + 2\mu)\lambda}.$$

Это совпадает с результатом, полученным в 7.3.1.

Чтобы найти среднюю наработку системы на отказ, надо использовать общую формулу (7.16). Для дублированной системы

$$\begin{aligned} \bar{T}_{n.c} &= \frac{K_{r.c}}{1 - K_{r.c}} \bar{\tau}_3 = (\bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_1 a_1 + \bar{\tau}_2 a_2) / a_3 = \\ &= \frac{1}{a_3} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{a_1}{\lambda_2} (1 - F_{n1}^*(\lambda_2)) \right) + \frac{a_2}{\lambda_1} (1 - F_{n2}^*(\lambda_1)); \quad a_i = \frac{\pi_i}{\pi_0}; \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_3. \end{aligned}$$

В случае марковской модели

$$\bar{T}_{n.c} = \frac{K_{r.c}}{\mu(1 - K_{r.c})} = \frac{1 - p_3}{\mu p_3}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2. \quad (7.67a)$$

Вероятность p_3 определяют по формуле (7.67). При расчете коэффициента оперативной готовности следует использовать формулы (7.18a)–(7.18e).

Система с общим ненагруженным резервом с целой кратностью при произвольном распределении наработки элементов до отказа

Рассмотрим систему с общим ненагруженным резервом с целой кратностью $k/1$. Нерезервированная система имеет распределение наработки $F(t)$ и экспоненциальное распределение времени восстановления $F_b(t) = 1 - \exp(-\mu t)$. Как и ранее, отказы элементов будем считать независимыми, обнаружение отказа и подключение резерва — мгновенным, а восстановление — автономным. Анализируя диаграмму работы системы, заметим, что система имеет $k + 2$ различных состояний, причем все моменты изменения состояния, вызванного отказами элементов, являются марковскими моментами. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность безотказной работы системы в течение времени t при условии, что из всех $k + 1$ элементов $k + 1 - i$ элементов работоспособны, а i находятся в ремонте, причем один из $k + 1 - i$ элементов приступил к работе в начале рассматриваемого интервала. Система может проработать безотказно в течение времени t , начиная из состояния с $k + 1 - i$ работоспособными элементами, следующими несовместными способами: 1) элемент, приступивший к работе в начальный момент времени, проработает безотказно в течение времени t ; 2) этот элемент откажет в момент $x < t$, причем за время x успеют восстановиться j элементов ($j < i$), а за оставшееся время $t - x$ система из $k + 1 + i - j$ элементов не откажет. Складывая вероятности указанных событий, получаем систему интегральных уравнений типа (7.11):

$$P_i(t) = 1 - F(t) + \sum_{j=0}^i \int_0^t P_{k+j-i}(t-x) C_i^j (1 - e^{-\mu x})^j e^{-(i-j)\mu x} dF(x), \quad i = 0 \dots k. \quad (7.68)$$

В частности, при дублировании ($k = 1$) имеем

$$P_0^*(s) = \frac{(1 - F^*(s))(1 + F^*(s + \mu))}{1 - F^*(s) + F^*(s + \mu)}; \quad P_1^*(s) = \frac{1 - F^*(s)}{1 - F^*(s) + F^*(s + \mu)}. \quad (7.69)$$

Средняя наработка до первого отказа

$$\bar{T}_{0.c} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P_0^*(s) = \bar{T}_0 \left(1 + \frac{1}{F^*(\mu)} \right); \quad \bar{T}_0 = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx. \quad (7.70)$$

Она является и наработкой на отказ, если после отказа система не возобновляет работы, пока не будут восстановлены оба элемента. Если же система возобновляет работу после восстановления одного из элементов, то наработка на отказ

$$\bar{T}_u = \bar{T}_0 / F^*(\mu). \quad (7.71)$$

При $k > 1$ среднюю наработку до первого отказа можно найти из системы уравнений, которая получается интегрированием уравнений (7.61) в пределах от нуля до ∞ :

$$\bar{T}_i = \bar{T}_0 + \sum_{j=0}^i C_i^j \bar{T}_{k-i+j} \sum_{v=0}^j C_j^v (-1)^v F^*(\mu(i-j+v)). \quad (7.72)$$

Значение $F^*(\mu)$ обычно является малой величиной. Этим можно воспользоваться для приближенного решения системы уравнений (7.72). Отбрасывая члены порядка малости $o(F^*(\mu))$, по правилу Крамера получаем:

$$\bar{T}_{0.c} = \bar{T}_0 \frac{1 + kF^*(\mu) - \sum_{i=1}^k F^*(i\mu)}{\prod_{i=1}^k F^*(i\mu)}; \quad \bar{T}_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P_1^*(s) = \bar{T}_{0.c} - \bar{T}_0 \left/ \prod_{i=1}^k F^*(i\mu) \right. \right. \quad (7.73)$$

При $k = 1$ формулы (7.65) совпадают с (7.70) и (7.71), а при $k > 1$ дают приближенное значение с относительной погрешностью порядка $(\bar{\tau}_u / \bar{T}_0)k$. Расчеты по формулам (7.73) показывают, что вид закона распределения существенно влияет на среднюю наработку до первого отказа $\bar{T}_{0.c}$ и наработку на отказ $\bar{T}_u$. На рис. 7.3 приведены зависимости $\bar{T}_{0.c}$ в случае гамма-распределения наработки для систем с одинаковыми средними значениями наработки до отказа элементов, но с различными параметрами распределения m и различной кратностью резервирования k . Из графиков следует, что $\bar{T}_{0.c}$ тем больше, чем больше параметр распределения m и кратность резервирования k . Различие в значениях $\bar{T}_{0.c}$ может достигать трех десятичных порядков и более. Поскольку среднее время восстановления не зависит от $F(t)$, коэффициент простоя системы меняется в той же пропорции, что $\bar{T}_{0.c}$ или $\bar{T}_u$.

Чтобы сравнить системы по вероятности отказа, надо либо провести численное интегрирование уравнений (7.68), либо выполнить обратное операционное преобразование в (7.69). Расчеты показывают, что в сравниваемых системах с различными $F(t)$, но одинаковыми первыми моментами $\bar{T}_0$ вероятности отказов различаются значительно, а следовательно, влияние вида функции $F(t)$ существенно. Этот вывод иллюстрируется графиками рис. 7.4, где кривая 1 соответствует дублированной системе с $F(t) = 1 - (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t)$, а кривая 2 — системе с $F(t) = 1 - \exp(-\lambda_1 t)$, причем $\lambda_1 = \lambda / 2$.

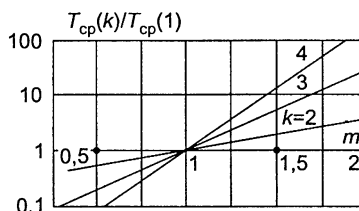


Рис. 7.3. Зависимость относительного изменения средней наработки системы до отказа от параметра распределения наработки элементов до отказа (при фиксированном среднем значении)

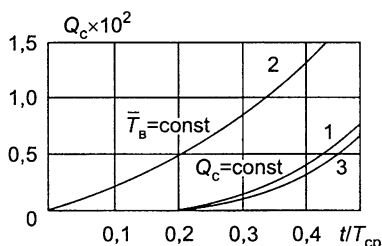


Рис. 7.4. Зависимость вероятности отказа дублированной системы от времени при различных распределениях наработки

Значительно меньше различия в вероятностях отказа восстанавливаемых систем (но по-прежнему заметные, в особенности при больших t и быстром восстановлении) тогда, когда системы, состоящие из элементов с различными $F(t)$, имеют одинаковые вероятности отказов в отсутствие восстановления. Так, обращаясь вновь к рис. 7.4, видим, что невозстанавливаемые дублированные системы с распределением Эрланга и экспоненциальным распределением наработки элементов также имеют распределение Эрланга, но уже с параметрами 4 и 2 соответственно. Приравнявая вероятности отказов систем без восстановления

$$Q_c(t) = 1 - \sum_{i=0}^3 \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = 1 - (1 + \lambda_2 t) e^{-\lambda_2 t},$$

можем при заданных λ и t найти λ_2 , а затем по формуле (7.25) при $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \lambda_2$ и вероятность отказа восстанавливаемой системы (рис. 7.4, кривая 3). Сравнивая кривые 1 и 3, видим, что в довольно большом диапазоне значений $\rho = t/\bar{T}_0$ замена неэкспоненциального распределения Эрланга экспоненциальным приводит к вполне приемлемой погрешности в оценке вероятности отказа.

7.4. Расчет надежности систем со сложной структурой

В невозстанавливаемых системах основным допущением модели надежности является независимость отказов элементов, позволяющая свести модель надежности к схеме Бернулли, схеме независимых событий. В восстанавливаемых системах

схема Бернулли возникает при выполнении двух требований: независимости отказов элементов и неограниченного восстановления. Последнее означает, что в системе технического обслуживания отсутствуют очереди на восстановление работоспособности или вероятность возникновения такой очереди очень мала. Если эти требования выполняются, то любые изменения состояний любого элемента не зависят от состояния других элементов. Это значит, что индикаторы состояния элементов $x_i, i = 1...n$, являются независимыми случайными величинами. Тогда можно составлять логические функции работоспособности системы (ЛФРС) по правилам, изложенным в 6.3.3, в виде

$$Y(t) = F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)).$$

Очевидно, что вероятность $P\{Y(t) = 1\}$ имеет смысл коэффициента готовности системы.

7.4.1. Коэффициент готовности систем

Используя логико-вероятностный метод, с помощью ЛФРС можно находить как стационарный, так и нестационарный коэффициенты готовности системы как функции, соответственно, стационарных или нестационарных коэффициентов готовности элементов:

$$K_{г.с} = P(Y = 1) = K_{г.с}(p_1, p_2, ..., p_n), \quad p_i = K_{гi};$$
$$K_{г.с}(t) = PY(t) = 1 = K_{г.с}(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)), \quad p_i(t) = K_{гi}(t). \quad (7.74)$$

Для расчетов коэффициентов готовности элементов $K_{гi}$ и $K_{гi}(t)$ используют формулы главы 3. Рассмотрим пример.

Пример 7.5. Найти коэффициент готовности системы с мостиковой структурой (см. рис. 6.7).

Решение. Коэффициент готовности системы получают из формул (6.83) или (6.86) путем замены вероятностей безотказной работы элементов коэффициентами готовности этих же элементов, а вероятностей отказа элементов — коэффициентами простоя элементов. В соответствии с (6.83) имеем:

$$K_{г.с} = p_5(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4) + q_5(1 - (1 - p_1p_3)(1 - p_2p_4)), \quad p_i = K_{гi}, \quad q_i = 1 - K_{гi}.$$

В случае марковской модели

$$K_{гi} = \mu_i / (\mu_i + \lambda_i); \quad K_{нpi} = 1 - K_{гi} = \lambda_i / (\mu_i + \lambda_i).$$

В частности, при одинаковых характеристиках надежности элементов $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu$ имеем:

$$K_{г.с} = (1 + 5\rho + 8\rho^2 + 2\rho^3) / (1 + \rho)^5, \quad \rho = \lambda / \mu.$$

7.4.2. Средняя наработка системы до отказа

Для расчета средней наработки до отказа можно использовать систему алгебраических уравнений (7.14). В общем случае, когда все элементы системы различны, граф состояний имеет большое число состояний и анализ надежности становится

громоздким, хотя и не составляет принципиальной трудности. Если в системе имеются одинаковые элементы, граф состояний упрощается. Для вывода расчетной формулы можно использовать следующий алгоритм.

1. Согласно исходной структурной схеме изделия S_0 устанавливают минимальный d и максимальный m запасы живучести. Минимальный запас живучести равен числу элементов в минимальном замыкающем множестве, уменьшенному на единицу, то есть $d = s - 1$. Максимальный запас живучести равен максимальному количеству отказавших элементов, при котором сохраняется хотя бы один работоспособный путь между полюсами в сложной структуре. В мостиковой схеме (см. рис. 6.7) $d = 1$, $m = 3$, а в схеме на рис. 6.9 $d = 1$, $m = 5$.
2. Выделяют m уровней деградации (от 1 до m) и на каждом уровне находят все работоспособные структуры S_{ij} , $i = 1 \dots m$. Номер уровня деградации соответствует количеству отказавших элементов.
3. Каждому типу структуры S_0 и S_{ij} сопоставляют состояние в графе состояний системы. При этом каждому состоянию присваивается номер соответствующей структуры. Допускается и сквозная нумерация состояний. Кроме того, создается обобщенное неработоспособное состояние системы.
4. Устанавливают возможные переходы между различными работоспособными состояниями, а также между работоспособными и неработоспособным состояниями. Очевидно, что переход в неработоспособное состояние возможен только из состояний уровня i при $s = d + 1 \leq i \leq m$.
5. Взвешивают граф состояний, устанавливая интенсивности переходов.
6. Составляют алгебраические уравнения типа (7.14).
7. Решают систему алгебраических уравнений относительно $\bar{T}_{o.c} = \bar{T}_0$.

Пример 7.6. Найти среднюю наработку до отказа системы с мостиковой структурой (см. рис. 6.7), полагая, что интенсивность отказов элементов $\lambda_i = \lambda$, а интенсивность восстановления $\mu_i = \mu$. Число ремонтных бригад в ремонтном органе не менее 3.

Решение. По структурной схеме определяем $d = 1$, $m = 3$. Поэтому в структуре выделяем три уровня деградации. На первом уровне имеется две различные структуры S_{11} и S_{12} , на втором уровне — три структуры, S_{21} , S_{22} и S_{23} , на третьем уровне — одна структура S_{31} (рис. 7.5).

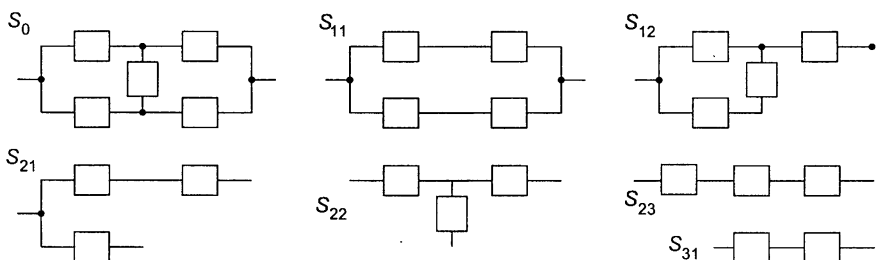


Рис. 7.5. Работоспособные структуры на различных уровнях деградации

Граф состояний содержит всего 8 состояний, из них одно полностью работоспособное, одно неработоспособное и 6 работоспособных состояний с частичной деградацией (рис. 7.6). Состояния 1 и 2 соответствуют структурам S_{11} и S_{12} , состояния 3, 4 и 5 — структурам S_{21} , S_{22} и S_{23} , состояние 6 — структуре S_{31} . На графе указаны интенсивности переходов.

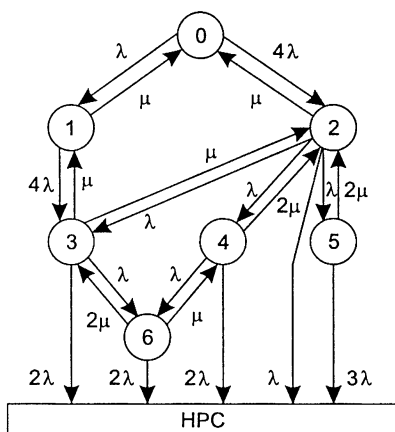


Рис. 7.6. Граф состояний системы с мостиковой структурой

Система алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \frac{1}{5\lambda} + \frac{1}{5}\bar{T}_1 + \frac{4}{5}\bar{T}_2; \quad \bar{T}_1 = \frac{1 + \mu\bar{T}_0 + 4\lambda\bar{T}_3}{\mu + 4\lambda}; \quad \bar{T}_2 = \frac{1 + \mu\bar{T}_0 + \lambda\bar{T}_3 + \lambda\bar{T}_4 + \lambda\bar{T}_5}{\mu + 4\lambda}; \\ \bar{T}_3 &= \frac{1 + \mu\bar{T}_1 + \mu\bar{T}_2 + \lambda\bar{T}_6}{2\mu + 3\lambda}; \quad \bar{T}_4 = \frac{1 + 2\mu\bar{T}_2 + \lambda\bar{T}_6}{2\mu + 3\lambda}; \quad \bar{T}_5 = \frac{1 + 2\mu\bar{T}_2}{2\mu + 3\lambda}; \quad \bar{T}_6 = \frac{1 + 2\mu\bar{T}_1 + \mu\bar{T}_4}{3\mu + 2\lambda}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

В системе (7.75) перейдем к безразмерным неизвестным $a_i = \lambda \bar{T}_i$ и обозначим $\rho = \lambda / \mu$. Тогда система уравнений приобретет вид

$$a_0 = (1 + a_1 + 4a_2) / 5; \quad a_1 = (\rho + a_0 + 4\rho a_3) / (1 + 4\rho); \quad (7.76)$$

$$a_2 = (\rho + a_0 + \rho(a_3 + a_4 + a_5)) / (1 + 4\rho); \quad a_3 = (\rho + a_1 + a_2 + \rho a_6) / (2 + 3\rho);$$

$$a_4 = (\rho + 2a_2 + \rho a_6) / (2 + 3\rho); \quad a_5 = (\rho + 2a_2) / (2 + 3\rho); \quad a_6 = (\rho + 2a_2 + a_4) / (3 + 2\rho).$$

В системе (7.76) исключаем a_5 и a_6 , подставляя шестое и седьмое уравнения в третье, четвертое и пятое. Получим:

$$a_2 = (2\rho(1 + 2\rho) + (2 + 3\rho)(a_0 + \rho a_3 + \rho a_4)) / (2 + 9\rho + 12\rho^2); \quad (7.77)$$

$$a_3 = (3\rho(1 + \rho) + (3 + 2\rho)(a_1 + a_2) + \rho a_4) / (6 + 11\rho + 6\rho^2);$$

$$a_4 = (3\rho(1 + \rho) + 2(3 + 2\rho)a_2 + 2\rho a_3) / (6 + 10\rho + 6\rho^2).$$

Решаем систему из уравнений (7.77) и первых двух уравнений (7.76) методом определителей:

$$\lambda \bar{T}_0 = \Delta_0 / \Delta, \quad (7.78)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & -0,8 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{4\rho}{1+4\rho} & 0 \\ \frac{1+4\rho}{-2-3\rho} & 0 & 1 & \frac{-\rho(2+3\rho)}{2+9\rho+12\rho^2} & \frac{-\rho(2+3\rho)}{2+9\rho+12\rho^2} \\ 0 & \frac{-3-2\rho}{6+11\rho+6\rho^2} & \frac{-3-2\rho}{6+11\rho+6\rho^2} & 1 & \frac{-\rho}{6+11\rho+6\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{-2(3+2\rho)}{6+10\rho+6\rho^2} & \frac{-2\rho}{6+10\rho+6\rho^2} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0,2 & -0,2 & -0,8 & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{1+4\rho} & 1 & 0 & -\frac{4\rho}{1+4\rho} & 0 \\ \frac{2\rho(1+2\rho)}{2+9\rho+12\rho^2} & 0 & 1 & \frac{-\rho(2+3\rho)}{2+9\rho+12\rho^2} & \frac{-\rho(2+3\rho)}{2+9\rho+12\rho^2} \\ \frac{3\rho(1+\rho)}{6+11\rho+6\rho^2} & \frac{-3-2\rho}{6+11\rho+6\rho^2} & \frac{-3-2\rho}{6+11\rho+6\rho^2} & 1 & \frac{-\rho}{6+11\rho+6\rho^2} \\ \frac{3\rho(1+\rho)}{6+10\rho+6\rho^2} & 0 & \frac{-2(3+2\rho)}{6+10\rho+6\rho^2} & \frac{-2\rho}{6+10\rho+6\rho^2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Результаты расчетов по формулам (7.78) приведены в табл. 7.3. Если начальной является одна из структур с частичной деградацией, то средняя наработка до отказа несколько уменьшается, но остается близкой к $\bar{T}_0$ при небольших ρ (табл. 7.4).

Таблица 7.3. Средняя наработка до отказа системы с мостиковой структурой при различных начальных состояниях

№	ρ	$\lambda \bar{T}_0$	$\lambda \bar{T}_1$	$\lambda \bar{T}_2$	$\lambda \bar{T}_3$	$\lambda \bar{T}_4$	$\lambda \bar{T}_5$	$\lambda \bar{T}_6$
1	0,01	25,475	25,470	25,226	25,101	25,063	24,858	24,926
2	0,05	5,5245	5,5046	5,2794	5,1553	5,1275	4,9344	4,9961
3	0,10	3,0700	3,0372	2,8282	2,7050	2,6872	2,5028	2,5616
4	0,20	1,8786	1,8301	1,6407	1,5194	1,5151	1,3390	1,3982
5	0,30	1,4981	1,4406	1,2624	1,1428	1,1473	0,9741	1,0369

Таблица 7.4. Влияние начальной деградации системы с мостиковой структурой на величину средней наработки до отказа

№	ρ	$\bar{T}_1 / \bar{T}_0$	$\bar{T}_2 / \bar{T}_0$	$\bar{T}_3 / \bar{T}_0$	$\bar{T}_4 / \bar{T}_0$	$\bar{T}_5 / \bar{T}_0$	$\bar{T}_6 / \bar{T}_0$
1	0,01	0,9998	0,9902	0,9853	0,9838	0,9758	0,9784
2	0,05	0,9964	0,9556	0,9332	0,9281	0,8932	0,9044
3	0,10	0,9893	0,9212	0,8811	0,8753	0,8152	0,8344
4	0,20	0,9742	0,8734	0,8088	0,8065	0,7128	0,7443
5	0,30	0,9617	0,8427	0,7629	0,7658	0,6502	0,6922

7.4.3. Средняя наработка на отказ

Если найдена зависимость (7.74) коэффициента готовности системы от значений коэффициентов готовности элементов, то среднюю наработку системы на отказ можно найти по формулам

$$\begin{aligned}\bar{T}_{н.с} &= K_{г.с} / \sum_{i \in E} \lambda_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i} K_{г.с}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ &= (1 - K_{н.с}) / \sum_{i \in E} \mu_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i} K_{н.с}(q_1, q_2, \dots, q_n); \\ K_{н.с} &= 1 - K_{г.с}, \quad q_i = 1 - p_i, \quad i = 1 \dots n.\end{aligned}\quad (7.79)$$

Функция $K_{г.с}(p_1, \dots, p_n)$ может быть найдена с помощью методов исчисления вероятностей случайных событий или логико-вероятностных методов, изложенных в главе 6. Рассмотрим примеры.

Пример 7.7. Найти среднюю наработку на отказ дублированной системы, состоящей из двух различных элементов в нагруженном режиме с интенсивностью отказов λ_i и интенсивностью восстановления μ_i , $i = 1, 2$.

Решение. Коэффициент готовности системы

$$K_{г.с} = 1 - q_1 q_2, \quad q_i = \lambda_i / (\lambda_i + \mu_i), \quad i = 1, 2.$$

Используя первую часть формулы (7.79), получим:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{н.с} &= (1 - q_1 q_2) / (\lambda_1 p_1 q_2 + \lambda_2 p_2 q_1) = (1 + \rho_1 + \rho_2) / (\mu \rho_1 \rho_2), \\ \mu &= \mu_1 + \mu_2, \quad \rho_i = \lambda_i / \mu_i.\end{aligned}$$

Если элементы одинаковы, то

$$\bar{T}_{н.с} = \mu / 2\lambda^2 + 1 / \lambda.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным из формулы (7.87a).

Пример 7.8. Найти среднюю наработку на отказ системы с мостиковой структурой (см. рис. 6.7).

Решение. Используя формулу (6.83), с помощью (7.79) находим:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{н.с} &= K_{г.с} / (\lambda_5 p_5 ((1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4) - p_2 p_4 - p_1 p_3 (1 - p_2 p_4)) + \\ &+ \lambda_1 p_1 (p_5 q_2 (1 - q_3 q_4) + q_5 p_3 (1 - p_2 p_4)) + \lambda_2 p_2 (p_5 q_1 (1 - q_3 q_4) + q_5 p_4 (1 - p_1 p_3)) + \\ &+ \lambda_3 p_3 (p_5 q_4 (1 - q_1 q_2) + q_5 p_4 (1 - p_2 p_4)) + \lambda_4 p_4 (p_5 q_3 (1 - q_1 q_2) + q_5 p_2 (1 - p_1 p_3))).\end{aligned}$$

Если элементы 1...4 имеют одинаковые показатели надежности, то $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$, $q_i = q$ для $i = 1 \dots 4$, и тогда

$$\begin{aligned}\bar{T}_{н.с} &= (p_5 (1 - q^2)^2 + q_5 (1 - (1 - p^2)^2)) / (\lambda_5 p_5 ((1 - q^2)^2 - p^2 (2 - p^2)) + \\ &+ 4\lambda q p^2 (1 + p_5 q + q_5 p)).\end{aligned}$$

В частности, при $p_5 = 0$, $q_5 = 1$ имеем:

$$\mu \bar{T}_{н.с} = \frac{1 - (1 - p^2)^2}{4\rho q p^2 (1 + p) + 2q^2 p^2} = \frac{1 + 4\rho + 2\rho^2}{2\rho^2 (5 + 2\rho)}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7.80)$$

Эта формула соответствует схеме общего нагруженного дублирования.

При $p_5 = 1, q_5 = 0$ получаем формулу для раздельного нагруженного дублирования:

$$\mu \bar{T}_{н.с} = (1 - q^2)^2 / 4\rho q p (1 - q^2) = 1 + 2\rho / 4\rho^2. \tag{7.81}$$

Если элемент 5 имеет такие же показатели надежности как и другие элементы, то $q_5 = q, p_5 = p$ и расчетная формула приобретает вид

$$\mu \bar{T}_{н.с} = \frac{1 - q^2 (1 + p)^2 + 2p^2 q^2 p_5}{2qp^2 (2\rho(1 + qp_5 + pq_5) + qq_5)} = \frac{1 + 5\rho + 8\rho^2 + 2\rho^3}{2\rho^2 (2 + 9\rho + 2\rho^2)}. \tag{7.82}$$

При малых ρ можно использовать приближенную формулу, в которой удалены слагаемые более высокого порядка малости, чем единица. Из формул (7.80)–(7.82) следует, что

$$\mu \bar{T}_{н.с} = \begin{cases} 1 / (10\rho^2), & p_5 = 0; \\ 1 / (4\rho^2), & p_5 = 1, \quad p_5 = p. \end{cases}$$

При изменении показателей надежности элемента 5 средняя наработка системы на отказ может измениться в 2,5 раза. При больших ρ значения средней наработки на отказ практически не зависят от надежности элемента 5. Зависимость средней наработки системы на отказ от показателей надежности элементов 1...4 и элемента 5 показана в табл. 7.5.

Таблица 7.5. Средняя наработка на отказ системы с мостиковой структурой при различных значениях показателей надежности элементов

№	P_5	$\mu \bar{T}_{н.с}$					
		$\rho = 0,005$	$\rho = 0,01$	$\rho = 0,02$	$\rho = 0,05$	$\rho = 0,10$	$\rho = 0,20$
1	0	4072	1036	268	47	13,7	4,35
2	0,1	4330	1101	285	50	14,5	4,59
3	0,2	4624	1175	304	53	15,3	4,86
4	0,5	5804	1474	380	66	18,8	5,85
5	0,8	7793	1973	506	87	24,3	7,32
6	1,0	10100	2550	650	110	30,0	8,75
7	P	10026	2513	632	103	27,1	7,53

Таблица 7.6. Сравнение средней наработки до отказа и средней наработки на отказ

№	ρ	$\lambda \bar{T}_0$	$\lambda \bar{T}_3$	$\lambda \bar{T}_4$	$\lambda \bar{T}_6$	$\lambda \bar{T}_{н.с}$
1	0,005	50,469	50,094	50,05435	49,91634	50,130
2	0,01	25,475	25,101	25,06272	24,92556	25,130
3	0,02	12,988	12,615	12,57988	12,44429	12,640
4	0,05	5,5245	5,1553	5,127476	4,996144	5,150
5	0,10	3,0700	2,7050	2,687204	2,561637	2,710
6	0,20	1,8786	1,5194	1,515124	1,398205	1,506

Сравнивая значения средней наработки до отказа и средней наработки на отказ, видим (табл. 7.6), что средняя наработка на отказ занимает промежуточное положение между средней наработкой до отказа полностью работоспособной системы и системы с третьим уровнем деградации. Наиболее близка она к средней наработке до отказа при начальной структуре, принадлежащей второму уровню деградации (S_{21} , S_{22}).

7.4.4. Вероятность безотказной работы

При наличии графа состояний для марковской модели надежности вероятность безотказной работы системы можно найти, составляя систему дифференциальных уравнений типа (7.1) или систему интегральных уравнений типа (7.8). Решение обеих систем находят путем операционного преобразования Лапласа—Карсона, последующего решения систем алгебраических уравнений и обратного операционного преобразования. Этот путь универсален, но довольно сложен, так как уже в весьма простых задачах обратное преобразование аналитическими методами становится очень трудоемким и часто практически нереализуемым. Поэтому используют приближенную формулу, основанную на асимптотическом поведении функции вероятности безотказной работы при «быстром» восстановлении, когда отношение среднего времени восстановления элемента к средней наработке до отказа элемента стремится к нулю. При этом условии точную расчетную формулу для вероятности безотказной работы системы можно представить как взвешенную смесь экспонент, из которых только одна имеет малый по абсолютной величине показатель и поэтому медленно затухает. Остальные экспоненты имеют значительно большие по абсолютной величине отрицательные показатели и затухают практически до нуля в конце переходного периода, оцениваемого величиной 3–5 средних значений времени восстановления. По окончании переходного периода вероятность безотказной работы можно довольно точно оценить по приближенной формуле

$$P_c(t) \approx \exp(-t / \bar{T}_{o,c}) > \exp(-t / \bar{T}_{n,c}), \tag{7.83}$$

где $\bar{T}_{o,c}$ — средняя наработка до отказа системы при полностью работоспособном начальном ее состоянии. Формула (7.83) дает оценку снизу точного значения вероятности. Если $\bar{T}_{o,c}$ не удастся найти, но известна средняя наработка на отказ, то в (7.83) можно заменить $\bar{T}_{o,c}$ на $\bar{T}_{n,c}$. Однако надо иметь в виду, что $\bar{T}_{n,c} < \bar{T}_{o,c}$, и поэтому погрешность приближенной формулы увеличивается.

Пример 7.9. Оценить влияние надежности элемента 5 в мостиковой структуре (см. рис.6.7) на вероятность безотказной работы системы.

Решение. Представим формулу (7.82) в виде

$$\mu \bar{T}_{n,c} = \frac{1 + 4p + 2p^2 + 2p^2 p_5}{2p^2 (5 + 2p - p_5 (3 - 2p))}. \tag{7.84}$$

Результаты расчетов по формулам (7.83) и (7.84) представлены в табл. 7.7, где $a = \mu \bar{T}_{n,c}$.

Таблица 7.7. Зависимость ВБР системы с мостиковой структурой от надежности элемента 5

№	ρ	P_5	$P_c(t)$			
			$a = 10$	$a = 50$	$a = 100$	$a = 200$
1	0,01	0	0,9904	0,9529	0,9080	0,8244
2	0,01	0,1	0,9910	0,9556	0,9132	0,8340
3	0,01	0,2	0,9915	0,9584	0,9185	0,8436
4	0,01	0,5	0,9932	0,9666	0,9344	0,8731
5	0,01	0,8	0,9949	0,9750	0,9506	0,9036
6	0,01	1	0,9961	0,9806	0,9615	0,9246
7	0,02	0	0,9634	0,8298	0,6886	0,4742
8	0,02	0,1	0,9655	0,8390	0,7039	0,4955
9	0,02	0,2	0,9676	0,8482	0,7195	0,5177
10	0,02	0,5	0,9740	0,8766	0,7684	0,5905
11	0,02	0,8	0,9804	0,9059	0,8206	0,6735
12	0,02	1	0,9847	0,9260	0,8574	0,7351
13	0,03	0	0,9220	0,6663	0,4440	0,1971
14	0,03	0,1	0,9264	0,6823	0,4655	0,2167
15	0,03	0,2	0,9308	0,6986	0,4881	0,2382
16	0,03	0,5	0,9441	0,7499	0,5624	0,3163
17	0,03	0,8	0,9575	0,8049	0,6479	0,4198
18	0,03	1	0,9666	0,8438	0,7120	0,5070
19	0,04	0	0,8696	0,4972	0,2472	0,0611
20	0,04	0,1	0,8766	0,5177	0,2680	0,0718
21	0,04	0,2	0,8837	0,5390	0,2905	0,0844
22	0,04	0,5	0,9053	0,6082	0,3699	0,1368
23	0,04	0,8	0,9274	0,6862	0,4708	0,2217
24	0,04	1	0,9425	0,7436	0,5529	0,3057
25	0,05	0	0,8093	0,3471	0,1205	0,0145
26	0,05	0,1	0,8191	0,3688	0,1360	0,0185
27	0,05	0,2	0,8291	0,3918	0,1535	0,0236
28	0,05	0,5	0,8597	0,4697	0,2206	0,0487
29	0,05	0,8	0,8914	0,5628	0,3167	0,1003
30	0,05	1	0,9131	0,6347	0,4029	0,1623

Из данных, приведенных в табл. 7.6, следует, что элемент 5 влияет на ВБР системы как при малых, так и при больших значениях времени функционирования t , как при быстром, так и при не очень быстром восстановлении.

7.5. Учет конечного времени подключения резерва

Время подключения резерва при структурном резервировании играет большую роль. Резервирование имеет смысл только в том случае, если резервное оборудование удастся своевременно подключить вместо отказавшего основного, не допустив срыва задания или падения качества функционирования всей системы ниже установленного уровня, потери или искажения информации, задержки в обработке информации и т. д. Другими словами, резервное оборудование не увеличивает избыточность системы, если его не удастся подключить раньше, чем произойдет срыв задания или падение качества функционирования системы ниже заданного уровня.

Во всех рассмотренных ранее моделях надежности предполагалось, что время подключения резерва никогда не превышает допустимое время перерыва в работе, то есть возможность такого превышения считалась невероятной. Проанализируем теперь системы, в которых возможны отказы по причине несвоевременного подключения резерва.

Сначала рассмотрим относительно простую систему с общим дублированием и переключателем резерва на два положения «основной—резервный» (рис. 7.7, а). Полагаем, что время подключения резерва T_n случайное и имеет экспоненциальное распределение с параметром v . Допустимое время перерыва в работе без нарушения функционирования также имеет экспоненциальное распределение с параметром δ . Интенсивности отказов элементов постоянны и равны λ в рабочем состоянии и $\lambda_1 = \alpha\lambda$ при нахождении в резерве. Отказы элементов обнаруживаются системой контроля мгновенно и достоверно. Во время переключения резервный элемент не отказывает. Интенсивность восстановления работоспособности элементов равна μ . При этих допущениях модель надежности является марковской. Граф состояний системы содержит четыре работоспособных и два неработоспособных состояния (рис. 7.7, б): 0 — оба элемента работоспособны; 1 — основной элемент отказал, происходит подключение резерва, но допустимое время перерыва не исчерпано; 2 — один элемент работоспособен и работает, другой элемент в ремонте; 3 — резервный элемент отказал и находится в ремонте; 4 — оба элемента отказали и находятся в ремонте; 5 — неработоспособное состояние вследствие несвоевременного подключения резерва.

Найдем выражения для вероятности отказа и средней наработки системы до отказа, используя дифференциальный метод. Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -(1 + \alpha)\lambda P_0(t) + \mu(P_2(t) + P_3(t)); \\ P'_1(t) &= \lambda P_0(t) - (\delta + v)P_1(t); \quad P'_2(t) = vP_1(t) - (\lambda + \mu)P_2(t); \\ P'_3(t) &= \alpha\lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_3(t); \quad P'_4(t) = \lambda(P_2(t) + P_3(t)); \quad P'_5(t) = \delta P_1(t). \end{aligned} \tag{7.85}$$

Начальные условия: $P(0) = 1$, $P_i(t) = 0$, $i > 0$. Вероятность отказа системы

$$Q_c(t) = P_4(t) + P_5(t). \tag{7.86}$$

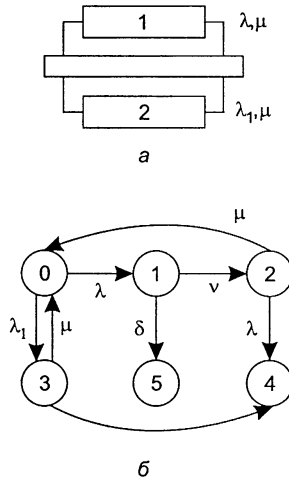


Рис. 7.7. Дублированная система: а — структура; б — граф состояний

Переходя в (7.85) к изображениям по Карсону, получим:

$$\begin{aligned}
 (s + \lambda + \alpha\lambda)P_0^*(s) - \mu(P_2^*(s) + P_3^*(s)) &= s; \\
 -\lambda P_0^*(s) + (s + \delta + \nu)P_1^*(s) &= 0; \quad -\nu P_1^*(s) + (s + \lambda + \mu)P_2^*(s) = 0; \\
 -\alpha\lambda P_0^*(s) + (s + \lambda + \mu)P_3^*(s) &= 0; \\
 -\lambda(P_2^*(s) + P_3^*(s)) + sP_4^*(s) &= 0; \quad -\delta P_1^*(s) + sP_5^*(s) = 0.
 \end{aligned} \quad (7.87)$$

Из (7.87) находим:

$$P_4^*(s) = \frac{\lambda^2}{s(s + \lambda + \mu)} \left(\alpha + \frac{\nu}{s + \delta + \nu} \right) P_0^*(s); \quad P_5^*(s) = \frac{\lambda\delta}{s(s + \delta + \nu)} P_0^*(s). \quad (7.88)$$

Чтобы найти $P_0^*(s)$, выразим $P_i^*(s)$ из второго, третьего и четвертого уравнений (7.87) и подставим в первое уравнение. Отсюда

$$P_0^*(s) = \frac{s(s + \lambda + \mu)}{s^2 + s(\mu + 2\lambda + \alpha\lambda) + \lambda(\mu + \lambda + \alpha\lambda)}. \quad (7.89)$$

Подставляя (7.89) в (7.88) и (7.88) в (7.86), найдем:

$$Q_c^*(s) = \frac{\lambda(s(\delta + \alpha\lambda) + \delta(\mu + \lambda + \alpha\lambda) + \nu\lambda(1 + \alpha))}{(s + s_1)(s + s_2)(s + s_3)}, \quad (7.90)$$

где $(-s_i)$ — корни уравнения

$$\begin{aligned}
 s^3 + s^2(\mu + 2\lambda + \alpha\lambda + \delta + \nu) + s(\lambda(\mu + \lambda + \alpha\lambda) + (\delta + \nu)(\mu + 2\lambda + \alpha\lambda)) + \\
 + \lambda(\delta(\mu + \lambda + \alpha\lambda) + \nu\lambda(1 + \alpha)) = 0.
 \end{aligned}$$

Обратное преобразование в (7.90) дает

$$Q_c(t) = 1 - \sum_{i=1}^3 e^{-s_i t} \frac{\lambda}{s_i} (\delta(\mu + \lambda + \alpha\lambda - s_i) + \alpha\lambda(\nu - s_i) + \nu\lambda) \Big/ \prod_{j=1, j \neq i}^3 (s_j - s_i).$$

Среднюю наработку до отказа находят с помощью предельного перехода:

$$\bar{T}_{o.c} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (1 - Q_c^*(s)) = \frac{\lambda(\lambda + \mu) + \delta(\mu + \lambda + \alpha\lambda) + \nu(\mu + 2\lambda + \alpha\lambda)}{\lambda(\delta(\mu + \lambda + \alpha\lambda) + \nu\lambda(1 + \alpha))}. \quad (7.91)$$

В отсутствие восстановления ($\mu = 0$) средняя наработка

$$\bar{T}_{o.c} = \frac{2 + \alpha}{\lambda(1 + \alpha)} - \frac{\delta - \lambda}{\lambda(1 + \alpha)(\delta + \nu)}.$$

Здесь первое слагаемое выражает среднюю наработку при мгновенном переключении, а второе обусловлено неидеальностью переключателя резерва.

Нетрудно убедиться, что при $\delta \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow \infty$ из (7.90) и (7.91) получаются известные формулы для случая мгновенного подключения резерва, а при $\delta \rightarrow \infty$ и $\nu \rightarrow 0$ — для случая нерезервированной системы.

Долю отказов, возникающих из-за несвоевременного подключения резерва, можно приближенно оценить по предельному соотношению, когда $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$p_5 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_5(t) = \lim_{s \rightarrow 0} P_5^*(s) = \frac{\beta(1 + \rho)}{(1 + \beta)(1 + \rho(1 + \alpha))}, \quad \beta = \frac{\delta}{\nu}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7.92)$$

Отсюда следует, что при ненагруженном резерве ($\alpha = 0$) доля отказов от несвоевременного подключения резерва изменяется от 0 ($\beta = 0$) до 1 ($\beta \rightarrow \infty$). При нагруженном резерве доля меняется от 0 до $(1 + \rho) / (1 + 2\rho) = 1 - \rho / (1 + 2\rho)$. Предельное значение меньше единицы, так как если первым отказывает резервный элемент, то характеристики ПР уже не влияют на надежность системы до восстановления работоспособности резервного элемента.

Расчеты по формуле (7.92) при ($\alpha = 1$) показывают, что доля отказов из-за несвоевременного подключения резерва значительна даже при сравнительно небольшом времени подключения и растет с уменьшением ρ (табл. 7.8)

Таблица 7.8. Доля отказов от несвоевременного подключения резерва

№	ρ	Доля отказов					
		$\beta = 0,2$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0,6$	$\beta = 0,8$	$\beta = 1,0$	$\beta = 2,0$
1	0,01	0,16503	0,28291	0,37132	0,44009	0,49510	0,66013
2	0,02	0,16346	0,28022	0,36779	0,43590	0,49038	0,65385
3	0,05	0,15909	0,27273	0,35795	0,42424	0,47727	0,63636
4	0,07	0,15643	0,26817	0,35197	0,41715	0,46930	0,62573
5	0,1	0,15278	0,26190	0,34375	0,40741	0,45833	0,61111
6	0,2	0,14286	0,24490	0,32143	0,38095	0,42857	0,57143

Так, если среднее время подключения составляет лишь 20% от среднего допустимого времени перерыва, то доля отказов составляет 16,5% при $\rho = 0,01$ и 14,4% при $\rho = 0,2$. Если же средние значения одинаковы ($\beta = 1$), то доля отказов составит, соответственно, 49,5 и 42,9%, а при $\beta = 2$ она возрастает до 66 и 57%.

Пример 7.10. В системе с интенсивностью отказов $\lambda = 0,0005 \text{ ч}^{-1}$ (средняя наработка 2000 ч) и интенсивностью восстановления $\mu = 0,1 \text{ ч}^{-1}$ (среднее время восстановления 10 ч) для повышения надежности используют общее нагруженное дублирование замещением. Необходимо выбрать способ подключения резерва (автоматическое, полуавтоматическое, ручное) и сформулировать требования к времени подключения, если известно, что среднее допустимое время перерыва $\bar{T}_d = 10$ мин, а среднее время подключения резерва лежит в диапазоне $0 \leq T_{\text{н}} \leq 1$ мин при автоматическом, $1 \text{ мин} \leq \bar{T}_{\text{н}} \leq 10$ мин — при полуавтоматическом и $10 \text{ мин} \leq \bar{T}_{\text{н}} \leq 60$ мин — при ручном подключении резерва. Снижение средней наработки системы до отказа от несвоевременного подключения резерва не должно превышать 10%.

Решение. Согласно исходным данным, $\alpha = 1$, $\delta = 1 / \bar{T}_d = 6 \text{ ч}^{-1}$. Подставляя эти значения в формулу (7.91), получим:

$$\lambda \bar{T}_{\text{о.с}} = \frac{60,65 + 10,15\nu}{60,6 + 0,1\nu}. \quad (7.93)$$

При мгновенном подключении резерва $\lambda \bar{T}_{\text{о.с}} = 101,5$. Надо подобрать такое ν , чтобы $\lambda \bar{T}_{\text{о.с}} \geq 0,9 \cdot 101,35 = 91,35$. Выберем сначала способ подключения. Из формулы (7.93) видно, что средняя наработка растет с увеличением ν . Поэтому начнем поиск ν с нижней границы диапазона для автоматического подключения резерва: $\bar{T}_{d \text{ max}} = 1$ мин, $\nu_{\text{min}} = 60 \text{ ч}^{-1}$. Для этого значения $\lambda \bar{T}_{\text{о.с}} = 10,05$. Очевидно, что при ручном и полуавтоматическом подключении это значение будет еще меньше. Поэтому выбираем автоматический переключатель резерва, для которого ν находим как решение уравнения: $\lambda \bar{T}_{\text{о.с}}(\nu) = 91,35$. Отсюда получим $\nu = 5394 \text{ ч}^{-1} = 1,5 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, среднее время подключения не должно превышать 0,66 с. При ухудшении надежности изделия требования к ПР снижаются. Так при $\lambda = 0,005 \text{ ч}^{-1}$ и неизменных прочих условиях получим, что среднее время подключения должно быть не более 6,1 с.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда в схеме скользящего резервирования имеется n основных и m резервных элементов. Время подключения резерва имеет произвольное распределение $F_{\text{н}}(t)$, допустимое время перерыва в работе имеет распределение $D(t)$, а время восстановления — распределение $F_{\text{в}}(t)$. Интенсивность отказов основных элементов равна λ , а интенсивность отказов резервных — $\alpha\lambda$. В этом случае модель надежности является полумарковской. Граф состояний (рис. 7.8, а) имеет $2m + 2$ состояний: $0 \dots m$ — работоспособные состояния с различным количеством резервных элементов; $m + 1 \dots 2m$ — неработоспособные состояния, возникшие из-за несвоевременного подключения резерва, $2m + 1$ — неработоспособное состояние, возникшее из-за отказа $m + 1$ элемента. Если $F_{\text{в}}(t) = 1 - \exp(-\mu t)$, то переходы между состояниями происходят с интенсивностями

$$\lambda_{i, i+1} = \Lambda_i = n p \lambda + (m - i) \alpha \lambda; \quad \lambda_{i, m+i+1} = n q \lambda; \quad \lambda_{i, i-1} = M_i = \mu \min(i, r),$$

$$i = 0 \dots m - 1; \quad \lambda_{m, 2m+1} = n \lambda; \quad q = 1 - p = P(T_d < T_n) = \int_0^{\infty} (1 - F_n(t)) dD(t),$$

где r — количество ремонтных бригад в ремонтном органе.

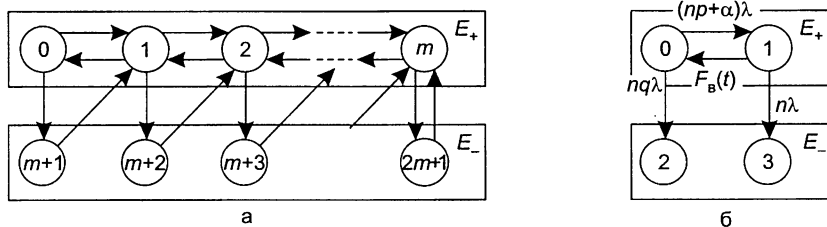


Рис. 7.8. Граф состояний системы с переключателем резерва:
 а — m резервных элементов; б — один резервный элемент

Для нахождения средней наработки до отказа системы составим систему алгебраических уравнений типа (7.14) или (7.15). Согласно графу состояний, система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= \frac{1}{\Lambda_i + M_i} (1 + \Lambda_i \bar{T}_{i+1} + M_i \bar{T}_{i-1}), \quad i = 0 \dots m-1; \\ \bar{T}_m &= \frac{1}{\Lambda_m + M_m} (1 + M_m \bar{T}_{m-1}). \end{aligned} \quad (7.94)$$

Решение (7.94) в общем виде имеет довольно сложный вид и поэтому здесь не приводится, но его можно найти в [8.2]. Здесь доведем до расчетных формул частный случай, когда в системе есть один резервный элемент ($m = 1$). Граф состояний содержит четыре состояния (рис. 7.8, б): два работоспособных (0, 1) и два неработоспособных (2, 3). Для этой системы найдем две характеристики: среднюю наработку до отказа и вероятность отказа.

Система уравнений типа (7.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \bar{\tau}_0 + p_{01} \bar{T}_1; \quad \bar{T}_1 = \bar{\tau}_1 + p_{10} \bar{T}_0; \quad p_{01} = (np + \alpha) / (n + \alpha); \quad p_{10} = \int_0^\infty e^{-n\lambda x} dF_b(x) = \\ &= F_b^*(n\lambda); \quad \bar{\tau}_0 = \frac{1}{(n + \alpha)\lambda}; \quad \bar{\tau}_1 = \int_0^\infty e^{-n\lambda x} (1 - F_b(x)) dx = \frac{1}{n\lambda} (1 - F_b^*(n\lambda)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{T}_{0c} = \bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} \frac{n + (np + \alpha)(1 - F_b^*(n\lambda))}{nq + (np + \alpha)(1 - F_b^*(n\lambda))}. \quad (7.95)$$

При $n = 1$, $p = \nu / (\nu + \delta)$, $1 - F_b^*(n\lambda) = \lambda / (\lambda + \mu)$ формула (7.95) совпадает с (7.91) при $\alpha = 1$.

Чтобы найти вероятность отказа, используем интегральный метод. Для полумарковской модели надежности составим уравнения типа (7.11):

$$\begin{aligned} P_0^*(s) &= 1 - F_0^*(s) + P_{01}^*(s)P_1^*(s); \quad P_1^*(s) = 1 - F_1^*(s) + P_{10}^*(s)P_0^*(s); \\ 1 - F_0^*(s) &= \frac{s}{s + n\lambda + \alpha\lambda}; \quad 1 - F_1^*(s) = \frac{s}{s + n\lambda} (1 - F_b^*(s + n\lambda)); \\ P_{01}^*(s) &= p_{01}F_0^*(s); \quad P_{10}^*(s) = F_b^*(s + n\lambda). \end{aligned} \quad (7.96)$$

Здесь использованы изображения следующих функций:

$$1 - F_0(t) = \exp(-(n + \alpha)\lambda t); \quad 1 - F_1(t) = (1 - F_b(t))e^{-n\lambda t}; \quad P_{10}(t) = \int_0^t e^{-n\lambda x} dF_b(x).$$

Решение (7.96) имеет вид

$$P_0^*(s) = \frac{1 - F_0^*(s) + (1 - F_1^*(s))P_{01}^*(s)}{1 - P_{01}^*(s)P_{10}^*(s)}.$$

Отсюда изображение для функции вероятности отказа

$$Q_c^*(s) = 1 - P_0^*(s) = \frac{n\lambda q + (np + \alpha) \frac{n\lambda}{s + n\lambda} (1 - F_b^*(s + n\lambda))}{s + n\lambda q + \lambda(np + \alpha)(1 - F_b^*(s + n\lambda))}.$$

При известной функции $F_b(t)$ изображение приобретает окончательный вид, и можно выполнить обратное преобразование Лапласа—Карсона.

При быстром восстановлении, когда $\lambda \bar{T}_b$ мало, можно использовать приближенные формулы для расчета вероятности безотказной работы:

$$P_c(t) \approx \exp(-\Lambda_0 q^* t),$$

где q^* — коэффициент разрежения потока отказов. При одной ремонтной бригаде ($r = 1$) этот коэффициент рассчитывают по формуле

$$q^* = (nq\lambda + \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_m \beta_m / m!) / \Lambda_0; \quad \beta_m = \int_0^\infty x^m dF_b(x).$$

При неограниченном восстановлении ($r = m$) имеем:

$$q^* = (nq\lambda + \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_m \bar{T}_b^m / m!) / \Lambda_0; \quad \bar{T}_b = \int_0^\infty x dF_b(x).$$

Отсюда следует, что при неограниченном восстановлении вероятность безотказной работы системы зависит только от среднего времени восстановления и не зависит от вида распределения времени восстановления.

7.6. Расчет надежности систем с ветвящейся структурой

7.6.1. Постановка задачи

Структурная схема надежности технических средств АСОИУ не всегда может быть сведена к двухполюсной схеме (последовательно-параллельной или сложной). Это происходит тогда, когда в системе управления создается несколько уровней (рангов) управления и каждому органу (звену) управления некоторого уровня непосредственно подчинено несколько органов управления более низкого уровня или исполнительных органов, а сам он находится в подчинении и управляется органом управления более высокого уровня. Такие системы назы-

Ветвящаяся структура систем называется *многоуровневой*, или *ветвящейся* (рис. 7.9).

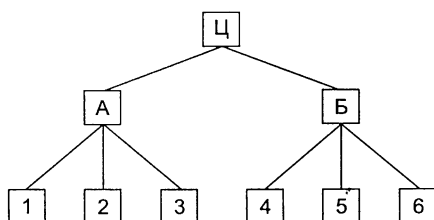


Рис. 7.9. Ветвящаяся структура системы управления

Ветвящейся структурой обладают и подсистемы сбора (передачи) данных, обслуживающих периферийные системы управления (рис. 7.10).

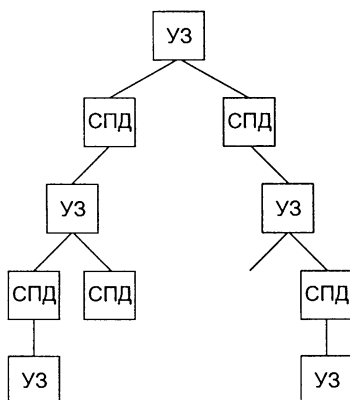


Рис. 7.10. Структура подсистемы передачи данных в составе системы управления

Ветвящейся может оказаться и внутренняя структура органа управления. Например, в автоматизированной системе управления блоком АЭС конфигурация вычислительной системы содержит процессор и несколько периферийных модулей (гибкие и жесткие магнитные диски с дисководом, мониторы, принтеры и пр.), сопрягаемые с помощью интерфейсных карт (рис. 7.11).

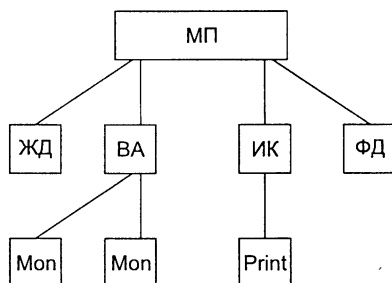


Рис. 7.11. Структура вычислительной системы в составе АСУ блоком АЭС

При формализации процесса функционирования системы с ветвящейся структурой удобно пользоваться терминологией теории графов [10] и называть органы и звенья управления вершинами, а элементы подсистемы передачи данных вместе с каналами связи и магистрали передачи данных — дугами, обозначая их, соответственно, кружками и сплошными линиями со стрелками или без них (рис. 7.12).

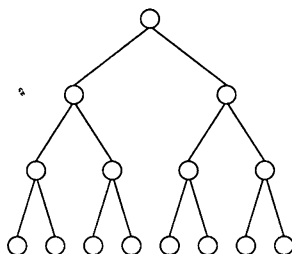


Рис. 7.12. Формализованная ветвящаяся структура типа «дерево»

В линейной структуре управления каждая вершина имеет связь только с вершинами соседних рангов (меридианные связи), но не имеет связей в пределах данного ранга (рокадные связи) и через несколько рангов. Такие структуры называют еще структурами непосредственного подчинения, или структурами типа «дерево». В общем случае возможны произвольные меридианные связи между вершинами различных рангов и произвольные рокадные связи (рис. 7.13).

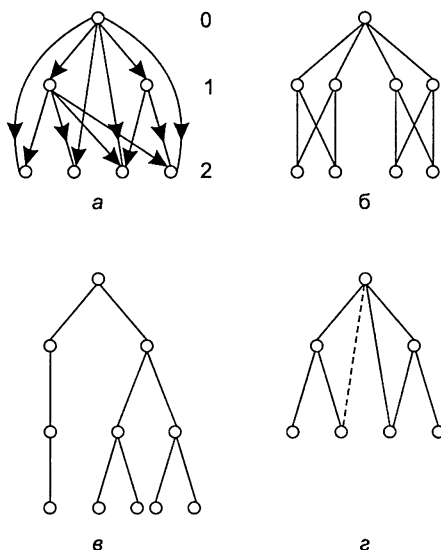


Рис. 7.13. Варианты ветвящихся структур с многоуровневым и неоднозначным подчинением

В системах связи меридианные связи между вершинами несоседних рангов и рокадные связи часто создаются с целью повышения надежности и живучести. В системах управления они приводят к так называемым патологическим струк-

турам [9]. Простейший пример патологии — двойное подчинение (рис. 7.13, б, в), то есть существование для некоторого звена двух вершин управления, которым оно непосредственно подчиняется. Чтобы такая система могла нормально функционировать, функции должны быть четко разделены между звеньями более высокого ранга, которым подчинено данное звено. Существуют ситуации, когда неоднозначное подчинение осуществляется временно, например, в период временной неработоспособности основного звена. К патологическим относят структуры, в которых некоторому звену подчиняется только одно звено более низкого ранга (рис. 7.13, в). Этот вырожденный случай означает, что один из уровней управления лишний. Однако если вводится двойное управление, то такой вариант получает объяснение и оправдание в связи с дублированием функций управления для увеличения надежности. Еще один вид нарушений в иерархической структуре связан с межранговым управлением (рис. 7.13, а, г). Центральное звено, имеющее первый ранг, управляет звеньями нижнего ранга, минуя промежуточные уровни. Межранговое управление может возникнуть по различным причинам: ввиду исключительной важности некоторых звеньев нижнего ранга, особого характера выполняемых ими функций, риска отказа или потери по другим причинам звена непосредственного управления. В нормальных условиях управление звеном третьего ранга осуществляется центром через звено второго ранга. В особых условиях центр управляет периферийными звеньями непосредственно: при деградации структуры, при необходимости ускорения выполнения функции управления звеном 3 и др. При этом звено 2 должно быть уведомлено о том, что центр берет управление звеном 3 на себя во избежание двойного управления.

При распределении функций управления между различными звеньями более высокого ранга возможна ситуация, когда и в нормальных условиях периферийное звено управляется звеньями нескольких рангов (например, звено 3 получает различные управляющие воздействия от звеньев 2 и 1). Тогда считается особым случай, когда некоторое звено находится под управлением только одного ближайшего по рангу звена. Это происходит при передаче центром части или всех своих функций на временной основе нижестоящим звеньям управления. Такое перераспределение функций возникает в интересах повышения оперативности управления, для разгрузки центра и по другим причинам и называется «делегированием полномочий».

Для исследования систем с меридианными связями полезно ввести понятие ветви. *Ветвью* называют фрагмент ветвящейся структуры, содержащий центральное звено, одно периферийное звено и все линии связи и звенья промежуточных рангов, которые принимают или могут принять участие во взаимодействии центрального и периферийного звеньев в процессе управления или сбора данных. Если ветвь содержит не более одного звена каждого ранга, она называется простой. Прочие ветви называют сложными. Простые ветви могут быть односвязными, как в структуре типа «дерево», многосвязными или полносвязными. В полносвязной ветви каждое звено связано прямыми линиями связи со всеми остальными звеньями этой ветви. Многосвязные звенья занимают промежуточное положение. Ветвящаяся система, имеющая хотя бы одну сложную ветвь, является системой с неоднозначным подчинением. Если все ветви системы одинаковы по структуре, то система называется изотропной, в противном случае — неизотропной.

Как подчеркивалось в главе 1, о надежности систем можно говорить только в том случае, если удастся четко сформулировать критерии отказа, то есть разделить все состояния системы на два подмножества: работоспособные и неработоспособные состояния. В системах с ветвящейся структурой снижение качества при отказах периферийных или промежуточных звеньев происходит постепенно, так что затруднительно отнести многие состояния к работоспособным или неработоспособным. Однако чтобы сформулировать задачу надежности, надо сконструировать критерий отказа. В настоящее время существует несколько предложений, как преодолеть эту трудность. Приведем здесь два из них. Для простоты будем рассматривать изотропную систему с меридианными связями, поскольку все рассуждения несложно обобщить для других систем.

Первый подход состоит в использовании (в качестве промежуточных) показателей эффективности с последующим переходом к такому показателю надежности, как коэффициент сохранения эффективности. Сначала формулируется понятие работоспособности одной ветви: ветвь работоспособна, если есть хотя бы один работоспособный путь от центрального звена к периферийному (или в обратном направлении). Далее определяются вероятности того, что в заданный момент времени работоспособны ровно k ветвей из общего числа R :

$$P_k(t) = P(K(t) = k), \quad (7.97)$$

где $K(t)$ — случайное число работоспособных ветвей. Для каждого состояния $A_k = (K(t) = k)$ вводится весовой коэффициент α_k , характеризующий уровень качества функционирования системы в этом состоянии, и после этого вычисляется показатель эффективности по формуле

$$E = \sum_{k=0}^R \alpha_k P_k(t).$$

При идеально надежной аппаратуре показатель эффективности $E_0 = \alpha_R$. Коэффициент сохранения эффективности $K_s = E/E_0$. В частности, если функция изменения качества описывается полиномом m -й степени

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^m a_i k^i,$$

то

$$E = \sum_{i=0}^m a_i M(N^i), \quad (7.98)$$

где $M(N_i)$ — i -й начальный момент распределения числа работоспособных ветвей. Главная трудность при реализации этого подхода состоит в том, что в большинстве практических случаев не удастся объективно установить весовые коэффициенты или обосновать их выбор. Вследствие значительной доли субъективности в выборе весовых коэффициентов ценность расчетов коэффициента сохранения эффективности бывает невысока.

Второй подход состоит в том, чтобы вычислять показатель надежности по заданному допустимому уровню снижения качества функционирования системы и соответствующему ему допустимому уровню деградации структуры. Тогда вероятность безотказной работы невосстанавливаемых систем можно вычислить по формуле

$$P_c(t) = \pi_n(t) = \sum_{k=0}^R P_k(t) = P(T_0 > t), \quad (7.99)$$

где T_0 — наработка системы до того момента, когда откажет $R - n + 1$ ветвь, а $P_k(t)$ находят по формуле (7.97). При различных n получают семейство зависимостей вероятностей от времени. Вместо семейства (7.99) можно находить семейство

$$\pi_t(n) = \sum_{k=0}^R P_k(t) = P(N(t) \geq n), \quad (7.100)$$

вычисляемое для заданного t .

Для восстанавливаемых систем также вычисляют вероятность того, что в момент t будет работоспособно не менее n ветвей. Эта вероятность — не что иное как нестационарный коэффициент готовности (функция готовности) системы при заданном пороге деградации структуры:

$$K_{г.с}(t, n) = \sum_{k=n}^R P_k(t). \quad (7.101)$$

Вместо семейства (7.101) можно при заданном t определять семейство

$$K_{г.с.t}(n) = \sum_{k=n}^R P_k(t) = P(N(t) \geq n). \quad (7.102)$$

Для стационарного участка эксплуатации вместо (7.102) получим семейство чисел, выражающих коэффициент готовности системы при заданном пороге деградации n :

$$K_{г.с}(n) = P(N \geq n). \quad (7.103)$$

Кроме дискретных распределений (7.100) и (7.103) для оценки надежности можно использовать моменты этих распределений

$$M(N^i) = \sum_{k=1}^R k^i P_k.$$

В частности, среднее число работоспособных ветвей как мера надежности

$$M(N) = \bar{N} = \sum_{k=1}^R k P_k.$$

Если $a_1 = 1$, а остальные $a_i = 0$, то согласно (7.98) имеем:

$$E = MN = RP_b; \quad E_0 = R; \quad K_0 = E / E_0 = P_b, \quad (7.104)$$

где P_b — вероятность работоспособности одной ветви.

Далее второй подход будет рассматриваться в качестве основного.

Система с многосвязной ветвящейся структурой обладает функциональной избыточностью. Поэтому определенная часть оборудования в каждой конкретной операции передачи данных или управляющего воздействия не участвует в процессе взаимодействия центрального и периферийного звеньев, пока нет отказов в основных направлениях связи этих звеньев, даже если это оборудование работоспособно. В этом случае возникает задача определения степени загрузки

избыточных элементов и групп элементов выполнением функций основной подсистемы. Для оценки загрузки используют следующие показатели:

- Коэффициент информационной загрузки i -й подсистемы одной ветви структуры $K_{ин}$, выражающий вероятность того, что в произвольный момент времени подсистема (путь, звено, линия связи, группа путей и т. д.) работоспособна, причем, согласно принятому алгоритму распределения маршрутов в сети, именно эта подсистема участвует в обеспечении взаимодействия центрально-го и периферийного звеньев.
- Коэффициент полезного времени i -й подсистемы одной ветви $K_{п. в}$, равный отношению $K_{ин}$ к коэффициенту готовности $K_{г. i}$ и выражающий долю времени работоспособного состояния, в течение которого используется данная подсистема.
- Распределение числа работоспособных ветвей, в которых в заданный или в произвольный момент времени используется данная подсистема.

Далее будут рассмотрены изотропные системы с меридианными связями и одно-значным подчинением звеньев в ветвях. Для анализа надежности будет использоваться модифицированный логико-вероятностный метод (МЛВМ), представляющий собой развитие метода, рассмотренного в главе 6. Основные математические результаты этого метода приведены в приложении.

7.6.2. Расчет надежности и выбор структурных параметров многосвязных систем при полном оповещении о состоянии сети

В невосстанавливаемых системах МЛВМ используется для определения вероятности безотказной работы $P_c(t)$ и производных от нее показателей, а в восстанавливаемых системах — для определения коэффициента готовности $K_{г. c}$ и функции готовности $K_{г. c}(t)$ при условии независимого функционирования элементов как по отказам, так и по восстановлению. Последние два показателя являются локальными характеристиками надежности, относящимися к заданному или произвольному моменту времени t (но не к интервалу времени) и выражающими вероятность того, что в системе будет работоспособно не менее заданного числа ветвей. В качестве аргументов для показателей надежности системы выступают соответствующие показатели для элементов ($P_i(t)$, $K_{г. i}$, $K_{г. i}(t)$). Поскольку методика нахождения указанных показателей надежности одна и та же, далее будем использовать обобщенный показатель $P_c(p_1, \dots, p_n) = P\{F(x_1, \dots, x_n) = 1\}$, где $p_i = P\{x_i = 1\}$, подразумевая под ним любой из приведенных ранее показателей.

Одна многосвязная ветвь системы с ветвящейся структурой (при выполнении функции сбора данных от периферийных звеньев к центру или при передаче управляющих воздействий от центра к периферийным звеньям) является двух-полусной системой и может быть представлена в виде ориентированного графа, в котором все элементы (звенья и линии связи) могут быть неработоспособными с ненулевыми и, вообще говоря, различными вероятностями (рис. 7.13). Ориентированный граф ациклический, то есть в нем отсутствуют контуры, а все пути между полюсами простые — в них все звенья упорядочены в порядке возрастания или убывания ранга. Для определенности будем считать, что выходной полюс имеет минимальный номер (максимальный ранг), а входной полюс —

При полном оповещении о состоянии сети любой путь между полюсами может быть использован для передачи данных или управляющих воздействий (УВ), если он работоспособен и нет априорных ограничений на его использование. Выбор направления передачи УВ зависит от возможности перераспределения функций управления между звеньями различных рангов. По этому признаку можно выделить три класса систем. В классе 1 нет ограничений на распределение функций между звеньями управления различных рангов, и поэтому любое звено может принять на себя управление звеньями более низких рангов. В классе 2 есть ограничения на распределение функций, но они связаны с состоянием элементов только данной ветви. В классе 3 ограничения зависят от состояния элементов и других ветвей системы. В классе 1 ветвь работоспособна, если между полюсами есть хотя бы один работоспособный путь. Путь считается работоспособным, если работоспособны все его элементы: звенья и линии связи. В классе 2 при составлении ЛФРС реализуется логика распределения функций между звеньями управления. В классе 3 при составлении ЛФРС появляется зависимость работоспособности одного пути от состояния элементов других ветвей. Рассмотрим теперь правила расчета и расчетные формулы для ветвей различных классов.

Запись СФФВ (смешанной формы функции вероятностей). Используя формулы приложения, запишем смешанную форму в виде

$$P_n = Pf_n = 1 = p_n \left(1 - \prod_{i=n-s}^{n-1} q_{ni}^{f_i} \right); \quad P_i = Pf_i = 1 = p_i \left(1 - \prod_{j=m}^{i-1} q_{ij}^{f_j} \right),$$

где $p_i = P\{x_i = 1\}$, $q_{ij} = P\{x_{ij} = 1\}$, $m = \max(1, i - s)$. При записи СФФВ замещаются $s + 1$ логических переменных из общего количества $N_1 = (s + 1)(n - s/2)$.

Получение вероятностной функции ВФ. В многошаговой процедуре замещению подлежат функции f_i в такой последовательности: сначала f_{n-1} , затем f_{n-2} , ..., f_1 . В течение первых $n - s$ шагов замещается по $s + 1$ переменной, а в последних s шагах замещается $s, s - 1, \dots, 1$ переменных. После первых двух шагов имеем:

$$\begin{aligned} P_n^{(n-2)}(f_{n-2}, \dots, f_{n-s-1}) &= p_n \left(p_{n-1} \left(1 - \prod_{i=\max(n-s-1, 1)}^{n-2} q_{n-1, i}^{f_i} \right) \left(1 - q_{n, n-1} \prod_{j=n-s}^{n-2} q_{ij}^{f_j} \right) \right) + \\ &+ \left(q_{n-1} + p_{n-1} \prod_{i=\max(n-s-1, 1)}^{n-2} q_{n-1, i}^{f_i} \right) \left(1 - \prod_{j=n-s}^{n-2} q_{ij}^{f_j} \right); \\ P_n^{(n-3)}(f_{n-3}, \dots, f_{n-s-1}) &= p_{n-2} \left(1 - \prod_{i=\max(n-s-2, 1)}^{n-3} q_{n-2, i}^{f_i} \right) P_n^{(n-2)}(1, f_{n-3}, \dots, f_{n-s-1}) + \\ &+ \left(q_{n-2} + p_{n-2} \prod_{i=\max(n-s-2, 1)}^{n-3} q_{n-2, i}^{f_i} \right) P_n^{(n-2)}(0, f_{n-3}, \dots, f_{n-s-1}). \end{aligned}$$

Пример 7.11. Определить достаточную степень структурной избыточности в многосвязной ветвящейся пятиуровневой системе, если известно, что звенья сети идеально надежны, а линии связи имеют доверительные интервалы для вероятности неработоспособного состояния $(0,05; 0,1)$. Система должна обеспечить коэффициент сохранения эффективности типа (7.104) не менее 0,99.

Решение. ЛФРС четырехсвязной системы ($s = 4$) имеет вид

$$\begin{aligned} f_5 &= x_1 x_5 (x_{51} \vee x_{52} f_2 \vee x_{53} f_3 \vee x_{54} f_4); \quad f_4 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3); \\ f_3 &= x_3 (x_{31} \vee x_{32} f_2); \quad f_2 = x_2 x_{21}. \end{aligned}$$

Переход к смешанной форме дает

$$\begin{aligned} P_5^{(4)}(f_2, f_3, f_4) &= p_1 p_5 (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}^{f_4}); \quad P_4^{(3)}(f_2, f_3) = p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}); \\ P_3^{(2)}(f_2) &= p_3 (1 - q_{31} q_{32}^{f_2}); \quad P_2^{(1)} = p_2 p_{21}. \end{aligned}$$

После второго шага замещения имеем:

$$\begin{aligned} P_5^{(3)}(f_2, f_3) &= p_1 p_5 \left(p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}) + \right. \\ &+ (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3}) \left. \right). \end{aligned}$$

После третьего шага имеем:

$$\begin{aligned} P_5^{(2)}(f_2) &= p_1 p_5 (p_3 (1 - q_{31} q_{32}^{f_2}) (p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53} q_{54}) + \\ &+ (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53})) + (q_3 + p_3 q_{31} q_{32}^{f_2}) \times \\ &\times (p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{54}) + (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^{f_2}) (1 - q_{51} q_{52}^{f_2}))). \end{aligned}$$

После замещения f_2 получаем:

$$K_{\text{с}} = P_{\text{в}} = p_2 p_{21} P_5^{(2)}(1) + (1 - p_2 p_{21}) P_5^{(2)}(0).$$

Чтобы получить из этой формулы коэффициент сохранения эффективности трехсвязной системы, надо принять $p_{51} = 0$, для двухсвязной системы — дополнительно $p_{52} = p_{41} = 0$, для односвязной системы — $p_{53} = p_{42} = p_{31} = 0$.

В частности, при одинаковых вероятностях $p_i = P_1$, $p_{ij} = 1 - q_{ij} = P_2 = 1 - Q_2$ и различных s формулы приобретают следующий вид:

$$K_{\text{с}}(s=4) = P_1^2 P_2 \left(P_1^2 (1 - Q_2^2)(1 - Q_2^3)(1 + P_1 P_2 Q_2^3) + P_1 (1 - Q_2^2)(1 + P_1 P_2 Q_2^2) + \right. \\ \left. + P_1 (1 - P_1 P_2)(1 - Q_2^2)(1 + P_1 P_2 Q_2^2) + (1 - P_1 P_2)^2 (P_1 (1 - Q_2^2) + 1 - P_1 P_2) \right);$$

$$K_{\text{с}}(s=3) = P_1^3 P_2 \left(P_1 (1 - Q_2^2)(P_1 (1 - Q_2^3))^2 + (Q_1 + P_1 Q_2^3)(1 - Q_2^2) \right) + \\ + (Q_1 + P_1 Q_2^2)(P_1 (1 - Q_2^2))^2 + P_2 (Q_1 + P_1 Q_2^2) + (1 - P_1 P_2) \times \\ \times (P_1 (1 - Q_2^2))^2 + P_2 (Q_1 + P_1 Q_2^2) + P_2 (1 - P_1 P_2)^2);$$

$$K_{\text{с}}(s=2) = P_1^3 P_2 \left(P_1 (1 - Q_2^2)(P_1 (1 - Q_2^2))^2 + P_2 (Q_1 + P_1 Q_2^2) \right) + \\ + P_1 P_2^2 (Q_1 + P_1 Q_2^2) + P_2 (1 - P_1 P_2)(1 + P_1 P_2 Q_2);$$

Если теперь предположить, что все звенья идеально надежны, то формулы приобретают вид

$$K_{\text{с}}(4) = P_2 \left((1 - Q_2^2)(1 - Q_2^3)(1 + P_2 Q_2^3) + \right. \\ \left. + (1 - Q_2^2)(1 + P_2 Q_2^2)(1 + Q_2) Q_2 + Q_2^2 (1 + P_2 Q_2) \right);$$

$$K_{\text{с}}(3) = P_2 \left((1 - Q_2^2)((1 - Q_2^3)^2 + Q_2^3 (1 - Q_2^2)) + \right. \\ \left. + ((1 - Q_2^2)^2 + P_2 Q_2^2)(1 + Q_2) Q_2 + Q_2^2 P_2 \right);$$

$$K_{\text{с}}(2) = P_2^2 ((1 - Q_2^2)(P_2 (1 + Q_2)^2 + Q_2^2) + Q_2 (1 + 2Q_2 P_2)).$$

Результаты вычислений при различных s , $P_1 = 1$, $P_2 = 0,90 \dots 0,95$ приведены в табл. 7.9.

Таблица 7.9. Коэффициент сохранения эффективности пятиуровневой системы первого класса

s	$K_{\text{с}}$		
	$P_2 = 0,90$	$P_2 = 0,92$	$P_2 = 0,95$
1	0,6561	0,7164	0,8145
2	0,9769	0,9855	0,9946
3	0,9961	0,9980	0,9995

Из данных, приведенных в таблице, видно, что при $P_2 = 0,90$ следует выбрать $s=3$, а при $P_2 = 0,95$ выбрать $s=2$. Из-за различий в структурных параметрах для границ доверительного интервала необходимо уточнение вероятности P_2 путем

сужения доверительного интервала. При этом надо иметь в виду, что при $s = 2$ коэффициент сохранения эффективности достигает заданного значения при $P_2 = 0,925$.

Многосвязная система второго класса

Если обозначить $f_{ij} = x_{ij}f_j$, то формулу (7.105) для звена i -го ранга можно представить в виде дизъюнкции

$$f_i = x_i \left(\bigvee_{(j)} f_{ij} \right),$$

выражающей возможность неограниченного перераспределения функций в системах первого класса и полной взаимозаменяемости звеньев более высокого ранга при управлении звеном i -го ранга.

Для систем второго класса вместо операции дизъюнкции используется произвольная функция алгебры логики φ_i от аргументов f_{ij} . Поэтому

$$f_n = x_n \varphi_n(f_{n,n-s}, \dots, f_{n,n-1}); \quad f_i = x_i \varphi_i(f_{i,m}, \dots, f_{i,i-1}), \quad m = \max(i-s, 1).$$

Для дальнейшего преобразования логической функции к ФПЧЗ и перехода к смешанной форме удобно определить функцию φ_i в виде дизъюнктивной нормальной формы ее аргументов. Далее надо использовать правила преобразования, разработанные для модифицированного логико-вероятностного метода.

Пример 7.12. Найти коэффициент сохранения эффективности пятиуровневой трехсвязной ветвящейся системы с ограниченным перераспределением функций управления, задаваемым логическими формулами

$$\varphi_5 = f_{54}f_{53} \vee f_{52}; \quad \varphi_4 = f_{43}f_{42} \vee f_{41}; \quad \varphi_3 = f_{32}f_{31}.$$

Согласно этим формулам, звеном пятого ранга могут управлять совместно звенья четвертого и третьего ранга или единолично — звенья первого и второго рангов. Причем звено первого ранга, не имея прямой линии связи со звеном пятого ранга, может управлять им только через звено второго ранга. Звеном четвертого ранга могут управлять совместно звенья третьего и второго рангов или единолично — звено первого ранга. Звеном третьего ранга управляют совместно звенья первого и второго рангов.

Решение. ЛФРС системы определяется системой логических уравнений

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5(x_{54}x_{53}f_4f_3 \vee x_{52}f_2); & f_4 &= x_4(x_{43}x_{42}f_3f_2 \vee x_{41}f_1); \\ f_3 &= x_3(x_{32}x_{31}f_2f_1); & f_2 &= x_2(x_{21}f_1); & f_1 &= x_1. \end{aligned}$$

Все эти формулы являются ФПЧЗ первого типа и не требуют преобразования. Замещение бесповторных переменных дает смешанную форму

$$\begin{aligned} P_5^{(4)}(f_2, f_3, f_4) &= p_1 p_5 (1 - q_{52}^{f_2} (1 - (1 - q_{53}^{f_3}) (1 - q_{54}^{f_4}))); \\ P_4^{(3)}(f_2, f_3) &= p_4 (1 - q_{41} (1 - (1 - q_{42}^{f_2}) (1 - q_{43}^{f_3}))); & P_3^{(2)}(f_2) &= p_3 p_{31} (1 - q_{32}^{f_2}). \end{aligned}$$

Далее следуют три шага замещения функций f_4 , f_3 и f_2 .

$$\begin{aligned}
P_5^{(3)}(f_2, f_3) &= p_1 p_5 \left(p_4 (1 - q_{41} (1 - (1 - q_{42}^{f_2}) (1 - q_{43}^{f_3}))) \times \right. \\
&\times (1 - q_{52}^{f_2} (1 - (1 - q_{53}^{f_3}) p_{54})) + (q_4 + p_4 q_{41} (1 - (1 - q_{42}^{f_2}) (1 - q_{43}^{f_3}))) (1 - q_{52}^{f_2}) \Big); \\
P_5^{(2)}(f_2) &= p_1 p_5 \left(p_3 p_{31} (1 - q_{32}^{f_2}) \left(p_4 (1 - q_{41} (1 - (1 - q_{42}^{f_2}) p_{43})) (1 - q_{52}^{f_2} (1 - p_{53} p_{54})) + \right. \right. \\
&+ (q_4 + p_4 q_{41} (1 - (1 - q_{42}^{f_2}) p_{43})) (1 - q_{52}^{f_2}) \Big) + (1 - p_3 p_{31} + p_3 p_{31} q_{32}^{f_2}) (1 - q_{52}^{f_2}) \Big); \\
K_s &= P_5 = p_5 p_2 p_{21} p_1 \left(p_3 p_{31} p_{32} \left(p_4 (1 - q_{41} (1 - p_{42} p_{43})) (1 - q_{52} (1 - p_{53} p_{54})) + \right. \right. \\
&+ (q_4 + p_4 q_{41} (1 - p_{42} p_{43})) p_{52} \Big) + (1 - p_3 p_{31} p_{32}) p_{52} \Big).
\end{aligned}$$

При одинаковой надежности звеньев ($p_i = P_1$) и линий связи ($p_{ij} = P_2$) имеем:

$$K_s = P_1^3 P_2 (P_1 P_2^2 (P_1 P_2^2 (1 + P_2 Q_2))^2 + P_2 (Q_1 + P_1 Q_2 (1 - P_2^2))) + P_2 (1 - P_1 P_2^2)).$$

Если $P_1 = 1$, а P_2 находится в интервале (0,90; 0,95), то K_s принимает значения, приведенные в табл. 7.10.

Таблица 7.10. Коэффициент сохранения эффективности пятиуровневой системы второго класса

s	K_s		
	$P_2 = 0,90$	$P_2 = 0,92$	$P_2 = 0,95$
1	0,6561	0,7164	0,8145
2	0,4783	0,5578	0,6983
3	0,8679	0,8985	0,9410

Сравнивая условия функционирования систем первого и второго классов, видим, что возможность перераспределения функций управления существенно влияет на надежность системы, позволяя уменьшить риск отказа. Так, при $s = 3$ и $P_2 = 0,90$ риск отказа в системе первого класса уменьшается в 19 раз по сравнению с системой второго класса, а при $s = 2$ и $P_2 = 0,95$ риск отказа снижается более чем в 50 раз. Заметим также, что надежность односвязной системы первого класса оказывается выше надежности двухсвязной системы второго класса.

Многосвязная система третьего класса

Особенности многосвязных систем третьего класса отражаются в ЛФРС с помощью дополнительных множителей в дизъюнктивных членах логической функции

$$f_n = x_n \left(\bigvee_{(j)} x_{ni} f_i \varphi_i \right); \quad f_i = x_i \left(\bigvee_{(j)} x_{ij} f_j \varphi_j \right).$$

Здесь φ_i — логические функции, выражающие условия использования направления ij и зависящие от переменных, входящих в функцию f_j . В системе с линейным управлением ЛФРС удается свести к виду

$$y_n = f_n(X) \varphi_n(X),$$

где f_n и ϕ_n — ЛФРС основной и управляющей (распределяющей) подсистем. Составление f_n и ϕ_n и их дальнейшее преобразование проводят по правилам, разработанным для модифицированного логико-вероятностного метода (МЛВМ).

7.6.3. Расчет надежности многосвязных систем при неполном оповещении о состоянии сети

Условия функционирования многосвязных систем такие же, как и условия функционирования систем, рассмотренных в предыдущем разделе. Однако есть одно дополнительное условие: оповещение о состоянии сети неполное. Из-за ограниченности информации не всегда удастся эффективно использовать имеющуюся структурную избыточность, так как при реконфигурации системы не удастся найти работоспособный путь между полюсами, хотя при полном оповещении такой путь удалось бы найти. В условиях неполного оповещения не удастся гарантировать с вероятностью 1, что выбранный маршрут (путь) будет работоспособным. Неопределенность возникает при эксплуатации и является причиной возможных ошибок в выборе маршрута, однако алгоритм реконфигурации и выбора маршрута закладывается при проектировании. Поэтому надо уметь решать две задачи: задачу анализа надежности с учетом заданного алгоритма выбора маршрута и неполноты информации оповещения и задачу выбора (синтеза) оптимального маршрута по критерию надежности. Алгоритм составляют так, чтобы в условиях некоторой неопределенности обеспечить наибольшее значение вероятности работоспособного состояния системы среди значений, достигаемых в заданном классе алгоритмов.

Система с оповещением о состоянии выходящих линий связи

Структура одной ветви иерархической системы представлена на рис. 7.13. Алгоритм выбора маршрута представляет собой набор рядов приоритетности выходящих линий связи на каждом из узлов системы. На узле с номером k этот набор имеет вид $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{k,s}$ при $k > s$ и $ki_{k1}, ki_{k2}, \dots, ki_{k,k-1}$ при $k \leq s$. На каждом узле в маршрут включается работоспособная линия связи с наивысшим приоритетом. Рассмотрим основные этапы анализа.

Составление ЛФРС. Логическая функция работоспособности ветви имеет

$$f_k = x_k \left(x_{ki_{k1}} f_{i_{k1}} \vee x'_{ki_{k1}} x_{ki_{k2}} f_{i_{k2}} \vee \dots \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{m-1} x'_{ki_{kj}} \right) x_{ki_{km}} f_{i_{km}} \right), \quad (7.106)$$

$$m = \min(s, k-1), \quad k = 2 \dots n.$$

В частности, если наибольший приоритет имеет линия связи, соединяющая узел k с узлом, имеющим наименьший номер (наивысший ранг), то

$$f_k = x_k \left(\bigvee_{j=1}^m \left(\bigwedge_{i=j+1}^m x'_{k, k-i} \right) x_{k, k-j} f_{k-j} \right), \quad m = \min(s, k-1), \quad k = 2 \dots n. \quad (7.107)$$

Запись СФФВ. Поскольку в (7.107) все слагаемые ортогональны, а каждое слагаемое является ФПЧЗ (форма 1), то

$$K_s = Pf_n = 1 = p_n \left(1 - q_{n,n-s}^{f_{n-s}} + \sum_{i=n-s+1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i+s-n} q_{n,i-j} (1 - q_{ni}^{f_i}) \right), \quad n > s;$$

$$Pf_k = 1 = p_k \left(1 - q_{k,k-s}^{f_{k-s}} + \sum_{i=k-s+1}^{k-1} \prod_{j=1}^{i+s-k} q_{k,i-j} (1 - q_{ki}^{f_i}) \right), \quad s+1 \leq k \leq n-1; \quad (7.108)$$

$$Pf_k = 1 = p_k \left(1 - q_{k1}^{f_{k1}} + \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{j=1}^{i-1} q_{k,i-j} (1 - q_{ki}^{f_i}) \right), \quad 2 \leq k \leq s.$$

Получение вероятностной функции. Поскольку все слагаемые в (7.108) ортогональны, многошаговую процедуру замещения можно проводить в каждом слагаемом отдельно и независимо от других слагаемых. Это упрощает вид конечной формулы. Замещение проводят по правилам разрезания МЛВМ.

Пример 7.13. В полносвязной пятиуровневой системе установлены следующие ряды приоритетности линий связи: 51, 52, 53, 54; 41, 42, 43; 31, 32. Необходимо найти вероятность работоспособного состояния системы и оценить влияние структурного параметра s на надежность системы.

Решение. Используя формулу (7.108) при $k \leq 5$, последовательным замещением получаем:

$$\begin{aligned} K_s(s=4) &= p_1 p_5 \times \\ &\times (p_{51} + q_{51}(p_{52} p_2 p_{21} + q_{52}(p_{53} p_3 (p_{31} + q_{31} p_{32} p_2 p_{21}) + q_{53} p_{54} p_4)))); \\ P_4 &= p_4 (p_{41} + q_{41}(p_{42} p_2 p_{21} + q_{42} p_{43} p_3 (p_{31} + q_{31} p_{32} p_2 p_{21}))). \end{aligned}$$

Результаты расчетов по этим формулам при различных s , $p_i = 1$, $p_{ij} = P_2$ приведены в табл. 7.11. Там же приведены значения степени потери эффективности системы при переходе от полного оповещения к неполному $\delta = (1 - K_{a.n}) / (1 - K_{a.н})$.

Таблица 7.11. Коэффициент сохранения эффективности системы с оповещением о ЛС

s	K_s	δ				
	$P_2 = 0,90$	$P_2 = 0,92$	$P_2 = 0,95$	$P_2 = 0,90$	$P_2 = 0,92$	$P_2 = 0,95$
1	0,6561	0,7164	0,8145	1	1	1
2	0,9718	0,9818	0,9927	1,22	1,26	1,35
3	0,9785	0,9864	0,9948	5,51	6,80	10,4
4	0,9907	0,9940	0,9976	23,9	48,9	97,3

Из данных, приведенных в табл. 7.11, можно сделать следующие выводы:
□ В двухсвязной системе коэффициент сохранения эффективности будет не менее 0,99 при вероятности работоспособного состояния линии связи не

менее 0,945. В отличие от системы с полным оповещением, здесь трехсвязная система не гарантирует уровень $K_3 = 0,99$ при всех значениях из доверительного интервала (0,90; 0,95). Этот уровень достигается только при $P_2 \geq 0,93$.

- ❑ Потеря эффективности от ненадежности элементов системы при неполном оповещении $1 - K_{3,н}$ существенно возрастает по сравнению с системой с полным оповещением ($1 - K_{3,п}$): на 22—35% в двухсвязной, в 6,8—10,4 раза в трехсвязной и в 50—97 раз в полносвязной системах.
- ❑ Варьируя алгоритмы выбора маршрутов и проводя расчеты при тех же P_1 и P_2 , можно убедиться в том, что предложенный алгоритм оказывается лучшим среди других возможных при $s = 2$ и 4. При $s = 3$ лучшим является алгоритм с рядами приоритетности: 51, 54, 53, 52; 41, 43, 42; 31, 32.

Система с оповещением о состоянии прямой линии связи

Дополнительно к информации о выходящих линиях связи каждый узел получает от смежных узлов информацию о состоянии линии связи между этим узлом и центральным узлом. Это позволяет обеспечить полную информацию о некоторых путях от данного узла к центральному. Для других же путей сохраняется некоторая неопределенность. Поэтому алгоритм выбора маршрута создается из двух частей: ряда приоритетности путей, состояния которых полностью известны, и ряда приоритетности направлений связи, используемого тогда, когда все пути из первого ряда неработоспособны. Кроме того, наличие информации о состоянии прямой линии связи рассматривается как свидетельство работоспособности отправившего ее узла.

Составление ЛФРС. При $k > 2s + 1$ на узле нет ни одного пути, состояние которого было бы известно полностью. В этом случае в алгоритме выбора маршрута ряд приоритетности путей отсутствует и алгоритм включает в себя только ряд приоритетности линий связи, как и в системе предыдущего раздела. При этом ЛФРС составляются по формулам (7.106), (7.107). При $k \leq 2s + 1$ ЛФРС составляется с использованием двух рядов приоритетности:

$$f_k = x_k x_1 \left(B_k \vee B'_k \left(\bigvee_{i=1}^{k-3} x_{kj_{ki}} f_{j_{ki}} \left(\bigwedge_{r=1}^{i-1} (x_{kj_{kr}} x_{j_{kr}}) \right) \right) \right), \quad (7.109)$$

$$B_k = x_{k1} \vee x_{k2} x_{21} \vee \dots \vee x_{km} x_m x_{m1}, \quad m = \min(k-1, s+1).$$

Запись СФФВ. Смешанная форма имеет вид

$$P_k^{(k-1)} = P(f_k = 1) = p_k p_1 \left(1 - q_{k1} (1 - p_{ki} p_i p_{i1}) \prod_{i=2}^m (1 - p_{ki} p_i p_{i1}) + \right. \\ \left. + q_{k1} \sum_{v=1}^{k-3} (1 - q_{ki_{kv}}^{g_{kv}}) \prod_{i=1}^{v-1} q_{kj_{ki}}^{x_{j_{ki}}} \prod_{i=v}^m q_{kj_{ki}}^{x_{j_{ki}} x_{j_{ki}1}} \right), \quad g_{kv} = (x_{j_{kv}} x_{j_{kv}1}) f_{j_{kv}}, \quad k \leq n. \quad (7.110)$$

Получение вероятностной функции. Замещение в (7.110) происходит путем последовательного разрезания по незамещенным логическим переменным.

Пример 7.14. В полносвязной пятиуровневой системе дополнительно к условиям примера 7.13 проводится оповещение узла 3 о состоянии линии связи 21, узла 4 — о состоянии линий 21 и 31, узла 5 — о состоянии линий 21, 31, 41. Поскольку состояние путей 5321, 5431 и 54321 неизвестно полностью, то алгоритм выбора маршрута дополняется рядом приоритетности направлений связи: 1) 53, 54; 2) 54, 53. Вероятности работоспособного состояния узлов одинаковы и равны p_1 , вероятности работоспособного состояния линий связи также одинаковы и равны p_2 . Найти коэффициент сохранения эффективности типа (7.104).

Решение. Для первого варианта алгоритма выбора маршрута ЛФРС имеет вид

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5 x_1 (B_5 \vee B'_5 (x_{53} f_3 \vee (x_{53} f_3) x_{54} f_4)); \\ B_5 &= x_{51} \vee x_{52} x_2 x_{21} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{54} x_4 x_{41}; \\ f_4 &= x_4 (x_{41} \vee x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3); \quad f_3 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}). \end{aligned}$$

После преобразования к ФПЧЗ получим:

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5 x_1 (B_5 \vee x'_{51} (x'_{31} x'_{52} (x_{54} x_4 x_{41}) x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee \\ &\vee x'_{41} (x_{53} x_3) (x_{52} x_2 x_{21}) x_{54} x_4 (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3))). \end{aligned}$$

Здесь все три слагаемых ортогональны. Поэтому замещение в них проводим независимо друг от друга. В первых двух слагаемых все переменные бесповторны. Поэтому проводим одношаговое замещение по правилам для ФППЗ. В третьем слагаемом повторяются x_3 , x_2 и x_{21} . По правилам частичного замещения получим:

$$\begin{aligned} K_3(x_3, x_2, x_{21}, f_3) &= p_1 p_5 (C_1 + C_2 + C_3 q_{53}^{x_3} q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - q_{42}^{x_2 x_{21}} q_{43}^{f_3})); \quad C_3 = q_{51} q_{41} p_{54} p_4; \\ C_1 &= 1 - q_{51} \prod_{i=2}^4 (1 - p_{5i} p_i p_{i1}); \quad C_2 = q_{51} q_{52} p_{53} q_{31} p_3 p_{32} p_2 p_{21} (1 - p_{54} p_4 p_{41}). \end{aligned}$$

Замещая остальные переменные, найдем:

$$\begin{aligned} K_3 &= p_1 p_5 (C_1 + C_2 + C_3 (p_2 p_{21} q_{52} (p_{53} p_3 ((1 - q_{31} q_{32}) (1 - q_{42} q_{43}) + q_{31} q_{32} p_{42}) + \\ &+ q_3 p_{42}) + (1 - p_2 p_{21}) q_{53} p_3 p_{31} p_{43}))). \end{aligned}$$

Для второго варианта алгоритма

$$f_5 = x_5 x_1 (B_5 \vee B'_5 (x_{54} f_4 \vee (x_{54} f_4)' x_{53} f_3)).$$

После преобразований к ортогональной форме имеем:

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5 x_1 (B_5 \vee x'_{51} x'_{31} x'_{52} (x_{54} x_4 x_{41}) x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee \\ &\vee x'_{51} x'_{41} (x_{53} x_3 x_{31}) (x_{52} x_2 x_{21}) (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3) x_{54} x_4). \end{aligned}$$

После перехода к смешанной форме получим:

$$\begin{aligned} K_3(x_3, x_2, x_{31}, x_{21}, f_3) &= p_1 p_5 (C_1 + C_4 + C_5 q_{53}^{x_3 x_{31}} q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - q_{42}^{x_2 x_{21}} q_{43}^{f_3})); \\ C_4 &= q_{51} q_{52} p_{53} q_{31} p_3 p_{32} p_2 p_{21} (1 - p_{54} p_4); \quad C_5 = q_{51} q_{41} p_{54} p_4. \end{aligned}$$

После замещения остальных переменных окончательно имеем:

$$K_3 = p_1 p_5 (C_1 + C_4 + C_5 (q_{52} p_2 p_{21} (q_{53} p_3 p_{31} (1 - q_{42} q_{43}) + p_3 q_{31} (p_{32} (1 - q_{42} q_{43}) + q_{32} p_{42}) + q_{32} p_{42}) + p_3 p_{31} q_{53} p_{43} (1 - q_2 q_{21})))$$

Расчеты показывают, что при $P_1 = 1$ алгоритм 2 дает более высокие значения коэффициента сохранения эффективности, чем алгоритм 1, во всем реальном диапазоне значений P_2 ($0,5 \leq P_2 \leq 1$).

7.6.4. Распределение числа работоспособных ветвей при полном оповещении о состоянии сети

Рассмотрим сначала изотропную систему с однозначным подчинением. Параметры структуры системы: n — число рангов, r_i — коэффициент разветвления на i -м ярусе, равный числу звеньев $(i + 1)$ -го ранга, подчиненных одному звену i -го ранга. Общее число периферийных звеньев $R = r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$. Поскольку все ветви идентичны, то достаточно задать для элементов системы лишь следующие вероятности: p_i — вероятность работоспособного состояния звена i -го ранга, p_{ij} — вероятность работоспособного состояния линии связи между звеньями i -го и j -го рангов.

Заметим, что все связи между звеньями различных рангов существуют лишь в полностью связной сети, а в многосвязных сетях некоторые связи отсутствуют. Далее будет рассматриваться только полностью связная сеть, так как другие системы получаются из нее как частный случай, когда некоторые вероятности $p_{ij} = 0$.

При нахождении распределения вероятностей числа работоспособных ветвей будем использовать аппарат производящих функций и отыскивать полином вида

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^R P_k z^k,$$

где P_k — вероятность того, что работоспособно ровно k ветвей.

Логико-вероятностный метод предусматривает следующие этапы построения распределения.

Этап 1. Запись логической функции работоспособности одной ветви.

ЛФРС имеет вид, аналогичный (7.105):

$$f_n = x_n (x_{n1} f_1 \vee x_{n2} f_2 \vee \dots \vee x_{n, n-1} f_{n-1}), \quad (7.111)$$

где f_i — логическая функция работоспособности ветви при наличии i рангов. Для функций f_i формулы имеют аналогичный вид

$$f_i = x_i (x_{i1} f_1 \vee x_{i2} f_2 \vee \dots \vee x_{i, i-1} f_{i-1}), \quad i = 1 \dots n-1. \quad (7.112)$$

Решение системы n логических уравнений (7.111) и (7.112) позволяет выразить f_n через логические переменные, соответствующие элементам структуры.

Этап 2. Составление СФФВ для одной ветви.

В формуле (7.112)(7.111) логические переменные x_n и x_{ni} — неповторные, поэтому можно провести частичное замещение, используя теорему П5.11 (см. приложение):

$$P_n(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = p_n \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{f_i} \right).$$

Этап 3. Составление производящего полинома для одной ветви.

Поскольку ветвь может находиться только в двух состояниях: 1 (работоспособна) или 0 (неработоспособна), полином имеет вид

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 1 - P_n + P_n z = 1 + (z - 1)P_n. \quad (7.113)$$

Здесь нижний индекс указывает на число рангов в системе, верхний — на ранг звена, к которому относится полином.

Этап 4. Возведение производящего полинома в степень.

В теории вероятностей умножение производящих полиномов и возведение их в степень проводится при выполнении операции свертки (композиции) распределений независимых случайных величин. Здесь также можно ввести случайные величины X_{ni} , равные 1 или 0 в зависимости от состояния i -й ветви. Тогда (7.113) следует рассматривать как производящий полином распределения X_{ni} . Для группы из r_{n-1} ветвей с различными звеньями n -го ранга, но с общими звеньями более высоких рангов можно ввести целочисленную случайную величину

$$X_{n-1,i} = \sum_{j=1}^{r_{n-1}} X_{nj}, \quad (7.114)$$

равную числу работоспособных ветвей в группе. Слагаемые в (7.114) в общем случае зависимы, так как некоторые пути в различных ветвях содержат общие элементы. Поэтому не удастся получить производящий полином распределения величины $X_{n-1,i}$ перемножением (возведением в степень) производящих полиномов слагаемых. Однако здесь эту трудность удастся обойти благодаря применению смешанной формы функции вероятностей. Если ее логические переменные, соответствующие общим элементам путей, перевести в показатель степени, как это сделано в (7.113), то можно воспользоваться закономерностями теории вероятностей для независимых случайных величин. В этом состоит один из главных замыслов при разработке алгебры смешанных форм и одно из главных достоинств модифицированного логико-вероятностного метода. Таким образом, если коэффициенты производящих полиномов распределения слагаемых в (7.114) записаны в смешанной форме, то производящий полином для суммы получается перемножением полиномов для слагаемых, а в случае одинаковых ветвей — возведением в степень r_{n-1} полинома для одного из слагаемых:

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = (\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}))^{r_{n-1}}. \quad (7.115)$$

Этап 5. Замещение логических переменных, относящихся к $(n - 1)$ -му ярусу.

Используя вторую и третью теоремы разложения, а также теорему П.1 (см. приложение) и учитывая формулу (7.112), преобразуем (7.115):

$$\begin{aligned}
& \Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}) = \\
& = P(f_{n-1} = 1)(\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, 1))^{r_{n-1}} + \\
& + P(f_{n-1} = 0)(\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, 0))^{r_{n-1}}. \\
& = P(f_{n-1} = 1)\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, 1) + \\
& + P(f_{n-1} = 0)\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, \dots, 0).
\end{aligned} \tag{7.116}$$

Здесь $P(f_{n-1} = 1) = 1 - P(f_{n-1} = 0) = p_{n-1} \left(1 - \prod_{i=1}^{n-2} q_{n-1,i}^{f_i} \right)$.

Этап 6. Возведение в степень и замещение логических переменных, относящихся к старшим ярусам.

Представляя, как и на этапе 4, число работоспособных ветвей с общим звеном i -го ранга в виде суммы чисел ветвей с различными звеньями $(i + 1)$ -го ранга ($i = n - 2, \dots, 1$), можно вновь применить процедуру свертки распределений с вероятностями, записанными в смешанной форме. Для этого возводим полином (7.116) в степень r_{n-2} и замещаем переменные, относящиеся к $(n - 2)$ -му ярусу, затем возводим в степень r_{n-3} и замещаем переменные, относящиеся к $(n - 3)$ -му ярусу, и т. д., то есть процедура содержит несколько шагов, на каждом из которых проводится преобразование

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{(i)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) &= P(f_i = 1)\Phi_n^{(i)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, 1) + \\
&+ P(f_i = 0)\Phi_n^{(i)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, 0),
\end{aligned}$$

где

$$P(f_i = 1) = 1 - P(f_i = 0) = p_i \left(1 - \prod_{j=1}^{i-2} q_{ij}^{f_j} \right), \quad i = 1 \dots n - 2.$$

Проиллюстрируем изложенную методику примерами.

Пример 7.15. Система имеет структуру типа «дерево» с параметрами n и r_i . Звенья и линии связи имеют коэффициенты готовности p_i и p_{ij} соответственно. Найти распределение числа работоспособных ветвей и рассчитать коэффициент готовности системы при различных значениях допустимого количества отказавших ветвей $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Известно, что $p_i = 0,999$, $p_{ij} = 1$, $n = 3$, $r_1 = r_2 = 16$.

Решение. Логическая функция работоспособности ветви имеет вид

$$f_n = x_n x_{n,n-1} f_{n-1}; \quad f_i = x_i x_{i,i-1} f_{i-1}, \quad i = 2 \dots n - 1.$$

Производящий полином для одной ветви

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_{n-1}) = 1 + (z - 1)P_n = 1 + (z - 1)p_n(1 - q_{n,n-1}^{f_{n-1}}).$$

После возведения в степень r_{n-1} и замещения f_{n-1} получаем:

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_{n-2}) = q_{n-1} + p_{n-1} q_{n-1,n-2}^{f_{n-2}} + p_{n-1} (1 - q_{n-1,n-2}^{f_{n-2}}) (1 + (z - 1)p_n p_{n,n-1})^{r_{n-1}}.$$

Повторяя эти операции $n - 1$ раз, окончательно получим:

$$\Phi_n(z) = q_1 + p_1 \left(\left(\dots \left((1 + (z-1)p_n p_{n,n-1})^{r_{n-1}} p_{n-1} p_{n-1,n-2} + 1 - p_{n-1} p_{n-1,n-2} \right)^{r_{n-2}} p_{n-2} p_{n-2,n-3} + 1 - p_{n-2} p_{n-2,n-3} \right)^{r_{n-3}} + \dots + (1 - p_2 p_{21})^{r_1} \right).$$

Отсюда при $n = 3$, $r_1 = r_2 = 16$, $p_1 = p_2 = p$, $p_{ij} = 1$ получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) &= q + p((q + zp)^{16} p + q)^{16} = q + p \sum_{i=0}^{16} C_{16}^i (q + zp)^{16i} p^i q^{16-i} = \\ &= p^{273} z^{256} + C_{256}^1 p^{272} q z^{255} + C_{256}^2 p^{271} q z^{254} + \dots \\ &= q + p \sum_{i=0}^{16} C_{16}^i p^i q^{16-i} \sum_{j=0}^{16i} C_{16i}^j p^j q^{16i-j} z^j = \end{aligned} \quad (7.117)$$

Вычисляя первые члены этого полинома и подставляя в (7.103), найдем коэффициент готовности системы при различных значениях допустимого количества отказавших ветвей m . Результаты расчетов приведены в табл. 7.12.

Таблица 7.12. Коэффициент готовности ветвящейся системы типа «дерево»

m	0	1	2	3	4
$K_{г.с}$	0,761	0,956	0,981	0,9829	0,9831

При расчетах по формуле (7.117) можно использовать приближенное равенство $p^k \approx \exp(-kq)$, $q = 1 - p$. Из табл. 7.12 видно, что увеличение избыточности (увеличение m) приводит к росту коэффициента готовности системы. Однако он возрастает неравномерно: быстро увеличивается при небольших m , затем растет значительно медленнее. Это происходит потому, что для готовности системы требуется работоспособное состояние всех звеньев первого и второго рангов, а вероятность этого события $p^{17} = 0,9831$. Дальнейшее увеличение $K_{г.с}$ следует ожидать при $m \geq 16$.

Пример 7.16. Система имеет структуру с полносвязными ветвями и параметрами $n = 4$ и r_i , $i = 1, 2, 3$. Необходимо найти распределение числа работоспособных ветвей и рассчитать коэффициент готовности системы при следующих значениях коэффициентов готовности элементов: 1) $p_i = 0,99$, $p_{ij} = 1$; 2) $p_i = 1$, $p_{ij} = 0,99$. Коэффициенты разветвления $r_1 = 6$, $r_2 = 4$, $r_3 = 4$.

Решение. Логическая функция работоспособности

$$f_4 = x_4(x_{41}f_1 \vee x_{42}f_2 \vee x_{43}f_3); \quad f_3 = x_3(x_{31}f_1 \vee x_{32}f_2); \quad f_2 = x_2x_{21}f_1; \quad f_1 = x_1.$$

Производящий полином для одной ветви

$$\Phi_4^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3) = 1 + (z-1)P_n = 1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}).$$

Возведение в степень r_3 и разрезание по f_3 дает

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(3)}(z, f_1, f_2) &= p_3(1 - q_{31}^{f_1} q_{32}^{f_2})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}))^{r_3} + \\ &+ (q_3 + p_3 q_{31}^{f_1} q_{32}^{f_2})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2}))^{r_3}. \end{aligned}$$

Теперь необходимо возвести в степень r_2 , провести разрезание по f_2 и заместить переменную x_1 . Тогда

$$\begin{aligned}\Phi_4(z) = & q_1 + p_1 \left(p_2 p_{21} \left(p_3 (1 - q_{31} q_{32}) (1 + (z-1) p_4 (1 - q_{41} q_{42} q_{43}))^{r_3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (q_3 + p_3 q_{31} q_{32}) (1 + (z-1) p_4 (1 - q_{41} q_{42}))^{r_3} \right)^{r_2} + (1 - p_2 p_{21}) \times \right. \\ & \left. \times (p_3 p_{31} (1 + (z-1) p_4 (1 - q_{41} q_{43}))^{r_3} + (q_3 + p_3 q_{31}) (1 + (z-1) p_4 p_{41})^{r_3})^{r_1} \right).\end{aligned}$$

Отсюда при $p_i = p$, $p_{ij} = 1$ имеем

$$\Phi_4(z) = q + p(q + pz)^R; \quad R = r_1 r_2 r_3.$$

Отсюда следует, что при идеально надежных линиях связи наличие обходных путей в сети через звенья промежуточных рангов не изменяет коэффициента готовности системы. Первые три коэффициента полинома имеют вид $P_R = p^{R+1}$, $P_{R-1} = Rqp^R$, $P_{R-2} = 0,5R(R-1)q^2p^{R-1}$. Подставляя сюда значения параметров, получим следующие значения коэффициента готовности системы: $K_{г.с} = 0,379$; $0,745$ и $0,923$ для $m = 0, 1$ и 2 соответственно.

При $p_i = 1$, $p_{ij} = p$ вид полинома более сложный. Первые два коэффициента:

$$\begin{aligned}P_R &= p^{r_1} (pC_1^{r_2} + qC_2^{r_2})^{r_1}; \quad P_{R-1} = rp^{r_1} (pC_1^{r_2} + qC_2^{r_2})^{r_1-1} (pB_1C_1^{r_2-1} + qB_2C_2^{r_2-1}); \\ B_1 &= q^3r_3((1-q^2)(1-q^3)^{r_3-1} + q(1-q^2)^{r_3-1}); \quad B_2 = pq^2r_3((1-q^2)^{r_3-1} + p^{r_3-2}); \\ C_1 &= (1-q^2)(1-q^3)^{r_3} + q^2(1-q^2)^{r_3}; \quad C_2 = p((1-q^2)^{r_3} + qp^{r_3}).\end{aligned}$$

Отсюда при $p = 0,99$ имеем: $P_R = 0,99^6 \cdot 0,9998 = 0,9313$, $P_{R-1} = 0,0048$. Из численных расчетов можно сделать три важных вывода. Во-первых, в системе с полносвязными ветвями определяющим фактором является надежность звеньев ($K_{г.с} = 0,9413$ при $p_i = 1$ и $m = 0$ и только $0,923$ при $p_{ij} = 1$ и $m = 2$). Во-вторых, при $p_i = 1$ коэффициент готовности системы определяется, по существу, надежностью шести линий связи между звеньями первого и второго рангов. «Вклад» остальных линий связи незначителен. Наконец, следствием второго свойства является то, что введение небольшого числа избыточных ветвей практически не меняет коэффициент готовности системы. Существенного увеличения $K_{г.с}$ следует ожидать лишь при $m \geq r_2 r_3 = 16$.

Изложенная здесь методика расчета надежности систем с изотропной структурой может быть обобщена для неизотропных структур и систем с неоднзначным подчинением. Основным отличием методики расчета надежности неизотропных систем от рассмотренной ранее является то, что на этапах 4 и 6 возведение в степень заменяется умножением полиномов, а на этапе 1 необходимо записать столько логических функций работоспособности, сколько различных групп ветвей есть в системе. При этом надо иметь в виду, что различными являются не только ветви с различными структурами, но и ветви с одинаковыми структурами, но различными показателями надежности элементов, занимающих одинаковое положение в структуре.

В системах с неоднозначным подчинением логическая функция имеет более сложный вид. Она должна включать все дополнительные пути через резервное звено промежуточного ранга. Если это звено не входит в другую ветвь, то дальнейшая обработка не отличается от случая простых ветвей. Если же оно входит в две и более ветвей, то на этапе 4 надо заменить возведение в степень умножением, а на этапе 5 замещение логических переменных, соответствующих различным звеньям промежуточного ранга, проводить отдельно.

7.6.5. Распределение числа работоспособных ветвей при неполном оповещении о состоянии сети

Условия функционирования данной системы такие же, как и условия функционирования системы, рассмотренной в 7.6.4, однако эти системы различаются объемом и содержанием информации оповещения. При оповещении только об исходящих линиях связи логическая функция работоспособности одной ветви определяется формулами (7.106)–(7.107), а при оповещении еще и о прямой линии связи с центральным звеном — формулой (7.109). В полносвязной системе с оповещением об исходящих линиях связи полином для одной ветви имеет вид

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 1 + (z-1)p_n \times \\ \times \left(1 - q_{n1}^{f_1} + q_{n1}(1 - q_{n2}^{f_2}) + \dots + q_{n1} \prod_{k=2}^{n-2} q_{nk} (1 - q_{n,n-1}^{f_{n-1}}) \right),$$

где $i_1 = 1, i_2, \dots, i_{n-1}$ — ряд приоритетности направлений связи на узле n . В частности, если ряд приоритетности имеет вид: 1, 2, ..., то полином приобретает вид

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 1 + (z-1)p_n \times \\ \times \left(1 - q_{n1}^{f_1} + q_{n1}(1 - q_{n2}^{f_2}) + \dots + q_{n1} \prod_{k=2}^{n-2} q_{nk} (1 - q_{n,n-1}^{f_{n-1}}) \right). \quad (7.118)$$

Далее выполняется многошаговая процедура возведения в степень и замещения логических переменных:

$$\Phi_n^{(i-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{i-2}) = P_{i-1}(f_1, \dots, f_{i-2})(\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-2}, 1))^{r_{i-1}} + \\ + Q_{i-1}(f_1, \dots, f_{i-2})(\Phi_n^{(i)}(z, f_1, \dots, f_{i-2}, 0))^{r_{i-1}}, \quad i = 3 \dots n; \quad (7.119) \\ \Phi_n(z) = q_1 + p_1(P_2(1)\Phi_n^{(2)}(z, 1, 1) + Q_2(1)\Phi_n^{(2)}(z, 1, 0))^{r_1},$$

где $P_i = 1 - Q_i = P\{f_i = 1\}$ определяются по формулам (7.108).

Пример 7.17. В полносвязной изотропной пятиуровневой ветвящейся системе передачи данных коэффициенты разветвления на уровнях равны, соответственно, r_1, r_2, r_3, r_4 . Направления связи в рядах приоритетности расположены в порядке возрастания номеров (убывания рангов) узлов-получателей информации: 1, 2, ..., $k-1, 2 \leq k \leq n$. Необходимо найти распределение числа работоспособных ветвей системы.

Решение. Согласно (7.118), производящий полином

$$\Phi_5^{(5)}(z, f_1, f_2, f_3, f_4) = 1 + (z-1)p_5 \left(1 - q_{51}^{f_1} + q_{51}(1 - q_{52}^{f_2}) + \right. \\ \left. + q_{51}q_{52}(1 - q_{53}^{f_3}) + q_{51}q_{52}q_{53}(1 - q_{53}^{f_4}) \right).$$

После возведения в степень r_4 и замещения f_4 согласно (7.119) получим:

$$\Phi_5^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3) = P_4(f_1, f_2, f_3, 1)(\Phi_5^{(5)}(z, f_1, f_2, f_3, 1))^{r_4} + \\ + Q_4(f_1, f_2, f_3)(\Phi_5^{(5)}(z, f_1, f_2, f_3, 0))^{r_4}; \\ P_4 = 1 - Q_4 = p_4(1 - q_{41}^{f_1} + q_{41}(1 - q_{42}^{f_2}) + q_{41}q_{42}(1 - q_{41}^{f_1})).$$

Далее выполним возведение в степень r_3 , замещение f_3 , возведение в степень r_2 , замещение f_2 , возведение в степень r_1 и замещение f_1 . Окончательно получим:

$$\Phi_5(z) = q_1 + p_1 \left(P_2(1)(P_3(1,1)(P_4(1,1,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,1) + Q_4(1,1,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,0))^{r_3} + \right. \\ \left. + Q_3(1,1)(P_4(1,1,0)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,0,1) + Q_4(1,0,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,0,0))^{r_3} \right)^{r_2} + \\ + Q_2(1)(P_3(1,0)(P_4(1,0,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,1,1) + Q_4(1,0,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,1,0))^{r_3} + \\ \left. + Q_3(1,0)(P_4(1,0,0)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,0,1) + Q_4(1,0,0)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,0,0))^{r_3} \right)^{r_1}.$$

Отсюда можно получить полиномы для систем с меньшим числом уровней. Так, $\Phi_4(z)$ получается при $p_{51} = p_{52} = p_{53} = 0$, $p_5 = p_{54} = r_4 = 1$, $\Phi_3(z)$ — при $p_{41} = p_{42} = 0$, $p_4 = p_{43} = r_3 = 1$. Отсюда же можно получить формулы для трехсвязной и двухсвязной систем.

При оповещении о прямой линии связи ряд приоритетности путей содержит $s = n - 1$ путей в полносвязной системе, $M = 2s + 2 - n$ при $s + 2 \leq n \leq 2s + 1$ и ни одного при $n > 2s + 1$. Ряд приоритетности направлений связи содержит s направлений при $n \geq s + 3$; $s - 1$ при $n = s + 2$ и $s - 2$ при $n = s + 1$ (полносвязная система). Рассмотрим далее полносвязную систему.

Логическую функцию работоспособности представим в ортогональной форме в виде

$$f_k = x_k \left(B_k \vee \left(\bigvee_{j=1}^{k-3} x_{ki_j} x_{ij} f_{ij} g'_{ij} \left(\bigwedge_{v=1}^{k-1} (x_{ji_v} \varphi_{i_v})' \right) \right) \right), \quad 3 \leq k \leq n; \\ B_k = (x_{k2} x_{21} \vee \dots \vee x_{k,k-1} x_{k-1,k-1}) f_1, \quad g_k = x_k x_{k1} f_1, \quad k \geq 3; \quad (7.120) \\ g_2 = f_2 = x_2 x_{21} f_1; \quad g_1 = f_1 = x_1; \quad \varphi_{i_v} = x_{i_v}; \quad v \leq j-1; \quad \varphi_{i_v} = g_{i_v}; \quad v \geq j.$$

После замещения в (7.120) при $k = n$ переменных x_n и x_{ni} получим производящий полином для одной ветви:

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, g_1, \dots, g_{n-1}) = \\ = 1 + (z-1)p_n \left(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{g_i} + \sum_{k=1}^{n-3} (1 - q_{ni_k}^{g'_{i_k} f_{i_k}}) \prod_{v=1}^{n-1} q_{ni_v}^{\varphi_{i_v}} \right).$$

Далее разрезание проводится с помощью формулы

$$\begin{aligned} & \Phi_n^{(k-1)}(z, f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, g_3, \dots, g_{k-1}) = \\ & = (P(g'_k f'_k = 1) \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, g_3, \dots, g_{k-1}, 0) + \\ & + P(g_k = 1) \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 0, g_3, \dots, g_{k-1}, 1) + \\ & + P(g'_k f_k = 1) \Phi_n^{(k)}(z, f_1, \dots, f_{k-1}, 1, g_3, \dots, g_{k-1}, 0))^{n_{k-1}}, \quad k = 3..n-1. \end{aligned} \quad (7.121)$$

На последнем шаге имеем

$$\Phi_n(z) = q_1 + p_1(P(f_2 = 1) \Phi_n^{(2)}(z, 1, 1) + P(f_2 = 0) \Phi_n^{(2)}(z, 1, 0))^{r_1}.$$

Во втором слагаемом (7.121) принимаем для определенности $f_k = 0$, так как при $g_k = 1$ слагаемые, содержащие f_k , обращаются в ноль независимо от значения f_k .

Пример 7.18. В системе, рассмотренной в примере 7.17, в каждый узел поступает дополнительная информация от смежных узлов о состоянии прямой линии связи с узлом 1. Найти распределение числа работоспособных ветвей.

Решение. Алгоритм выбора маршрута содержит в себе ряд приоритетности путей: 51, 521, 531, 541; 41, 421, 431; 31, 321. Неопределенность в выборе пути возникает на узле 5 при отказе путей 51 и 521 и линий связи 31 и 41, так как неизвестно состояние путей 5321, 5421 и 54321. При работоспособных узлах 3 и 4 и работоспособных связях 53 и 54 состояние этих путей зависит от состояния линий 32 и 42, которое неизвестно. В этом случае выбирается направление 54. Таким образом, алгоритм выбора маршрута дополняется рядом приоритетности: 54, 53. Логическая функция работоспособности (7.120) имеет вид

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5 (B_5 \vee B'_5 x_{54} f_4 \vee B'_5 (x_{54} f_4 \vee x_{53} f_3)); \quad f_4 = x_4 (x_{41} f_1 \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3); \\ f_3 &= x_3 (x_{31} f_1 \vee x_{32} f_2); \quad f_2 = x_2 x_{21} f_1; \quad f_1 = x_1. \end{aligned}$$

Представим ее в виде

$$\begin{aligned} f_5 &= x_5 (x_{51} f_1 \vee x_{52} f_2 \vee x_{53} g_3 \vee x_{54} f_4 \vee (x_{51} f_1) (x_{52} f_2)' \times \\ & \times (x_{53} g_3) (x_{54} f_4) x_{53} g'_3 f_3); \quad g_3 = x_3 x_{31} f_1. \end{aligned}$$

Отсюда производящий полином для ветви

$$\Phi_5^{(5)}(z, f_i, g_i) = 1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} q_{54}^{f_4} + q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} q_{54}^{f_4} (1 - q_{53}^{g'_3 f_3})).$$

При замещении переменных четвертого ранга рассмотрим три ситуации: $f_4 = 1$, $x_{44}' = 1$, $x_4 = 0$. После возведения в степень и замещения получим:

$$\begin{aligned} \Phi_5^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3, g_3) &= p_4(1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3})(1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}^{f_4}))^{r_4} + \\ & + (p_4 q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3})(1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} + q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} q_{54}^{f_4} (1 - q_{53}^{g'_3 f_3})))^{r_4} + \\ & + q_4(1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3}))^{r_4}. \end{aligned}$$

При упрощении здесь использовано равенство: $g_3 \vee g'_3 f_3 = f_3$. На следующем шаге возводим полином в степень r_3 и рассматриваем три несовместных события с вероятностями

$$P(g_3 = 1) = p_3 p_{31}; \quad P(g'_3 f_3 = 1) = p_3 q_{31} (1 - q_{32}^{f_2}); \quad P(g'_3 f'_3 = 1) = q_3 + p_3 q_{31} q_{32}^{f_2}.$$

Далее возводим в степень r_2 , замещаем x_2x_{21} , возводим в степень r_1 , замещаем x_1 . Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_5(z) = & p_1(p_2p_{21}(p_3p_{31}(p_4(1-q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_1(z,1,1) + (q_4 + p_4q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_2(z,1,1))^{r_3} + \\ & + q_3p_{31}p_{32}(p_4(1-q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_1(z,1,1) + q_4\varphi_2(z,1,1) + p_4q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_3(z,1,1))^{r_3} + \\ & + (q_3 + p_3q_{31}q_{32})(p_4(1-q_{41}q_{42})\varphi_4(z,1,1) + (q_4 + p_4q_{41}q_{42})\varphi_5(z,1,1))^{r_3})^{r_2} + \\ & + (1-p_2p_{21})(p_3p_{31}(p_4(1-q_{41}q_{43})\varphi_1(z,1,0) + (q_4 + p_4q_{41}q_{43})\varphi_2(z,1,0))^{r_3} + \\ & + (q_3 + p_3q_{31})(p_4p_{41})\varphi_4(z,1,0) + (q_4 + p_4q_{41})\varphi_5(z,1,0))^{r_3})^{r_1} + q_1, \\ \varphi_1(z, f_1, f_2) = & (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^f q_{52}^f q_{53} q_{54}))^{r_4}; \\ \varphi_2(z, f_1, f_2) = & (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^f q_{52}^f q_{53}))^{r_4}; \\ \varphi_3(z, f_1, f_2) = & (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^f q_{52}^f (1 - p_{53} q_{54})))^{r_4}; \\ \varphi_4(z, f_1, f_2) = & (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^f q_{52}^f q_{54}))^{r_4}; \\ \varphi_5(z, f_1, f_2) = & (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^f q_{52}^f))^{r_4}. \end{aligned}$$

Как и в примере 7.17, здесь также можно вести поиск желаемой структуры, варьируя структурные параметры и выбирая структуру по критерию надежности.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965. — 524 с. — Гл. 6.
2. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ / ЛПИ. — Л., 1975. — 220 с. — Гл. 6–8.
3. Рябишин И. А., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. — М.: Радио и связь, 1981. — 228 с.
4. Дружинин Г. В. Надежность автоматизированных систем. — М.: Энергия, 1977. — 536 с. — Гл. 13.
5. Ястребенецкий М. А., Иванова Г. М. Надежность АСУ ТП. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 230 с. — Гл. 4.
6. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А. Ф. Турбин, А. Н. Корпат, В. Н. Кузнецов, М. М. Новиков. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 270 с.
7. Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М. Случайные процессы: Справ. — Киев: Наук. думка, 1983. — 366 с.
8. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королук, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. — М.: Наука, 1985. — 640 с.
9. Мамиконов А. Г. Управление и информация. — М.: Наука, 1975. — 184 с.
10. Лекции по теории графов: Учеб. пособие / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990. — 382 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Каково содержание модели надежности восстанавливаемой резервированной системы?
2. Приведите перечень методов расчета надежности восстанавливаемой системы.
3. Каков порядок составления и решения дифференциальных и интегральных уравнений?
4. Каков порядок расчета средней наработки до отказа?
5. Каков порядок составления уравнений для расчета коэффициента готовности и коэффициента оперативной готовности?
6. Как влияют закон отказов и закон восстановления на надежность системы?
7. Каков порядок расчета средней наработки до отказа и средней наработки на отказ системы со сложной структурой?
8. Каков порядок учета конечного времени подключения резерва при расчете надежности сложной системы?
9. Дайте классификацию ветвящихся систем.
10. Назовите показатели надежности ветвящихся систем.
11. Каковы основные этапы модифицированного логико-вероятностного метода расчета надежности?
12. Как учесть при расчете надежности информацию оповещения и алгоритм выбора маршрута в сети?

Глава 8

Надежность систем с резервом времени

8.1. Особенности систем с резервом времени и показатели их надежности

Для систем с резервом времени имеет значение не только сам факт неработоспособности, но и время пребывания в этом состоянии. Кроме того, принимаются во внимание и другие потери рабочего (оперативного) времени, такие как время, затрачиваемое на обязательные процедуры контроля и диагностирования, на повторное выполнение работ, обесцененных отказом или сбоем, и пр.[1], [3] Для объединения всех этих факторов вводится понятие *непроизводительных потерь рабочего времени (суммарного непроизводительного времени)* $T_{\text{инп}}$. Поскольку отказом системы с резервом времени (СВР) является событие, состоящее в нарушении хотя бы одного ограничения на использование резерва времени (см. 5.3.3), вводится случайная величина $T_o(t_p)$ — полезная наработка системы до отказа, то есть до нарушения ограничений на использование резерва времени t_p (до срыва функционирования). В случае непополняемого резерва времени T_o есть полезная наработка до момента времени, когда впервые $T_{\text{инп}} > t_p$, и тогда $T = T_o(t_p) + t_p$ — время до отказа системы. Вероятность безотказной работы

$$P(t_3, t_p) = P(T_o(t_p) \geq t_3) = P(T(t_p) \geq t_3 + t_p), \quad (8.1)$$

где t_3 — заданная наработка, время выполнения установленного задания в безотказной системе, называемое далее длительностью задания. Если зафиксировать время $t = t_3 + t_p$, то вероятность безотказной работы можно трактовать как вероятность того, что время выполнения задания до получения заданной наработки будет не более t :

$$P_1(t_3, t) = P(T_{\text{в.з}}(t_3) \leq t). \quad (8.2)$$

Поскольку $T_{в.з} = T_{ин}(t_3) + t_3$, функцию (8.1) можно трактовать как функцию распределения суммарного непроизводительного времени до наработки t_3 :

$$P(t_3, t_p) = P(T_{ин}(t_3) < t_p). \quad (8.3)$$

Если зафиксировать t и t_p , то функцию (8.1) можно представить в виде

$$P_2(t, t_p) = P(T(t_p) \geq t) \quad (8.4)$$

как вероятность того, что время $T(t_p)$ до отказа СВР не будет находиться в оперативном интервале времени. Поскольку все варианты определения ВБР так или иначе связаны с выполнением задания, этот показатель надежности называют также вероятностью выполнения задания (своевременного выполнения задания). Если ввести случайную величину $Z = T_0/t$ как долю полезной наработки в оперативном интервале времени, то получим еще одно определение ВБР:

$$P_3(z, t) = P(Z \geq z) = P_1(zt, t) = P_2(t, (1-z)t). \quad (8.5)$$

Показатели (8.1)–(8.5) могут иметь и несколько другую трактовку. При постоянной номинальной производительности системы c_0 вместо t_3 можно использовать заданный объем работ $v = c_0 t_3$. Тогда из (8.1) и (8.2) получим:

$$P_v(v, t_p) = P(V \geq v) = P(v / c_0, t_p); \quad (8.6)$$

$$P_{1v}(v, t) = P(T_{в.з}(v) < t) = P_1(v / c_0, t). \quad (8.7)$$

Если обозначить через $c = c_0 t_3 / t = c_0 z$ плановую производительность системы в интервале $(0, t)$, то получим еще три функции:

$$P_c(t_3, c) = P(C(t_3) \geq c) = P(t_3, t_3(c_0 - c) / c); \quad (8.8)$$

$$P_{1c}(c, t) = P(C(t) \geq c) = P_1(ct / c_0, t); \quad (8.9)$$

$$P_{cv}(v, c) = P(C(v) \geq c) = P_c(v / c_0, c), \quad (8.10)$$

где $C(t_3)$ — случайная производительность системы до выполнения задания длительностью t_3 ; $C(t)$ — случайная производительность системы в интервале $(0, t)$; $C(v)$ — случайная производительность системы до выполнения задания объема v . Поскольку $(c_0 - c)/c = t_p c_0 / t_3 c_0 = mt$ — средняя кратность временного резервирования, можно найти вероятность безотказной работы (выполнения задания) при заданной кратности резервирования

$$P_{m_i}(t_3, m_i) = P(T_{в.з}(t_3) < t_3(1 + m_i)) = P(t_3, t_3 m_i). \quad (8.11)$$

Если номинальная производительность не является константой, то есть она переменная или случайная величина, то показатели (8.6)–(8.11) не могут быть получены из (8.1) и (8.2) и имеют самостоятельное значение.

Используя функции (8.1)–(8.11), можно получить и другие показатели надежности:

□ вероятность отказа (вероятность срыва функционирования, вероятность невыполнения задания)

$$Q(t_3, t_p) = 1 - P(t_3, t_p); \quad Q_1(t_3, t) = 1 - P_1(t_3, t);$$

$$Q_2(t, t_p) = 1 - P_2(t, t_p); \quad Q_3(z, t) = 1 - P_3(z, t);$$

- ❑ частоту отказов

$$\alpha(t_3, t_p) = \frac{\partial}{\partial t_3} Q(t_3, t_p) = \frac{d}{dt_3} Q_1(t_3, t_3 + t_p); \quad (8.12)$$

- ❑ интенсивность отказов

$$\Lambda(t_3, t_p) = \frac{\alpha(t_3, t_p)}{P(t_3, t_p)} = -\frac{\partial}{\partial t_3} \ln P(t_3, t_p) = -\frac{d}{dt_3} P_1(t_3, t_3 + t_p); \quad (8.13)$$

- ❑ плотность распределения суммарного непроизводительного времени

$$\varphi(t_3, t_p) = \frac{\partial}{\partial t_p} P(t_3, t_p); \quad (8.14)$$

- ❑ плотность распределения суммарной наработки в оперативном интервале времени

$$a_1(t_3, t) = \frac{\partial}{\partial t_3} Q_1(t_3, t) = \alpha(t_3, t - t_3) + \varphi(t_3, t - t_3); \quad (8.15)$$

- ❑ плотность распределения времени до отказа СВР

$$a_2(t, t_p) = \frac{\partial}{\partial t} Q_2(t, t_p) = \alpha(t - t_p, t_p);$$

- ❑ плотность распределения времени выполнения задания

$$\varphi_1(t_3, t) = \frac{\partial}{\partial t} P_1(t_3, t) = \varphi(t_3, t - t_3);$$

- ❑ плотность распределения суммарного непроизводительного времени в оперативном интервале

$$\varphi_2(t, t_p) = \frac{\partial}{\partial t_p} P_2(t, t_p) = a_1(t - t_p, t);$$

- ❑ среднюю наработку до отказа СВР

$$\bar{T}_0(t_p) = \int_0^{\infty} x d_x Q(t, t_p) = \int_0^{\infty} P(t, t_p) dx; \quad (8.16)$$

- ❑ средний расход резерва времени до выполнения задания

$$\bar{T}_{\text{ин}}(t_3) = \int_0^{\infty} y d_y P(t_3, y) = \int_0^{\infty} Q(t_3, y) dy; \quad (8.17)$$

- ❑ среднее время выполнения задания

$$\bar{T}_{\text{в.з}}(t_3) = \int_0^{\infty} y d_y P_1(t_3, y) = \int_0^{\infty} Q_1(t_3, y) dy = t_3 + \bar{T}_{\text{ин}}(t_3); \quad (8.18)$$

- ❑ коэффициент полезного времени при выполнении задания

$$K_{\text{п.в}}(t_3) = t_3 / \bar{T}_{\text{в.з}}(t_3); \quad (8.19)$$

□ коэффициент использования оперативного времени

$$K_{\text{и}}(t_3) = M(\min(T_{\text{в.з}}, t)) / t = \left(t_3 + \int_{t_3}^t x dQ_1(x, t) \right) / t. \tag{8.20}$$

Другие показатели надежности, производные от приведенных здесь, будут введены при рассмотрении соответствующих моделей надежности. Далее рассмотрим некоторые классы СВР в соответствии с классификацией, данной в 5.4.2. Для обозначения систем будем использовать мнемонику, аналогичную мнемонике Кендалла для систем массового обслуживания и содержащую четыре разряда: GGmn, где первый и второй разряды указывают на тип распределения наработки и времени восстановления (*M* — экспоненциальное, *E* — Эрланга, *W* — Вейбулла, *MΣ* — гиперэкспоненциальное, *G* — произвольное), *m* — количество параллельных каналов, *n* — количество фаз.

8.2. Одноканальные системы с мгновенно пополняемым резервом времени (класс GG11)

8.2.1. Восстанавливаемый элемент

Рассмотрим восстанавливаемый элемент с непрерывным контролем работоспособности, мгновенно обнаруживающим все отказы. При его функционировании интервалы времени работы чередуются с интервалами времени восстановления. Наработка между отказами имеет распределение $F(t)$, а время восстановления — распределение $F_{\text{в}}(t)$. Отказ элемента не становится отказом резервированной системы, если время восстановления $T_{\text{в}}$ не превышает резервного времени $t_{\text{д}}$. Резервное время называют в этом случае мгновенно пополняемым, так как оно пополняется до исходного уровня сразу же после восстановления работоспособности элемента. Отказ системы наступает в момент времени, когда впервые $T_{\text{в}} > t_{\text{д}}$. Разность $T_{\text{в}} - t_{\text{д}}$ при условии $T_{\text{в}} > t_{\text{д}}$ есть случайное время восстановления системы «элемент + резервное время». Далее рассмотрим три модели [1], [2]:

Модель 1. Элемент с постоянным резервом времени при начальном работоспособном состоянии.

Модель 2. Элемент с постоянным резервом времени при произвольном начальном состоянии.

Модель 3. Элемент со случайным резервом времени.

Модель 1. Сначала рассмотрим случай, когда к полезному времени относят не только интервалы времени работоспособного состояния, но и короткие интервалы времени восстановления $T_{\text{в}} \leq t_{\text{д}}$. Это означает, что полезным является все время до первого нарушения условия $T_{\text{в}} \leq t_{\text{д}}$. По этой причине на выполнение задания всегда предоставляется время $t = t_3$, где t_3 — минимальное время выполнения задания.

Составим уравнение относительно вероятности безотказной работы. При $t \leq t_n$ возможность срыва функционирования отсутствует. Поэтому

$$P(t, t_n) = 1, \quad t \leq t_n. \quad (8.21)$$

При $t > t_n$ ВБР можно представить в виде суммы вероятностей двух несовместных событий. Событие A_1 состоит в безотказной работе элемента в течение времени $t - t_n$. Вероятность этого события равна $1 - F(t - t_n)$. Событие A_2 наступает в том случае, когда первый отказ с вероятностью $dF(x)$ произошел в момент $x < t - t_n$, восстановление с вероятностью $dF_b(y)$ заканчивается через время $y < t_n$ и за оставшееся время $t - x - y$ не происходит срыва функционирования (отказа СВР). Интегрируя по x и y и суммируя вероятности событий A_1 и A_2 , получим интегральное уравнение

$$P(t, t_n) = 1 - F(t - t_n) + \int_0^{t-t_n} dF(x) \int_0^{t_n} P(t - x - y, t_n) dF_b(y), \quad t > t_n. \quad (8.22)$$

Применяя операционное преобразование Лапласа—Карсона, находим:

$$P^*(s, t_n) = 1 - e^{-st_n} f(s)(1 - F_b(t_n)) / (1 - f(s)f_a(s, t_n)); \quad (8.23)$$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x); \quad f_b(s, t_n) = \int_0^{t_n} e^{-sx} dF_b(x).$$

При экспоненциальных законах распределения наработки и времени восстановления из (8.23) находим:

$$Q^*(s, t_n) = 1 - P^*(s, t_n) = \frac{\lambda(s + \mu) \exp(-(s + \mu)t_n)}{(s + \lambda + \mu) + \lambda \mu \exp(-(s + \mu)t_n)}. \quad (8.24)$$

Обращение (8.24) приводит к довольно сложным выражениям. При быстром восстановлении ($\bar{T}_b < \bar{T}_0$) можно получить приближенное выражение с приемлемой погрешностью. Для этого в (8.22) пренебрегаем в аргументе функции $P(t - x - y)$ временем y за малостью по сравнению с x . Тогда (8.22) приобретает вид

$$P(t, t_n) = 1 - F(t - t_n) + F_b(t_n) \int_0^{t-t_n} P(t - x, t_n) dF(x), \quad t > t_n.$$

Отсюда

$$P^*(s, t_n) = 1 - e^{-st_n} f(s)(1 - F_b(t_n)) / (1 - f(s)F_b(t_n)). \quad (8.25)$$

При экспоненциальном распределении наработки обращение (8.25) дает:

$$P(t, t_n) = \exp(-\lambda(t - t_n)(1 - F_b(t_n))), \quad t > t_n. \quad (8.26)$$

При экспоненциальном распределении времени восстановления

$$P(t, t_n) = \exp(-\lambda(t - t_n)e^{-\mu t_n}), \quad t > t_n. \quad (8.27)$$

Отсюда видно, что интенсивность отказов системы

$$\Lambda(t, t_n) = \lambda(1 - F_b(t_n)) = \lambda e^{-\mu t_n}. \quad (8.28)$$

Среднее время до первого отказа системы находим с помощью (8.25):

$$\bar{T}_0(t_n) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P^*(s, t_n) = \left(\bar{T}_0 + \int_0^{t_n} x dF(x) \right) / (1 - F_b(t_n)) + t_n. \quad (8.29)$$

Чтобы найти нестационарный коэффициент готовности, используем формулы (3.56) и (3.57) и решим интегральное уравнение:

$$K_r(t, t_n) = P(t, t_n) + \int_0^t dQ(x, t_n) \int_0^{t-x} K_r(t-x-y) dF_b(y, t_n), \quad t > t_n; \quad (8.30)$$

$$F_b(y, t_n) = F_b(y + t_n) / (1 - F_b(t_n)).$$

Решение (8.30) с помощью операционного преобразования Лапласа—Карсона имеет вид

$$K_r^*(s, t_n) = P^*(s, t_n)(1 - F_b(t_n)) / \left(1 - F_b(t_n) - Q^*(s, t_n) e^{st_n} \left(f_b(s) - \int_0^{t_n} e^{-sx} dF_b(x) \right) \right).$$

Отсюда стационарный коэффициент готовности

$$K_r(t_n) = \lim_{s \rightarrow 0} K_r^*(s, t_n) = \bar{T}_0(t_n) / (\bar{T}_0(t_n) + \bar{T}_b(t_n));$$

$$\bar{T}_b(t_n) = \left(\bar{T}_b - \int_0^{t_n} x dF_b(x) \right) / (1 - F_b(t_n)) - t_n. \quad (8.31)$$

Средняя наработка на отказ определяется по формуле (8.29). По определению, *стационарный коэффициент готовности* есть вероятность того, что система может начать работу немедленно либо не позднее заданного времени t_n , отсчитываемого от произвольного момента, в который поступает заявка на выполнение задания.

При экспоненциальных законах распределения

$$\bar{T}_0(t_n) = \frac{1}{\lambda} \left(e^{\mu t_n} + \frac{\lambda}{\mu} (e^{\mu t_n} - 1) \right); \quad \bar{T}_b(t_n) = \frac{1}{\mu};$$

$$K_r(t_n) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-\mu t_n}; \quad \Lambda(t, t_n) = \lambda e^{-\mu t_n}.$$

Анализируя зависимость ВБР от λe при различных $\beta = \bar{T}_0 / T_b$ и λt_n , замечаем, что ВБР можно увеличить с помощью резерва времени и в невосстанавливаемой системе (рис. 8.1, кривые 1 и 2).

Однако эффективность такого резервирования невысока. Существенный эффект возникает при введении восстановления. Так, при $\beta = 20$ большее значение ВБР, чем в невосстанавливаемой системе, достигается при в 10 раз меньшем резерве времени, если $\lambda t > 0,75$, а при $\beta = 30$ — при $\lambda t > 0,6$.

Интенсивность отказов с ростом μt_n уменьшается по экспоненциальному закону до значения $\mu t_n = \mu t$, а затем скачком падает до нуля. Введение резерва времени оказывается эквивалентным структурному резервированию, если позволяет достичь одинаковых показателей надежности. Так, сравнивая формулы (8.26)

и (7.29), видим, что общему нагруженному дублированию с целой кратностью ($k = 1$) эквивалентен резерв времени $\bar{T}_в$ при $\beta = 50$ и $t_d = 4,6 \bar{T}_в$ при $\beta = 200$.

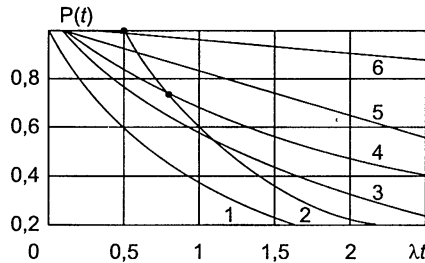


Рис. 8.1. Зависимость вероятности безотказной работы систем с мгновенно пополняемым резервом времени от оперативного времени

Пример 8.1. Система электроснабжения (СЭС) потребителей постоянного тока, использующая генератор постоянного тока со средней наработкой на отказ $\bar{T}_0 = 2000$ ч и средним временем восстановления $\bar{T}_в = 5$ ч, должна обеспечивать ВБР в течение одного года не менее 0,95. Для повышения надежности СЭС используют аккумуляторную батарею (АБ) гарантированного питания емкостью C , обеспечивающую ток I в нагрузку при напряжении U с потребляемой мощностью $W = IU$. Согласно вольт-амперной характеристике АБ, такой режим может поддерживаться непрерывно, если АБ расходует не более 10% номинальной емкости. Необходимо выбрать АБ нужной емкости из ряда промышленных образцов и найти показатели надежности резервированной системы, если известно, что АБ не имеет внезапных отказов и при выполнении установленных условий эксплуатации для полной зарядки АБ до начального уровня требуется не более 20 ч.

Решение. Поскольку АБ является для СЭС резервом с ограниченным ресурсом (время однократного включения не должно превышать $t_d = 0,1C/(UI)$), не имеющим внезапных отказов, поскольку модель надежности резервированной СЭС сводится к модели восстанавливаемой системы с мгновенно пополняемым резервом времени. Без АБ система имеет ВБР $P(t) = \exp(-8760/2000) = 0,0125$. Для резервированной системы, согласно (8.27),

$$P_c(t) = \exp\left(-\left(\frac{0,1Ct}{UI}\right) \exp((-0,1C / UI\bar{T}_в)/\bar{T}_в)\right). \quad (8.32)$$

Вероятность полного заряда в периоде между включениями АБ оценивается по формуле $p = \exp(-T_{зар}/\bar{T}_0) = \exp(-20/2000) = 0,99$. Поэтому считаем, что АБ является полностью возобновляемым ресурсом, а резерв времени — мгновенно пополняемым. По формуле (8.32) находим, что ВБР достигает значения 0,95 при $t_d = 0,1C/(UI) = 22,3$ ч. Если потребляемая мощность $W = 1$ кВт/ч, а ряд промышленных образцов содержит АБ емкостью 160, 200, 240, 280, 320 кВт/ч, то этому условию удовлетворяет АБ емкостью 240 кВт/ч. При такой емкости $t_d = 24,0$ ч, и вероятность безотказной работы $P_c(1 \text{ год}) = 0,965$. ВБР возрастает от 0,0125 до 0,965, то есть в 77 раз, а риск отказа уменьшается в 280 раз.

Рассмотрим теперь случай, когда короткие интервалы времени восстановления не включаются в полезное время, а для выполнения задания надо иметь суммарную наработку не менее t_3 . Ясно, что теперь время выполнения задания может, вообще говоря, не совпадать с требуемой наработкой. В этом случае вероятность безотказной работы удовлетворяет интегральному уравнению

$$P(t_3, t_n) = 1 - F(t_3) + \int_0^{t_3} P(t_3 - x, t_n) dF(x) \int_0^{t_n} dF_b(y),$$

Выполняя здесь операционное преобразование по переменной t_3 , получим:

$$P^*(s, t_n) = (1 - f(s)) / (1 - f(s)F_b(t_n)).$$

В частности, при простейшем потоке отказов, когда $f(s) = \lambda / (\lambda + \mu)$, имеем:

$$P^*(s, t_n) = s / (s + \lambda(1 - F_b(t_n))).$$

Отсюда

$$P(t_3, t_n) = \exp(-\lambda t_3(1 - F_b(t_n))). \quad (8.33)$$

Данная формула, в отличие от (8.26), является точной, она верна не только при быстром восстановлении. Из (8.33) легко найти интенсивность отказов и среднюю наработку системы до отказа:

$$\Lambda(t, t_n) = \lambda(1 - F_b(t_n)); \quad \bar{T}_0(t_n) = \bar{T}_0 / (1 - F_b(t_n)). \quad (8.34)$$

При определении коэффициента готовности следует учесть, что система будет готова к выполнению работ в двух случаях: если она работоспособна в момент поступления заявки в произвольный момент времени или если она неработоспособна, но восстановит свою работоспособность за время, не превышающее t_n . Поэтому коэффициент готовности можно найти как отношение

$$K_r(t_n) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_b^*) / (\bar{T}_0 + \bar{T}_b); \quad \bar{T}_b^* = \int_0^{t_n} x dF(x), \quad (8.35)$$

где $\bar{T}_b^*$ — среднее время быстрого восстановления. В частности, при экспоненциальных распределениях наработки и времени восстановления из (8.35) получим:

$$K_r(t_n) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 + \mu t_n) e^{-\mu t_n}. \quad (8.36)$$

Найдем теперь среднее значение и дисперсию суммарного времени $T_{np}(t_3)$ проста системы до получения наработки t_3 . Учтем, что это время есть сумма случайного числа случайных независимых слагаемых:

$$T_{np}(t_3) = \sum_{i=1}^N T_{bi}^*,$$

где N при простейшем потоке отказов имеет распределение Пуассона, а время быстрого восстановления имеет плотность распределения $f_b(t, t_n) = f_b(t) / (1 - F_b(t_n))$. По известным соотношениям [10] находим:

$$\bar{T}_{\text{уп}}(t_3) = MT_{\text{уп}}(t_3) = MN MT_{\text{в}}^* = \lambda t_3 \int_0^{t_{\text{л}}} x dF(x) / (1 - F_{\text{в}}(t_{\text{л}}));$$

$$DT_{\text{уп}}(t_3) = DN(MT_{\text{в}}^*)^2 + MN DT_{\text{в}}^* = \lambda t_3 MT_{\text{в}}^{*2} = \lambda t_3 \int_0^{t_{\text{л}}} x^2 dF(x) / (1 - F_{\text{в}}(t_{\text{л}})).$$

При экспоненциальном распределении времени восстановления

$$\bar{T}_{\text{уп}}(t_3) = (\lambda t_3 / \mu)(1 - \mu t_{\text{л}} e^{-\mu t_{\text{л}}} / (1 - e^{-\mu t_{\text{л}}}));$$

$$DT_{\text{уп}}(t_3) = (2\lambda t_3 / \mu^2)(1 - \mu t_{\text{л}}(1 + \mu t_{\text{л}} / 2)e^{-\mu t_{\text{л}}} / (1 - e^{-\mu t_{\text{л}}})).$$

Пример 8.2. В зимний период при наиболее низкой ожидаемой температуре окружающего воздуха и стандартных условиях теплоизоляции помещений система теплоснабжения обеспечивает максимальную комфортную температуру не менее t_{max} . Полагая, что при авариях теплосети температура в помещениях не должна опускаться ниже t_{min} с вероятностью не менее p° , а средний интервал между авариями равен $\bar{T}_0 = 720$ ч, найти соотношение между средним временем устранения аварии и постоянной времени снижения внутренней температуры помещений при отключении отопления на время $t_{\text{л}} = 1$ сутки или 2 суток.

Решение. Постоянная времени τ связана с предельными значениями температуры в помещениях соотношением

$$t_{\text{min}} = t_{\text{max}} \exp(-t_{\text{л}} / \tau),$$

где $t_{\text{л}}$ — допустимое время перерыва снабжения. Среднее время устранения аварии $\bar{T}_{\text{в}}$ связано с требованиями к надежности формулой

$$p^\circ = \exp(-\exp(-t_{\text{л}} / \bar{T}_{\text{в}}) / \bar{T}_0).$$

Из первого соотношения находим $t_{\text{л}} / \tau = \ln(t_{\text{max}} / t_{\text{min}})$, из второго $\bar{T}_{\text{в}} / t_{\text{л}} = 1 / \ln \times (\bar{T}_0 / \ln(1/p))$. Перемножая правые и левые части этих формул, получим:

$$\bar{T}_{\text{в}} = a\tau, \quad a = \ln(t_{\text{max}} / t_{\text{min}}) / \ln(\bar{T}_0 / \ln(1/p)).$$

Результаты расчетов по этой формуле при $t_{\text{max}} = 22^\circ\text{C}$, $t_{\text{min}} = 10^\circ\text{C}$ приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Характеристики надежности системы отопления

a			$\bar{T}_{\text{в}}$, ч ($t_{\text{л}} = 2$ суток)			$\bar{T}_0$, ч
$p^\circ = 0,9$	$p^\circ = 0,99$	$p^\circ = 0,999$	$p^\circ = 0,9$	$p^\circ = 0,99$	$p^\circ = 0,999$	
0,0893	0,0705	0,0585	5,4	4,3	3,6	720
0,0828	0,0664	0,0556	5,0	4,0	3,4	1440

Цифры, приведенные в таблице, показывают, что при потоке аварий в среднем 1 авария в две недели среднее время устранения аварии должно быть в 11–17 раз

меньше постоянной времени снижения температуры внутри помещений. Улучшение безаварийности вдвое ($\bar{T}_0 = 1440$ ч) позволяет увеличить среднее время устранения аварии незначительно: на 8% при $p^0 = 0,9$ и на 10,5% при $p^0 = 0,999$. Допустимые условия теплоизоляции помещений при заданных показателях теплоснабжения можно оценивать по предельно допустимому снижению температуры помещений за установленное время при отключении теплоснабжения. При $p^0 = 0,9$, $\bar{T}_0 = 720$ ч и $\bar{T}_в = 6$ ч температура должна быть не менее $t^0 = t_{\max}^0 \exp(-at / \bar{T}_в) = 15,4$ °С в первые сутки и 10,7 °С в конце вторых суток. Если предельный срок, в течение которого температура помещений находится в допустимых пределах при отключении теплоснабжения, равен $t_{\text{д}}^0$, то требования к среднему времени устранения аварии определяют по формуле

$$\bar{T}_в^0 = \frac{at_{\text{д}}^0}{\ln(t_{\max}^0 / t_{\min}^0)}.$$

Из данных, приведенных в табл. 8.1, видно, что при $t_{\text{д}}^0 = 48$ ч требования к среднему времени устранения аварии являются весьма жесткими.

Модель 2. Если заявка на выполнение задания поступает в систему в произвольный момент времени, то надежность системы оценивается с помощью показателя, являющегося расширением коэффициента оперативной готовности $K_{о.г.}(t)$ и называемого *вероятностью выполнения ожидаемого задания*. Заявка принимается к исполнению, если в начальный момент времени система работоспособна или если она неработоспособна, но происходит «быстрое» восстановление и задержка в начале работ не превышает резервного времени $t_{\text{д}}$.

Если время быстрого восстановления относят к полезному времени, то вероятность выполнения ожидаемого задания находят из соотношения

$$P(t, t_{\text{д}}) = K_{о.г.}(t, t_{\text{д}}) = K_r P^{(0)}(t, t_{\text{д}}) + (1 - K_r) \int_0^{t_{\text{д}}} P^{(0)}(t - x, t_{\text{д}}) dF_{\text{в}}(x), \quad t > t_{\text{д}}, \quad (8.37)$$

где $K_r = \bar{T}_0 / (\bar{T}_0 + \bar{T}_в)$, $P(0)(t, t_{\text{д}})$ следует взять из (8.23), (8.26) или (8.27). Подставляя в (8.37) формулу (8.27), после некоторых преобразований получим:

$$P(t, t_{\text{д}}) = \begin{cases} K_r(t_{\text{д}}) = 1 - \frac{\lambda q}{\lambda + \mu}, \quad q = \exp(-\mu t_{\text{д}}), \quad 0 \leq t \leq t_{\text{д}}; \\ \frac{\mu(\lambda + \mu - \lambda q)}{(\lambda + \mu)(\mu - \lambda q)} e^{-\lambda q(t - t_{\text{д}})} - \left(q + \frac{\lambda}{\mu - \lambda q} e^{-\mu t} \right) \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad t_{\text{д}} \leq t \leq 2t_{\text{д}}; \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \exp(-\lambda q(t - t_{\text{д}})) \left(1 + \frac{\lambda}{\mu - \lambda q} (1 - \exp(-(\mu - \lambda q)t_{\text{д}})) \right); \quad t \geq 2t_{\text{д}}. \end{cases}$$

При интегрировании в (8.37) для $t_{\text{д}} \leq t \leq 2t_{\text{д}}$ следует выделить два интервала: $(0, t - t_{\text{д}})$ и $(t - t_{\text{д}}, t_{\text{д}})$, причем во втором интервале, согласно (8.21), $P(t - x, t_{\text{д}}) = 1$. Если время быстрого восстановления не включается в полезное время, то искомую вероятность следует представить в виде

$$P(t_3, t_n) = K_{o.r}(t_3, t_n) = K_r P^{(0)}(t_3, t_n) + (1 - K_r) P^{(1)}(t_3, t_n), \quad (8.38)$$

где $P^{(i)}(t_3, t_n)$ — вероятность выполнения задания при начальном состоянии i : работоспособном при $i = 0$ и неработоспособном при $i = 1$. Формулу (8.38) можно представить в виде

$$P(t_3, t_n) = K_{o.r}(t_3, t_n) = K_r(t_n) P^{(0)}(t_3, t_n), \quad (8.39)$$

где $K_r(t_n)$ следует рассчитывать по формуле (8.36), а $P^{(0)}(t_3, t_n)$ — по формуле (8.34). При экспоненциальных распределениях формула (8.39) приобретает вид

$$P(t_3, t_n) = K_{o.r}(t_3, t_n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 + \mu t_n q)\right) e^{-\lambda q t_3}, \quad q = \exp(-\mu t_n). \quad (8.40)$$

При $t_n = 0$ формула (8.40) совпадает с (3.52).

Модель 3. При случайном резерве времени вводится распределение $D(t) = P(T_n < t)$. Далее используется полумарковская модель надежности. Система может находиться в одном из трех состояний: 0 — элемент работоспособен; 1 — элемент неработоспособен, происходит восстановление работоспособности, время восстановления не превосходит резервного: $T_b < T_n$; 2 — система неработоспособна (элемент неработоспособен, $T_b > T_n$), моменты изменения со стояний являются полумарковскими точками. Переходные вероятности имеют вид

$$P_{01}(t) = F(t); \quad P_{10}(t) = \int_0^t (1 - D(x)) dF_n(x); \quad P_{11}(t) = \int_0^t (1 - F_n(x)) dD(x).$$

Используя систему интегральных уравнений типа (7.10) относительно вероятностей отказа системы $Q_i(t, \tau_0)$, получим: $i = 0$, или 1 — начальное состояние системы. Переходя к изображениям по Карсону, получим систему алгебраических уравнений типа (7.12):

$$Q_0^*(s, \tau_n) = P_{01}^*(s) Q_1^*(s, \tau_n); \quad Q_1^*(s, \tau_n) = P_{12}^*(s) + P_{10}^*(s) Q_0^*(s, \tau_n).$$

Отсюда

$$Q_0^*(s, \tau_n) = 1 - P_0^*(s, \tau_n) = \frac{P_{01}^*(s) P_{12}^*(s)}{1 - P_{01}^*(s) P_{10}^*(s)} = \frac{f(s) P_{12}^*(s)}{1 - f(s) P_{10}^*(s)}; \quad (8.41)$$

$$P_{01}^*(s) = f(s); \quad P_{10}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} (1 - D(t)) dF_n(t); \quad P_{12}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} (1 - F_n(t)) dD(t).$$

Если резерв времени постоянный, то

$$P_{10}^*(s) = \int_0^{t_n} e^{-st} dF_n(t); \quad P_{12}^*(s) = e^{-st_n} (1 - F_n(t_n)),$$

и формула (8.41) совпадает с (8.23).

При экспоненциальных распределениях

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad F_n(t) = 1 - e^{-\mu t}; \quad D(t) = 1 - e^{-\alpha t}.$$

Из формулы (8.41) найдем изображение для функции вероятности безотказной работы:

$$P_0^*(s, \tau_n) = 1 - Q_0^*(s, \tau_n) = \frac{s + \lambda + \mu + \alpha}{s^2 + s(\lambda + \mu + \alpha) + \lambda\alpha}.$$

Отсюда

$$P_0^*(s, \tau_n) = \frac{1}{B - A} (Be^{-At} - Ae^{-Bt}); \quad A = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \alpha - C);$$
$$B = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \alpha + C); \quad C = ((\lambda + \mu + \alpha)^2 - 4\lambda\alpha)^{0.5}.$$

При произвольных распределениях наработки и времени восстановления можно использовать модель разрежения Реньи для потока отказов с вероятностью

$$p = 1 - q = P\{T_n < T_n\} = \int_0^\infty (1 - D(t)) dF_n(t) = 1 - \int_0^\infty (1 - F_n(t)) dD(t).$$

Тогда

$$P_0(t, \tau_n) = 1 - q \sum_{n=0}^\infty p^n F_{n+1}(t), \quad t \gg \bar{T}_n, \tag{8.42}$$

где $F_{n+1}(t)$ — n -кратная свертка распределения $F(t)$. В частности, при постоянном резерве времени

$$P_0(t, \tau_n) = \begin{cases} 1, & t \leq t_n; \\ 1 - (1 - F_n(t_n)) \sum_{n=0}^\infty F_n^n(t_n) F_{n+1}(t - \tau_n), & t \geq t_n. \end{cases} \tag{8.43}$$

Если наработка имеет экспоненциальное распределение, то

$$F_{n+1}(t) = 1 - \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \tag{8.44}$$

и тогда (8.42) приобретает вид

$$P_0(t, t_n) = \exp(-\lambda q t), \quad t \gg \bar{T}_n, \quad q = P\{T_n > T_n\}. \tag{8.45}$$

При подстановке (8.44) в (8.43) получим (8.26).

Другие характеристики системы:

□ средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_{o.c}(\tau_n) = \frac{1}{q} (\bar{T}_o + M \min(T_n, T_n)); \quad q = \int_0^\infty (1 - F_o(t)) dD(t); \tag{8.46}$$

$$M \min(T_n, T_n) = \bar{T}_o^* = \int_0^\infty (1 - F_n(t))(1 - D(t)) dt;$$

□ среднее время восстановления

$$\bar{T}_n(\tau_n) = 1 / q (\bar{T}_o - M \min(T_n, T_n)); \tag{8.47}$$

□ коэффициент готовности

$$K_r(t_d) = \bar{T}_{o.c}(\tau_d) / (\bar{T}_{o.c}(\tau_d) + \bar{T}_b(\tau_d)) = K_r + (1 - K_r)p; \quad (8.48)$$

$$K_r = \bar{T}_0 / (\bar{T}_0 + \bar{T}_b), \quad p = 1 - q = \bar{T}_b^* / \bar{T}_b;$$

□ коэффициент оперативной готовности

$$K_{o.r}(t, t_d) = K_r(t_d) \exp(-q\lambda t). \quad (8.49)$$

В формуле (8.46) величиной $\bar{T}_b^*$ можно пренебречь ввиду малости по сравнению с $\bar{T}_0$ и рассчитывать среднюю наработку до отказа по приближенной формуле

$$\bar{T}_{o.c}(\tau_d) \cong \bar{T}_0 / q.$$

8.2.2. Последовательная система

Последовательная система состоит из n последовательно соединенных элементов. В дополнение к принятым ранее допущениям будем считать, что отказы ее элементов являются независимыми событиями, а восстановление неограниченное, то есть ремонтный орган позволяет одновременно устранять все возникшие отказы. Интенсивность отказов i -го элемента равна λ_i , время восстановления после отказа i -го элемента имеет распределение $F_{wi}(t)$, а допустимое время перерыва в работе не более t_{li} . При этих условиях вероятность безотказной работы системы можно представить в виде

$$P(t, t_{l1}, \dots, t_{ln}) = P_1(t, t_{l1})P_2(t, t_{l2}) \dots P_n(t, t_{ln}), \quad (8.50)$$

где $P_i(t, t_{li})$ определяют по формулам (8.21) и (8.26).

Если упорядочить t_{li} в порядке возрастания, то вместо (8.50) можно записать:

$$P(t, t_{l1}, \dots, t_{ln}) = \begin{cases} 1, & t \leq t_{l1}; \\ \exp(-\lambda_1(t - t_{l1})(1 - F_{w1}(t_{l1}))), & t_{l1} \leq t \leq t_{l2}; \\ \exp(-\lambda_1(t - t_{l1})(1 - F_{w1}(t_{l1})) - \lambda_2(t - t_{l2})(1 - F_{w2}(t_{l2}))), & t_{l2} \leq t \leq t_{l3}; \\ \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i(t - t_{li})(1 - F_{wi}(t_{li}))\right), & t \geq t_{ln}. \end{cases}$$

Различные строчки этой формулы можно объединить следующим образом:

$$P(t, t_{l1}, \dots, t_{ln}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i \max(0, (t - t_{li}))(1 - F_{wi}(t_{li}))\right).$$

Если обозначить

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad F_{b.c} = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_{wi}(t_{li}) / \lambda; \quad t_{l.c} = \sum_{i=1}^n \alpha_i t_{li} / \sum_{i=1}^n \alpha_i; \quad \alpha_i = \lambda_i (1 - F_{wi}(t_{li})),$$

то получим:

$$P(t, t_{l1}, \dots, t_{ln}) = \exp(-\lambda(t - t_{l.c})(1 - F_{b.c})), \quad t \geq t_{ln}. \quad (8.51)$$

Если все t_{ni} одинаковы, то $t_{n.c} = t_n$ и формула (8.51) сводится к (8.26) с распределением времени восстановления $F_{n.c}(t_n)$. Если $F_{ni}(t) = 1 - \exp(-\mu_i t)$, то время восстановления системы имеет гиперэкспоненциальное распределение. Для расчета других показателей можно использовать формулы (8.28)–(8.31).

При случайном значении резерва времени i -го элемента с распределением $D_i(t)$ используем формулу (8.45):

$$P(t, \tau_{n1}, \dots, \tau_{nn}) = \exp(-\lambda q_c t), \quad t \gg \max_{(i)} \bar{\tau}_{ni};$$

$$q_c = \sum_{i=1}^n (\lambda_i / \lambda) \int_0^{\infty} (1 - F_{ni}(t)) dD_i(t). \quad (8.52)$$

Если $D_i(t) = D(t)$, то формула (8.52) приобретает вид

$$P(t, \tau_{n1}, \dots, \tau_{nn}) = \exp\left(-\lambda t \int_0^{\infty} (1 - F_{n.c}(t)) dD_i(t)\right), \quad t \gg \bar{\tau}_n. \quad (8.53)$$

При постоянном резерве времени $dD(t) = 1$ при $t = t_n$, и тогда (8.53) совпадает с (8.51) при $t_{ni} = t_n$ и $t_{nc} = 0$. Прочие характеристики при $D_i(t) = D(t)$ можно найти по формулам (8.46)–(8.49), если в них вместо $F_{ni}(t)$ использовать $F_{n.c}(t)$.

8.3. Одноканальные системы с непополняемым резервом времени

Условия функционирования и модели надежности одноканальных систем с непополняемым резервом времени различаются структурой системы, последствиями отказов, типом распределений наработки и времени восстановления, характеристиками средств контроля. Рассмотрим далее некоторые типовые модели.

8.3.1. Восстанавливаемый элемент с необесценивающими отказами

Наработка такого элемента между отказами имеет распределение $F(t)$, время восстановления — распределение $F_{n.c}(t)$ — независимо от количества отказов в прошлом. Систему образуют элемент и непополняемый резерв времени (см. 5.4.2). Отказы элемента не обесценивают предыдущую наработку, поэтому резерв времени расходуется только в неработоспособном состоянии пропорционально времени восстановления. Далее рассмотрим варианты этой модели.

Полумарковская модель. Общий случай

При выборе уравнений для расчета полумарковской модели воспользуемся интегральным методом. Обозначим через $P^{(i)}(t_z, t_p)$ вероятность безотказной работы до наработки t_z при наличии непополняемого резерва времени t_p и начальном состоянии элемента i ($i = 0$ — работоспособное, $i = 1$ — неработоспособное). В начальном работоспособном состоянии сложное событие «выполнение задания» можно представить в виде суммы несовместных событий: A_1 — до наработки t_z не будет

ни одного нарушения работоспособности элемента A_2 — до наработки t_3 произойдет нарушение работоспособности элемента, но задание будет выполнено в срок. Используя формулу сложения вероятностей несовместных событий, получаем:

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = 1 - F(t_3) + \int_0^{t_3} P^{(1)}(t_3 - x, t_p) dF(x). \quad (8.54)$$

Второе слагаемое здесь выражает вероятность того, что элемент откажет в момент x , но далее, стартуя из состояния $i = 1$, он своевременно выполнит задание, имея резерв времени t_p .

При $i = 1$ элемент расходует резерв времени до окончания восстановления в момент y , но далее, имея остаток резерва времени $t_p - y$, выполнит задание с вероятностью $P^{(0)}(t_3, t_p - y)$. Поэтому

$$P^{(1)}(t_3, t_p) = \int_0^{t_p} P^{(0)}(t_3, t_p - y) dF_b(y). \quad (8.55)$$

Подставляя (8.55) в (8.54), сводим два уравнения в одно:

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = 1 - F(t_3) + \int_0^{t_3} \int_0^{t_p} P^{(0)}(t_3 - x, t_p - y) dF_b(y) dF(x). \quad (8.56)$$

Аналогично находим:

$$P^{(1)}(t_3, t_p) = (1 - F(t_3))F_b(t_p) + \int_0^{t_3} \int_0^{t_p} P^{(1)}(t_3 - x, t_p - y) dF_b(y) dF(x). \quad (8.57)$$

Для функций (8.2) и (8.4) уравнения имеют вид

$$P_1^{(0)}(t_3, t) = 1 - F(t_3) + \int_0^{t_3} \int_0^{t-t_3} P_1^{(0)}(t - x - y, t_p - y) dF_b(y) dF(x), \quad t_3 \leq t; \quad (8.58)$$

$$P_2^{(0)}(t, t_p) = 1 - F(t - t_p) + \int_0^{t-t_p} \int_0^{t_p} P_2^{(0)}(t_3 - x, t - x - y) dF_b(y) dF(x), \quad t \geq t_p \quad (8.59)$$

Для решения интегральных уравнений Вольтера второго рода (8.56)–(8.59) можно использовать либо метод последовательных приближений, либо двойное операционное преобразование Лапласа–Карсона.

С помощью метода последовательных приближений уравнение (8.56) приводится к виду

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_3) F_{bk}(t_p); \quad (8.60)$$

$$p_k(t_3) = (1 - F(t_3))^* (F(t_3))^{*k}; \quad F_{bk}(t_p) = (F_b(t_p))^{*k}.$$

Здесь $p_k(t_3)$ — вероятность возникновения ровно k отказов до наработки t_3 ; $F_{bk}(t_p)$ — вероятность того, что суммарное время восстановления после k отказов не превысит резервного времени, знаком $*$ обозначена интегральная операция типа свертки. При записи этих формул использованы формулы (3.7), (3.8) и (3.30а). Если

$$Q^{(0)}(t_3, t_p) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_3) F_{bk}(t_p) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_3) (1 - F_{bk}(t_p)). \quad (8.61)$$

$$\sum_{k=0}^{k_1} p_k(t_3) F_{bk}(t_p) < P^{(0)}(t_3, t_p) < 1 - \sum_{k=0}^{k_2} p_k(t_3) (1 - F_{bk}(t_p)).$$

$$P^{(1)}(t_3, t_p) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_3) F_{b, k+1}(t_p) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_3) (1 - F_{b, k+1}(t_p)). \quad (8.62)$$

$$P(t_3, t_p) = K_r (1 - F_1(t_3)) + K_r \int_0^{t_3} P^{(1)}(t_3 - x, t_p) dF_1(x) + \\ + (1 - K_r) \int_0^{t_p} P^{(0)}(t_3, t_p - y) dF_{b1}(y). \quad (8.63)$$

$$K_r(t_p) = \left(\bar{T}_0 + \int_0^{t_p} (1 - F_b(x)) dx \right) / (\bar{T}_0 + \bar{T}_b). \quad (8.64)$$

$$P^{**}(s, \omega) = s \omega \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(t_3, t_p) e^{-st_3 - \omega t_p} dt_3 dt_p = 1 - Q^{**}(s, \omega);$$

$$P_1^{**}(s, \omega) = s \omega \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_1(t_3, t) e^{-st_3 - \omega t} dt_3 dt = \frac{s}{s + \omega} P^{**}(s + \omega, \omega) = 1 - Q_1^{**}(s, \omega); \quad (8.65)$$

$$P_2^{**}(s, \omega) = s \omega \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_2(t, t_p) e^{-st - \omega t_p} dt dt_p = 1 - \frac{\omega}{s + \omega} Q^{**}(s, s + \omega) = 1 - Q_2^{**}(s, \omega).$$

Применяя в (8.54) и (8.55) дважды теорему о свертке операционного преобразования и решая алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения, находим

$$P^{(0)*}(s, t_p) = 1 - f(s) + f(s)P^{(1)*}(s, t_p); \quad P^{(1)*}(t_3, \omega) = f_b(\omega)P^{(0)*}(t_3, \omega);$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x); \quad f_b(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega y} dF_b(y); \quad (8.66)$$

$$P^{(0)**}(s, \omega) = \frac{1 - f(s)}{1 - f(s)f_b(\omega)} = 1 - \frac{(1 - f_b(\omega))f(s)}{1 - f(s)f_b(\omega)}. \quad (8.66a)$$

Из (8.55), (8.63) и (8.65) находим также:

$$P^{(1)**}(s, \omega) = \frac{f_b(\omega)(1 - f(s))}{1 - f(s)f_b(\omega)}; \quad P_1^{(0)**}(s, \omega) = \frac{s}{s + \omega} \frac{1 - f(s + \omega)}{1 - f(s + \omega)f_b(\omega)};$$

$$P_2^{(0)**}(s, \omega) = 1 - \frac{\omega}{s + \omega} \frac{f(s)(1 - f_b(s + \omega))}{1 - f(s)f_b(s + \omega)};$$

$$P^{**}(s, \omega) = K_r \left(1 + \frac{(1 - f(s))(1 - f_b(\omega))(s - \omega)}{s\omega \bar{T}_0(1 - f(s)f_b(\omega))} \right). \quad (8.67)$$

Разлагая (8.66a) по степеням $f(s)f_b(\omega)$ и выполняя обратное преобразование, получим (8.60) и (8.61). Аналогично находят формулы для $P_1(t_3, t)$ и $P_2(t, t_p)$. Однако формулы (8.66a) и (8.67) полезны еще и для получения моментов распределений случайных величин. Так, согласно (8.16), средняя наработка до отказа системы с резервом времени

$$\bar{T}_0^{(0)}(t_p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P^{(0)*}(s, t_p) = \bar{T}_0 + \bar{T}_0^{(1)}(t_p); \quad \bar{T}_0^{(0)*}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P^{(0)**}(s, \omega).$$

Подставляя сюда (8.66a), получим:

$$\bar{T}_0^{(0)*}(\omega) = \frac{\bar{T}_0}{1 - f_b(\omega)}; \quad \bar{T}_0^{(0)}(t_p) = \bar{T}_0 \sum_{k=0}^{\infty} F_{bk}(t_p). \quad (8.68)$$

Аналогично находят среднее время простоя системы до наработки t_3 . Согласно (8.17),

$$\bar{T}_{\text{ин}}^{(0)}(t_3) = \int_0^{\infty} Q^{(0)}(t_3, t_p) dt_p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} Q^{(0)*}(t_3, \omega); \quad \bar{T}_{\text{ин}}^{(0)*}(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} Q^{(0)**}(s, \omega).$$

Подставляя сюда (8.66a), получим:

$$\bar{T}_{\text{ин}}^{(0)*}(s) = \bar{T}_b f(s) / (1 - f(s)) = \bar{T}_b H^*(s); \quad \bar{T}_{\text{ин}}^{(0)}(t_3) = \bar{T}_b H(t_3). \quad (8.69)$$

При выполнении ожидаемого задания надо использовать формулу (8.67). Тогда можно найти:

$$\bar{T}_{\text{ин}}(t_3) = \int_0^{\infty} Q(t_3, t_p) dt_p = (1 - K_r)(\bar{T}_{\text{ин}}^{(0)}(t_3) + t_3 + \beta_{n2} / 2\bar{T}_b),$$

где β_{n2} — второй начальный момент распределения $F_b(t)$.

Среднее время выполнения задания находят с помощью (8.18). Средняя суммарная наработка в оперативном интервале времени

$$\overline{T}_n^{(0)}(t) = \int_0^{\infty} P_1^{(0)}(x, t) dx = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P_1^{(0)*}(s, t); \quad \overline{T}_n^{(0)*}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P_1^{(0)**}(s, \omega).$$

Подставляя сюда формулу (8.67), найдем:

$$\overline{T}_n^{(0)*}(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{1 - f(\omega)}{1 - f(\omega)f_n(\omega)} = \frac{1}{\omega} K_n^*(\omega). \tag{8.70}$$

Сравнивая (8.70) и (3.57), видим, что среднюю суммарную наработку можно получить интегрированием функции готовности:

$$\overline{T}_n^{(0)}(t) = \int_0^t K_r(x) dx.$$

Если начальный момент времени находится на стационарном участке эксплуатации системы, то

$$\overline{T}_n^{(0)}(t) = K_r t.$$

Марковская модель

Если распределения $F(t)$ и $F_n(t)$ являются экспоненциальными:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad F_n(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

то модель надежности системы становится марковской. В этом случае, согласно (8.66а),

$$f(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}; \quad f_n(\omega) = \frac{\mu}{\mu + \omega}; \quad P^{(0)**}(s, \omega) = \frac{s(\omega + \mu)}{\lambda\omega + s(\omega + \mu)} = \frac{s}{s + \lambda(1 - f_n(\omega))}. \tag{8.71}$$

Обратное преобразование в (8.71) проводим в два этапа. Сначала выполним обратное преобразование по s , представив (8.71) в виде

$$P^{(0)*}(t_3, \omega) = \exp(-\lambda t_3(1 - f_n(\omega))) = \exp\left(-\frac{\lambda t_3 \omega}{\omega + \mu}\right). \tag{8.72}$$

Далее разлагаем (8.72) по степеням $f_n(\omega)$:

$$P^{(0)*}(t_3, \omega) = e^{-\rho} e^{\rho f_n(\omega)} = e^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} (f_n(\omega))^n, \quad \rho = \lambda t_3.$$

Отсюда после обратного преобразования по ω имеем:

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = e^{-\rho} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} I(k, \gamma) \right), \quad \gamma = \mu t_p, \tag{8.73}$$

где $I(k, \gamma) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma}$ — неполная гамма-функция. Формула (8.73) может быть получена и из (8.60), если учесть, что

$$p_k(t_3) = \rho^k / k! e^{-\rho}; \quad F_{vk}(t_p) = I(k, \gamma). \quad (8.74)$$

Из (8.62) или (8.67) находим также:

$$P^{(1)}(t_3, t_p) = e^{-\rho} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} I(k+1, \gamma) \right) = P^{(0)}(t_3, t_p) - e^{-\rho-\gamma} I_0(2\sqrt{\rho\gamma}), \quad (8.74a)$$

где

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$$

модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [15, с. 465]. При больших ρ и γ расчеты по формулам (8.73) и (8.74a) вызывают определенные трудности из-за слабой сходимости рядов. В этом случае можно использовать приближенные формулы с гарантированной точностью (ошибка не превосходит 10^{-4}), приводимые здесь без вывода:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(t_3, t_p) &= \frac{\gamma^4}{\gamma^4 + \rho^4} + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^1 \left(\frac{e^{-c_k}}{c_k} (2\rho - b_k) + \frac{e^{-h_k}}{h_k} (2\rho - b_k) \right), \quad \rho\gamma \leq 4, \quad m=2; \\ P^{(0)}(t_3, t_p) &= \frac{\gamma^6}{\gamma^6 + \rho^6} + \frac{1}{12} \left(\sum_{k=0}^2 \frac{e^{-c_k}}{c_k} (2\rho - b_k) + \frac{e^{-h_2}}{h_2} (2\rho + b_2) \right), \quad 4 \leq \rho\gamma \leq 16, \quad m=3; \\ P^{(0)}(t_3, t_p) &= \frac{\gamma^8}{\gamma^8 + \rho^8} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-c_k}}{c_k} (2\rho - b_k), \quad 16 \leq \rho\gamma \leq 49, \quad m=4; \\ P^{(0)}(t_3, t_p) &= \frac{\gamma^{2m}}{\gamma^{2m} + \rho^{2m}} + \frac{1}{4m} \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-c_k}}{c_k} (2\rho - b_k), \quad \rho\gamma \geq 49, \quad m = m_{\rho\gamma}; \\ b_k &= 2\sqrt{\rho\gamma} \cos \frac{2k+1}{4m} \pi, \quad c_k = \rho + \gamma - b_k; \quad h_k = \rho + \gamma + b_k; \quad m_{\rho\gamma} = 1 + 2(\rho\gamma)^{0.25}. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Чтобы найти частоту отказов системы с резервом времени, представим (8.69) в виде

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = 1 - e^{-\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma} = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma} \left(1 - \sum_{k=0}^i \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \right).$$

Дифференцируя здесь по t_3 , согласно (8.12), получим частоту отказов:

$$a(t_3, t_p) = -\frac{\partial}{\partial t_3} P^{(0)}(t_3, t_p) = \lambda e^{-\rho-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho\gamma)^k}{(k!)^2} = \lambda e^{-\rho-\gamma} I_0(2\sqrt{\rho\gamma}). \quad (8.76)$$

Интенсивность отказов

$$\Lambda(t_3, t_p) = \frac{a(t_3, t_p)}{P^{(0)}(t_3, t_p)} = \lambda e^{-\gamma} I_0(2\sqrt{\rho\gamma}) / \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} I(k+1, \gamma) \right). \quad (8.77)$$

Плотность распределения суммарного времени простоя до выполнения задания (8.14) получается путем дифференцирования (8.73) по переменной t_p :

$$\varphi(t_3, t_p) = \mu e^{-\rho-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{k+1} \gamma^k}{k!(k+1)!} = \mu \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} e^{-\rho-\gamma} I_1(2\sqrt{\rho\gamma}); \quad (8.78)$$

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Плотность распределения суммарной наработки (8.15) легко получить, если использовать (8.95) и (8.78):

$$a_1(t_3, t_p) = \lambda e^{-\rho-\mu(t-t_3)} I_0(2\sqrt{\rho\mu(t-t_3)}) + \frac{\mu}{\lambda} \sqrt{\frac{\rho}{\mu(t-t_3)}} I_1(2\sqrt{\rho\mu(t-t_3)}). \quad (8.79)$$

Согласно (8.68), средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_0^{(0)}(t_p) = (1 + \mu t_p) / \lambda. \quad (8.80)$$

Поскольку для простейшего потока отказов $H(t_3) = \lambda t_3$, из (8.18) и (8.69) имеем:

$$\bar{T}_{\text{ин}}^{(0)}(t_3) = \frac{\lambda}{\mu} t_3; \quad \bar{T}_{\text{в.з}}^{(0)}(t_3) = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) t_3 = t_3 / K_r. \quad (8.81)$$

Разлагая (8.66a) по степеням ω и определяя коэффициент при $\omega^2/2$, найдем дисперсию:

$$DT_{\text{ин}}^{(0)}(t_3) = DT_{\text{в.з}}^{(0)}(t_3) = \frac{2\lambda}{\mu} t_3. \quad (8.82)$$

Среднее время выполнения задания определяется по формуле (8.81), если резерв времени таков, что задание выполняется до конца независимо от того, сколько времени для этого потребуется. При ограниченном оперативном времени необходимо учитывать, что в момент t выполнение задания прекращается. Тогда полезно оценить условное среднее:

$$\bar{T}_{\text{в.з}}^{(0)}(t_3, t_p | T_{\text{в.з}} < t_3) = t_3 + \int_0^{t_p} x dP^{(0)}(t_3, x) / P^{(0)}(t_3, t_p).$$

Подставляя сюда (8.73) и учитывая (8.76) и (8.78), находим:

$$\bar{T}_{\text{в.з}}^{(0)}(t_3, t_p | T_{\text{в.з}} < t_3) = \bar{T}_{\text{в.з}}^{(0)}(t_3) - \frac{a_1(t_3, t_3 + t_p)}{\mu P^{(0)}(t_3, t_p)} t_3.$$

Коэффициент полезного времени (8.19) находят по формуле

$$K_{\text{п.в}}(t_3) = K_r = \frac{\mu}{\mu + \lambda}. \quad (8.83)$$

В данном случае этот коэффициент постоянен и не зависит от t_3 . При определении коэффициента использования оперативного времени (8.20) учтем, что он равен 1 при $T_{\text{в.з}} \geq t$. Поэтому

$$K_{\text{п}}(t_3) = Q^{(0)}(t_3, t_p) + \int_0^{t_p} (t_3 + x) dP^{(0)}(t_3, x) / t_3 + t_3 P^{(0)}(t_3, 0) / t.$$

Отсюда получим:

$$K_{\Pi}(t_3) = Q^{(0)}(t_3, t_p) + \frac{t_3}{tK_r} P^{(0)}(t_3, t_p) - \frac{\rho}{\mu t} \left(I_0(2\sqrt{\rho\gamma}) + \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} I_1(2\sqrt{\rho\gamma}) \right).$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности (вероятность выполнения ожидаемого задания), используем формулы (8.63) и (8.74а):

$$\begin{aligned} P(t_3, t_p) &= K_r P^{(0)}(t_3, t_p) + (1 - K_r) P^{(1)}(t_3, t_p) = \\ &= P^{(0)}(t_3, t_p) - (1 - K_r) e^{-\rho - \gamma} I_0(2\sqrt{\rho\gamma}). \end{aligned} \quad (8.84)$$

Отсюда среднее время выполнения ожидаемой задачи

$$\bar{T}_{в.з}(t_3) = t_3 + \int_0^{\infty} Q^{(0)}(t_3, x) dx = \bar{T}_{в.з}^{(0)}(t_3) + \frac{\mu}{\lambda(\lambda + \mu)}. \quad (8.85)$$

Коэффициент готовности

$$K_r(t_p) = P(0, t_p) = 1 - (1 - K_r) \exp(-\mu t_p). \quad (8.86)$$

Обсудим полученные результаты. Расчеты по формулам (8.73)–(8.86) позволяют сделать следующие выводы:

1. Зависимость вероятности безотказной работы $P^{(0)}(t_3, t_p)$ от λt_3 при небольших значениях μt_p близка к экспоненциальной (рис. 8.2). Однако с увеличением резерва времени ее вид становится близким к виду зависимости ВБР от времени для систем со структурным резервом (см. рис. 7.4), а именно: обе кривые являются выпуклыми вверх, а не вниз, как в нерезервированной системе. Начальное значение частоты отказов $a(0, t_p) = \lambda \exp(-\mu t_p)$ убывает с ростом μt_p , но ни при каких μt_p не становится равным нулю, как это было в системе со структурным резервом. При малых μt_p частота отказов с ростом λt_3 монотонно убывает, но при больших $\rho = \lambda t_3$ функция $a(t_3, t_p)$ имеет модальное значение, большее нуля (рис. 8.3). Так, при $\gamma = \mu t_p = 3$ модальное значение $\rho_0 = 2,7$. Интенсивность отказов монотонно возрастает с ростом $\rho = \lambda t_3$, приближаясь асимптотически к интенсивности отказов нерезервированной системы λ , то есть система с непополняемым резервом времени стареет так же, как структурно резервированная система.
2. При увеличении μt_p вероятность выполнения задания возрастает и может быть доведена до сколь угодно близкого к единице уровня (рис. 8.4). Интенсивность отказов монотонно убывает и при сравнительно небольших $m_t = t_p / t_3$ снижается до уровня, достигаемого в системах со структурным резервом.
3. Если резерв времени создается за счет запаса производительности, то можно оценить, какой запас необходим для достижения уровня вероятности, представляющего практический интерес (0,9...0,99) с учетом реально существующего в АСОИУ соотношения $\lambda < \mu$. Расчеты показывают, что требуемый запас невелик: от нескольких процентов до 10–15%.
4. Если построить зависимость типа (8.5), то легко увидеть, что увеличение планового коэффициента использования оперативного интервала времени приводит к довольно быстрому уменьшению ВБР, причем тем более быстрому,

- чем больше λt (рис. 8.5). Ввиду резкой нелинейности зависимости ВБР от z следует очень тщательно подходить к нормированию фактической производительности $C_p = C_0 z$. Это можно сделать путем решения уравнения $P_3(z, t) = p$.
5. Одним из интересных свойств рассматриваемой системы является слабая зависимость коэффициента оперативной готовности системы от начального состояния и от коэффициента готовности элемента (рис. 8.6). Незначительным увеличением резерва времени удастся компенсировать существенную разницу в значениях K_r . Так, для $p = 0,95$ требуется резерв $t_p = 2 / \mu$ при $K_r = 0,95$, $t_p = 2,7 / \mu$ при $K_r = 0,7$ и $t_p = 3,2 / \mu$ при $K_r = 0,6$.
6. При фиксированной приведенной кратности резерва времени $\bar{m}_i = m_i / \beta$, $\beta = \lambda / \mu$, зависимость вероятности отказа системы с резервом времени (вероятности невыполнения задания) от $\rho = \lambda t_3$ является монотонно возрастающей функцией только при малых $\bar{m}_i$ ($\bar{m}_i < 1$). С увеличением $\bar{m}_i$ монотонность нарушается: вероятность сначала растет, достигая максимума при некотором $\rho = \rho^*$, а затем начинает убывать, асимптотически приближаясь к нулю (рис. 8.7). Такой эффект не наблюдается в системах со структурным резервом и объясняется тем, что с ростом ρ пропорционально растет и резерв времени. Для каждого $\bar{m}_i$ можно указать гарантированный уровень ВБР, ниже которого вероятность не опускается ни при каких t_3 . Так, при $\bar{m}_i = 5$, что соответствует резерву 5% от длительности задания при $\beta = \lambda / \mu = 0,01$, таким уровнем, достигаемым при $\rho^* = 0,2$, является $\rho_{\min} = 0,925$. Заметим, что постоянство приведенной кратности резервирования достигается всегда, когда непополняемый резерв времени создается за счет запаса производительности, а оперативный интервал времени растет пропорционально объему задания.

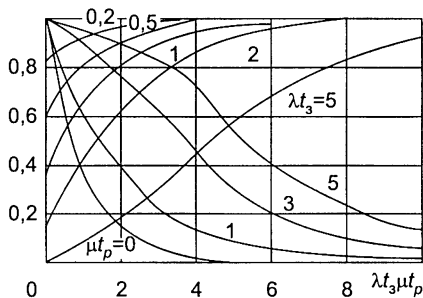


Рис. 8.2. Зависимость вероятности безотказной работы системы с непополняемым резервом времени от требуемой наработки и резерва времени

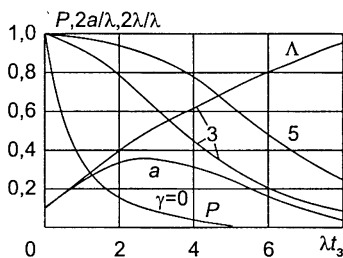


Рис. 8.3. Зависимость показателей надежности системы с непополняемым резервом времени от требуемой наработки

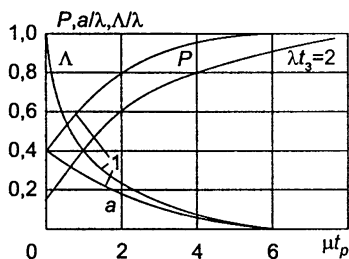


Рис. 8.4. Зависимость вероятности безотказной работы системы с непополняемым резервом времени от резерва времени

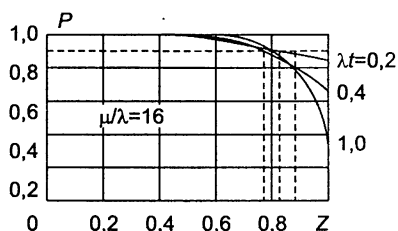


Рис. 8.5. Зависимость вероятности безотказной работы от планируемой фактической производительности системы

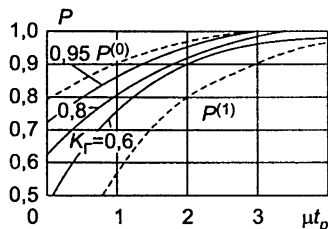


Рис. 8.6. Зависимость вероятности выполнения ожидаемого задания от резерва времени при различных значениях коэффициента готовности и заданных начальных состояниях системы

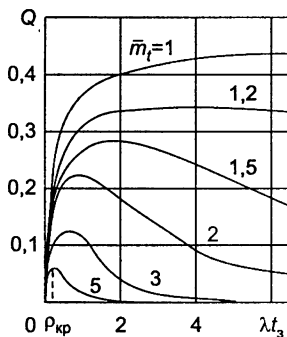


Рис. 8.7. Зависимость вероятности безотказной работы системы от требуемой наработки при фиксированной приведенной кратности временного резервирования

Пример 8.3. Для передачи массивов данных по информационной сети используется система передачи данных (СПД), включающая персональный компьютер, передающий модем с пропускной способностью 15,6 Кбайт/мин, коммутируемый канал связи, принимающий модем и сервер. Средняя наработка на отказ СПД равна $\bar{T}_{01} = 20$ ч, среднее время восстановления $\bar{T}_{в1} = 0,5$ ч. Для передачи некоторого объема данных требуется время $t = 3$ ч. Поскольку в течение этого времени ВБР $P(3) = \exp(-0,15) = 0,861$ недостаточно высока, предлагается рассмотреть два способа повышения надежности СПД: а) введение структурного дублирования; б) введение запаса производительности путем увеличения пропускной способности модемов вдвое — до 31,2 Кбайт/мин. Во втором случае предполагается, что интенсивность отказов СПД λ_2 и среднее время восстановления $\bar{T}_{в2}$ не изменяются при росте производительности. Необходимо: 1) сравнить оба способа повышения надежности и выбрать лучший; 2) определить значение λ_2 , при котором оба способа эквивалентны; 3) выбрать запас производительности $b = C_2/C_1$, при котором оба способа эквивалентны, если $\lambda_2 = \lambda_1$.

Решение. Расчет по формулам (7.28) и (7.61) при $\lambda = 0,05$ и $t = 3$ дает $P(t) = 0,993$. При двойном запасе производительности ($b = 2$) минимальное время выполнения задания $t_3 = 1,5$ ч, резерв времени $t_p = 1,5$ ч. Расчет по формуле (8.73) при $\rho = 0,075$ и $\gamma = 3$ дает $P^{(0)}(t_3, t_p) = 0,996$. Это значит, что двойной запас производительности лучше удвоения аппаратуры при дублировании, так как обеспечивает почти вдвое меньший риск срыва выполнения задания. Среднее время выполнения задания $\bar{T}_{в.з}(t_3) = 1,5(1 + 0,05/0,5) = 1,65$ ч. При пропорциональном увеличении интенсивности отказов $\lambda_2 = b\lambda_1 = 0,1$ ч⁻¹. Тогда $P^{(0)}(t_3, t_p) = 0,9914$, и среднее время выполнения задания $\bar{T}_{в.з}(t_3) = 1,5(1 + 0,1/0,5) = 1,8$ ч. В этом случае надо отдать предпочтение структурному дублированию. Если принять $\lambda_2 = a\lambda_1$ и рассчитать $P^{(0)}(t_3, t_p)$ как функцию a , то получим значение вероятности 0,993 при $a = 1,64$. Это значит, что система с резервом времени имеет преимущество при $\lambda_2 < 1,64 \lambda_1$. Если принять $\lambda t_3 = 0,15/b$, $\mu t_p = 6(1 - 1/b)$ и рассчитать $P^{(0)}(t_3, t_p)$ как функцию b , то получим значение вероятности 0,993 при $b = 1,6$. Это значит, что система с резервом времени приобретает преимущество при запасе производительности не менее 60%.

Рассмотрим теперь случай, когда минимальное время выполнения задания является случайной величиной с известным распределением $\Phi(t_3) = P\{T_{в.з} < t_3\}$. Если для выполнения этого задания выделен оперативный интервал t , то для оценки надежности системы надо использовать вероятность типа (8.2), в которой первый аргумент становится случайной величиной.

Чтобы найти вероятность выполнения задания, используем формулу (8.72) и представим искомую вероятность в виде

$$P_1^{(0)*}(t_3, \omega) = e^{-\omega t_3} P^{(0)*}(t_3, \omega) = \exp(-t_3(\omega + \lambda - \lambda f_b(\omega))). \quad (8.87)$$

Рандомизируя функцию (8.87) по плотности распределения $\Phi(t_3)$, получим:

$$P_1^{(0)*}(\omega) = \int_0^{\infty} P_1^{(0)*}(t_3, \omega) d\Phi(t_3) = \Phi^*(\omega + \lambda - \lambda f_b(\omega)), \quad (8.88)$$

где $\Phi^*(\omega)$ — изображение функции $\Phi(t_3)$ по Лапласу—Стилтьесу. При экспоненциальных распределениях $F_b(t)$ и $\Phi(t) = 1 - \exp(-\nu t)$ функция (8.88) приобретает вид

$$P_1^{(0)*}(\omega) = \frac{\nu(\omega + \mu)}{\omega^2 + \omega(\lambda + \mu + \nu) + \nu\mu}.$$

Отсюда

$$P_1^{(0)}(t, \nu) = 1 - \frac{\omega_2 - \nu}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_1 t} + \frac{\omega_1 - \nu}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\omega_2 t}; \quad \omega_{1,2} = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} \mp \sqrt{\frac{(\lambda + \mu + \nu)^2}{4} - \nu\mu}.$$

Среднее значение и дисперсия времени выполнения задания

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\text{в.з}}(\nu) &= \int_0^\infty \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) t_3 d\Phi(t_3) = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \varphi_1; \\ DT_{\text{в.з}} &= \beta^2 DT_3 + \frac{2\beta}{\mu} \varphi_1; \quad \varphi_1 = \int_0^\infty x d\Phi(x). \end{aligned} \quad (8.89)$$

Сравнивая (8.89) с (8.81) и (8.82), видим, что при $\varphi_1 = t_3$ переход от постоянной длительности задания к случайной не меняет среднее время выполнения задания, но увеличивает дисперсию, хотя и незначительно, если учесть, что в реальных системах $\beta < 1$.

8.3.2. Последовательная система с необесценивающими отказами

Система состоит из n последовательно соединенных элементов с интенсивностью отказов λ_i и распределением времени восстановления $F_{\text{в}i}(t)$, $i = 1 \dots n$. Во время восстановления работоспособные элементы выключаются и поэтому не отказывают. Вероятность выполнения задания удовлетворяет интегральному уравнению

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = P(t_3) + \sum_{i=1}^n \int_0^{t_3} \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx \int_0^{t_p - y} P^{(0)}(t_3 - x, t_p - y) dF_{\text{в}i}(y), \quad (8.90)$$

где $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $P(t_3) = \exp(-\lambda t_3)$. Двойное операционное преобразование Лапласа – Карсона в (8.90) позволяет найти изображение

$$P^{(0)**}(s, \omega) = \frac{s}{s + \lambda} \left/ \left(1 - \frac{1}{s + \lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\text{в}i}(\omega) \right) \right. \quad (8.91)$$

Если обозначить $f_{\text{в}}(\omega) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\text{в}i}(\omega)$, то система сводится к одному эквивалентному элементу с характеристиками λ и $f_{\text{в}}(\omega)$, а (8.91) приобретает вид

$$P^{(0)**}(s, \omega) = \frac{s}{s + \lambda(1 - f_{\text{в}}(\omega))} \quad (8.92)$$

и совпадает с (8.71). Функция $f_{\text{в}}(\omega)$ является изображением функции распределения времени восстановления работоспособности системы $F_{\text{в}}(t)$. Решение (8.92)

имеет вид (8.60), где $p_k(t_{\alpha})$ определяется по формуле (8.74), а $F_{nk}(t)$ есть $(k-1)$ -кратная свертка распределения $F_0(t)$. Таким образом,

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = e^{-\rho} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} F_{bk}(t_p) \right), \quad F_{bk}(t_p) = (F_b(t_p))^k, \quad \rho = \lambda t_3.$$

Если $F_{\text{в}}(t) = 1 - \exp(-\mu_1 t)$, то $F_{\text{в}}(t)$ является гиперэкспоненциальным распределением

$$F_{\text{B}}(t) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\mu_i t}. \quad (8.93)$$

Свертка этого распределения может быть найдена с помощью численной процедуры. Для системы с распределением (8.93) возможна двусторонняя оценка точного значения вероятности с помощью следующих неравенств:

$$P^{(0)}(\rho, \gamma) \leq P^{(0)}(t_3, t_p) \leq e^{-\rho(1-k)} P^{(0)}(k\rho, \gamma_1); \quad \rho = \lambda t_3; \quad \gamma = -\ln(1 - F_b(t_p));$$

$$k = \frac{t_p F'_b(0)}{\gamma_1}; \quad F'_b(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda}; \quad \gamma_1 = a(1 - \exp(-\gamma_1)); \quad a = \frac{t_p F'_a(0)}{F_b(t_p)}. \quad (8.94)$$

Здесь γ_1 — решение трансцендентного уравнения, а вероятности $P^{(0)}(t_s, t_p)$ находят по формулам (8.73) или (8.75).

Средняя наработка до отказа определяется по формуле (8.68). Однако из-за трудности нахождения многократной свертки и здесь можно использовать двусторонние приближения с помощью формулы

$$1 + \gamma \leq \lambda \bar{T}_0(t_n) \leq (1 - ke^{-(1-k)\gamma_1}) / (1 - k). \quad (8.95)$$

Верхнее приближение здесь получается следующим образом. Выполним двойное преобразование Лапласа—Карсона в верхнем приближении (8.94):

$$\bar{P}^{(0)}(s, \omega) = \frac{s(\omega + \mu_1)}{(\lambda + s)(\omega + \mu_1) - k\lambda\mu_1}, \quad \mu_1 = \gamma_1 / t_p.$$

Теперь с помощью (8.68) находим:

$$\bar{T}_0^{(0)*}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P^{(0)**}(s, \omega) = \frac{1}{\lambda} \frac{\omega + \mu_1}{\omega + \mu_1(1-k)}.$$

Отсюда после обратного преобразования получим правую часть (8.95).

Среднее время выполнения задания находим с помощью (8.69):

$$\bar{T}_{b,3}(t_3) = t_3 + \bar{T}_b H(t_3) = t_3(1 + \lambda \bar{T}_b) = t_3(1 + \beta), \quad \beta = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Аналогично находим дисперсию:

$$DT_{B,3}(t_3) = DT_{H,11}(t_3) = 2t_3 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Согласно (8.64), коэффициент готовности системы

$$K_r(t_p) = 1 - \sum_{i=1}^n \beta_i e^{-\mu_i t_p} / (1 + \beta), \quad \beta_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

В некоторых случаях и при неэкспоненциальных распределениях наработки удастся свести систему к одному эквивалентному элементу. Так, при распределении Вейбулла $F_i(t) = 1 - \exp(-(\lambda_i t)^m)$ интегральное уравнение имеет вид

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n (\lambda_i t_3)^m\right) + \\ + \int_0^{t_3} \int_0^{t_p} \sum_{i=1}^n \lambda_i^m x^{m-1} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i^m x^m\right) P^{(0)}(t_3 - x, t_p - y) dF_{w_i}(y) dx.$$

Если ввести параметр $\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^m\right)^{1/m}$, то уравнение приобретает вид

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = \exp(-(\lambda t_3)^m) + \int_0^{t_3} \int_0^{t_p} \lambda^m x^{m-1} \exp(-(\lambda x)^m) P^{(0)}(t_3 - x, t_p - y) dF_w(y) dx,$$

где $F_w(y) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i / \lambda)^m F_{w_i}(y)$. Далее надо использовать формулу (8.60), в которой $p_k(t_3) = F_k(t) - F_{k+1}(t)$, $F_k(t) - (k-1)$ — кратная свертка распределения $F(t) = 1 - \exp(-(\lambda t)^m)$. Операцию свертки выполняют численно. Аналогично, к эквивалентному элементу последовательная система может быть сведена и при гамма-распределении наработки. Тогда плотность распределения наработки и распределение времени восстановления имеют вид

$$f(t) = F'(t) = \frac{\lambda^m t^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{-\lambda t}; \quad F_w(t) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i / \lambda)^m F_{w_i}(y); \quad \lambda = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^m\right)^{1/m}.$$

Далее используем формулу (8.60), в которой

$$p_k(t_3) = \int_0^{t_3} \lambda^{mk} x^{mk-1} \left(\frac{1}{\Gamma(mk)} - \frac{(\lambda x)^m}{\Gamma(mk+m)} \right) e^{-\lambda x} dx.$$

Свертку функции $F_w(t)$ по-прежнему находят численно.

Если распределения $F(t)$ и $F_w(t)$ относятся к классу УСФИ (с убывающей в среднем функцией интенсивности), причем $F'(t) = F'_w(t) = \infty$ (что имеет место при параметре $m < 1$), то можно использовать двусторонние оценки

$$1 - F(t_3)(1 - F_w(t_p))^{1-F(t_3)} \leq P^{(0)}(t_3, t_p) \leq (1 - F(t_3))^{1-F_w(t_p)}.$$

Наиболее просто найти оценки в классе распределений Вейбулла (WW11). Тогда

$$1 - F(t_3) = \exp(-(\lambda t_3)^{m_1}); \quad 1 - F_w(t_p) = \exp(-(\mu t_p)^{m_2}).$$

Прочие характеристики находят по общим формулам. В частности, коэффициент готовности системы $EE11$

$$K_r(t_p) = \left(\bar{T}_0 + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^m I(j, \mu t_p) \right) / (\bar{T}_0 + \bar{T}_w); \quad \bar{T}_0 = k / \lambda; \quad \bar{T}_w = m / \mu.$$

Для системы WE11 имеем:

$$K_r(t_p) = \left(\bar{T}_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^k \frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^m I(j, \mu t_p) \right) / (\bar{T}_0 + \bar{T}_v);$$
$$\bar{T}_0 = \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right) / \lambda; \quad \bar{T}_v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^k \frac{m}{\mu_i}.$$

При $k = m = 1$ отсюда как частный случай получим формулы для марковской модели.

8.3.3. Восстанавливаемый элемент с обесценивающими отказами

Система с обесценивающими отказами отличается от системы, рассмотренной в 8.3.1, только тем, что здесь каждый отказ или сбой, произошедший до получения требуемой наработки, обесценивает результаты уже проделанной работы, и поэтому полезная наработка становится равной нулю, а непроизводительные потери времени скачком увеличиваются на величину обесцененной наработки (рис. 8.8). Далее резерв времени расходуется пропорционально только времени восстановления, и если резерв времени не будет израсходован до восстановления работоспособности, то система вновь приступает к выполнению задания в том же объеме, но имея резерв времени, меньший на величину обесцененной наработки и времени восстановления.

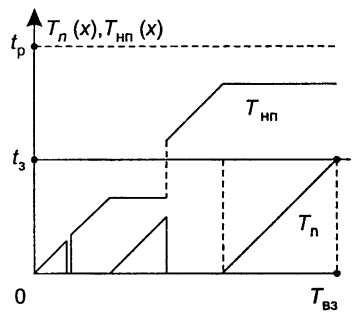


Рис. 8.8. Диаграмма изменения полезной наработки и непроизводительного времени в системе с полным обесцениванием наработки при отказах

Составим уравнение для вероятности выполнения задания, полагая, что в начальный момент времени элемент работоспособен, а наработка между отказами и время восстановления имеют распределения $F(t)$ и $F_v(t)$ соответственно. Система может выполнить задание двумя несовместными способами: либо элемент проработает безотказно в течение времени t_3 , либо он откажет в момент $x < \min(t_3, t_p)$ и в оставшееся время выполнит требуемый объем работ, имея резерв времени $t_3 - x$ и начиная функционирование в неработоспособном состоянии. Поэтому

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = 1 - F(t_3) + \int_0^{\min(t_3, t_p)} P^{(1)}(t_3, t_p - x) dF(x). \tag{8.96}$$

Второе уравнение для $P^{(1)}(t_3, t_p)$ совпадает с (8.55). Проведем в (8.96) преобразование Лапласа — Карсона по переменной t_p :

$$P^{(0)*}(t_3, \omega) = 1 - F(t_3) + \int_0^{t_3} e^{-\omega t_p} \int_0^{t_p} P^{(1)}(t_3, t_p - x) dF(x) dt_p + \\ + \int_{t_3}^{\infty} e^{-\omega t_p} \int_0^{t_3} P^{(1)}(t_3, t_p - x) dF(x) dt_p.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, объединяя оба интеграла в один с пределами внутреннего интегрирования от x до ∞ и делая замену переменных $y = t_3 - x$, получим:

$$P^{(0)*}(t_3, \omega) = 1 - F(t_3) + P^{(1)*}(t_3, \omega) f(t_3, \omega); \quad f(t_3, \omega) = \int_0^{t_3} e^{-\omega x} dF(x). \quad (8.97)$$

Из (8.97) и (8.66) находим:

$$P^{(0)*}(t_3, \omega) = (1 - F(t_3)) / (1 - f_n(\omega) f(t_3, \omega)). \quad (8.98)$$

После подстановки сюда явных выражений $f_n(\omega)$ и $f(t_3, \omega)$ надо выполнить обратное преобразование Лапласа—Карсона. Из (8.98) находим среднее непроизводительное время:

$$\bar{T}_{\text{ин}}(t_3) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} (1 - P^{(0)*}(t_3, \omega)) = \frac{\bar{T}_B F(t_3) + \bar{T}_0(t_3)}{1 - F(t_3)}; \quad \bar{T}_0(t_3) = \int_0^{t_3} x dF(x). \quad (8.99)$$

Далее рассмотрим случай экспоненциальных распределений:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad F_B(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Тогда из (8.98) имеем:

$$P^{(0)*}(t_3, \omega) = \frac{(1+a)e^{-\rho}}{1 + ae^{-\rho - \omega t_3}}, \quad \rho = \lambda t_3, \quad a = \frac{\lambda \mu}{\omega(\omega + \lambda + \mu)}. \quad (8.100)$$

Разлагая (8.100) по степеням a и выполняя обратное преобразование, получим:

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = \sum_{i=0}^{\left[t_p / t_3 \right]} e^{-(i+\rho)} (A_i(t_p - it_3) - A_{i+1}(t_p - it_3)), \quad A_0 = 1; \\ A_i(t) = C_{2i-1}^i (pq)^i + \sum_{j=0}^{i-1} C_{i+j-1}^j C_{i-1}^j \frac{j!}{i!} p^i q^j (\lambda t)^{i-1-j} \times \\ \times (i(-1)^{i-j} / (i-j)\lambda t - (i+j)qe^{-(\lambda+\mu)t}), \quad p = 1 - q = \mu / (\lambda + \mu). \quad (8.101)$$

Здесь $[x]$ — целая часть x . В частности, имеем

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = e^{-\rho} (1 - A_1(t_p)), \quad A_1\left(\frac{x}{\lambda + \mu}\right) = pq(1 - x - e^{-x}), \quad t_p \leq t_3; \\ P^{(0)}(t_3, t_p) = e^{-\rho} (1 - A_1(t_p)) + e^{-2\rho} (A_1(t_p - t_3) - A_2(t_p - t_3)), \quad t_3 \leq t_p \leq 2t_3;$$

$$A_2\left(\frac{x}{\lambda + \mu}\right) = (pq)^2(x^2 / 2 - 2x + 3 - (3+x)e^{-x}).$$

Используя (8.99) и (8.100), найдем среднее значение и дисперсию непроизводительного времени и времени выполнения задания:

$$\begin{aligned}\bar{T}_{в.з}(t_3) &= t_3 + \bar{T}_{ин}(t_3) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_в)(e^{-\rho} - 1), \quad \bar{T}_0 = 1/\lambda, \quad \bar{T}_в = 1/\mu; \\ DT_{в.з}(t_3) &= DT_{ин}(t_3) = \bar{T}_{в.з}^2(t_3) + (e^{-\rho} - 1)(\beta_2 + 2\bar{T}_0\bar{T}_в) + \\ &\quad + 2\bar{T}_0^2(e^{-\rho} - 1 - \rho e^{-\rho}) - 2t_3\bar{T}_в e^{-\rho},\end{aligned}\quad (8.102)$$

где $\beta_2 = 2/\mu^2$ — второй начальный момент распределения $F_в(t)$. Формулы (8.102) верны и при произвольном распределении $F_в(t)$.

Коэффициент полезного времени (8.19) рассчитывают по формуле

$$K_{п.в}(t_3) = \frac{\rho}{(1 + \lambda\bar{T}_в)(e^{-\rho} - 1)} = K_r \frac{\rho}{e^{-\rho} - 1} < K_r.$$

При небольших λt_3 коэффициент полезного времени близок к коэффициенту готовности. Однако при больших λt_3 он существенно меньше из-за обесцененной наработки. Так, при $\rho = 0,5$ он равен $0,77K_r$, а при $\rho = 1$ равен $0,59K_r$.

В случае сбоев (отказов с мгновенным восстановлением) $\bar{T}_в = \beta_2 = 0$ и формулы упрощаются:

$$\begin{aligned}P^{(0)}(t_3, t_p) &= \sum_{i=0}^{\lfloor t_p/t_3 \rfloor} (-1)^i e^{-(i+1)\rho} (A_i(\gamma - i\rho) + A_{i+1}(\gamma - i\rho)); \\ A_i(\gamma) &= \frac{\gamma^i}{i!}, \quad \rho = \lambda t_3, \\ \bar{T}_{в.з}(t_3) &= (e^{-\rho} - 1)/\lambda; \quad DT_{в.з}(t_3) = ((e^{-\rho} - 1)^2 + 2(e^{-\rho} - 1 - \rho))/\lambda^2, \quad \gamma = \lambda t_p.\end{aligned}\quad (8.103)$$

При $t_p < t_3$ функция вероятности принимает вид

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = (1 + \lambda t_p)e^{-\lambda t_3}, \quad t_p \leq t_3. \quad (8.104)$$

При дублировании времени ($t_p = t_3$) эта формула совпадает с соответствующей формулой для невозстанавливаемой системы с ненагруженным структурным дублированием (см. (6.25)).

Частоту отказов $a(t_3, t_p)$ получают путем дифференцирования по t_3 в формулах (8.101) или (8.103). Интенсивность отказов $\Lambda(t_3, t_p)$ находят по общей формуле (8.13).

Зависимости $P^{(0)}(t_3, t_p)$, $a(t_3, t_p)$ и $\Lambda(t_3, t_p)$ от длительности задания и резерва времени приведены на рис. 8.9 и 8.10.

Из графиков видно, что частота отказов при $t_3 = t_p$ имеет скачок, равный $\lambda \exp(2\lambda t_p)$ и разделяющий функцию на два непрерывных участка. На первом участке вид зависимости качественно такой же, как при структурном резервировании, то есть

функция начинается в точке $a(0, t_p) = \lambda \exp(-\mu t_p)$, возрастает со временем, достигая максимума в точке t_3 и затем уменьшается до точки $t_{3,0} = \ln(1 + \lambda t_p) / \lambda$. На втором участке функция имеет вид смещенной экспоненты $\lambda \exp(-\lambda(t_3 - t_{3,0}))$. Интенсивность отказов на первом участке является возрастающей функцией времени, достигая при $t_p = t_3$ значения $\lambda(1 - \exp(p)) / (1 + p)$, а затем скачком увеличивается до значения интенсивности отказов нерезервированной системы. Однако это не означает, что на втором участке нет выигрыша в надежности по вероятности отказа (см. рис. 8.9). Такой выигрыш получается за счет меньшей интенсивности отказов на первом участке. Однако наибольший выигрыш имеет место при небольших t_3 на первом участке.

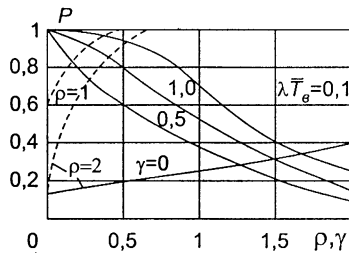


Рис. 8.9. Зависимость вероятности выполнения задания от длительности задания и резерва времени ($\lambda \bar{T}_e = 0,1$) (— обесценивающие отказы, --- необесценивающие отказы)

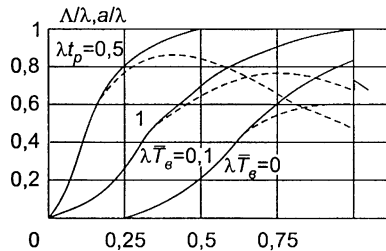


Рис. 8.10. Зависимость частоты и интенсивности отказов от времени ($\lambda \bar{T}_e = 0,1$, $\lambda t_p = 1$)

Пример 8.4. В системе, рассмотренной в примере 8.3, процесс передачи данных нарушается потоками сбоев интенсивностью $\lambda = 0,05 \text{ ч}^{-1}$ с обесцениванием наработки. Найти вероятность и среднее время выполнения задания для двух вариантов резервирования — структурного и временного, — полагая, что защита от сбоев отсутствует.

Решение. Если задание выполняется параллельно двумя устройствами и первый же сбой каждого из них приводит к срыву задания, то вероятность выполнения задания необходимо рассчитывать по формуле $P(t) = 1 - (1 - \exp(-0,05 \cdot 3))^2 = 0,9806$. При быстродействующем модеме с пропускной способностью $c_2 = 2c_1$ возникает резерв времени $t_p = t_3 = 1,5 \text{ ч}$. Тогда, согласно (8.104), $P(t_3, t_3) = 1,075 \exp(-0,075) = 0,9973$. При $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 0,1 \text{ ч}^{-1}$ и $c_2 = 2c_1$ вероятность $P(t_3, t_3) = 0,9898$. Это по-прежнему больше, чем при структурном дублировании, то есть удвоение оперативного

времени эффективнее удвоения аппаратуры. Из уравнения $(1 + \lambda_2 t_3) \exp(-\lambda_2 t_3) = 0,9806$ находим значение интенсивности отказов быстродействующего СПД, при котором вероятность выполнения задания в сравниваемых системах одинаковы: $\lambda_2 = 2,81\lambda_1 = 0,14 \text{ ч}^{-1}$. При $\lambda_2 = \lambda_1$ значение запаса производительности, при котором вероятности выполнения задания одинаковы в сравниваемых системах, находят так. Сначала находят решение уравнения $(1 + \lambda_1 t_p) \exp(-\lambda_1 (t - t_p)) = 1 - (1 - \exp(-\lambda_1 t))^2 = 0,9806$. Отсюда при $\lambda_1 t = 0,15$ имеем $\lambda_1 t_p = 0,0663$. Теперь вычислим $c_2 = (\lambda_1 t / (\lambda_1 t - \lambda_1 t_p)) c_1 = (0,15 / (0,15 - 0,0663)) c_1 = 1,792 c_1$. Среднее время выполнения задания $\bar{T}_{в.з} = 1,56 \text{ ч}$ при $c_2 = 2c_1$ и $\lambda_2 = \lambda_1$; $\bar{T}_{в.з} = 3,24 \text{ ч}$ при $c_2 = 2c_1$ и $\lambda_2 = \lambda_1$; $\bar{T}_{в.з} = 4,7 \text{ ч}$ при $c_2 = 2c_1$ и $\lambda_2 = 2,81\lambda_1$; $\bar{T}_{в.з} = 1,75 \text{ ч}$ при $c_2 = 1,79c_1$ и $\lambda_2 = \lambda_1$. Удвоение и утроение времени выполнения задания по сравнению с минимальным значением свидетельствует о низкой эффективности использования резерва времени при отсутствии защиты от обесценивания наработки.

Чтобы уменьшить потери времени на повторение работ, обесцененных отказами и сбоями, применяют разбиение задания на участки (этапы) приблизительно равной длительности. Точки на границах этапов являются опорными точками, позволяющими в случае отказа или сбоя восстановить процесс в промежуточной точке в начале текущего этапа. При наличии опорных точек отказ обесценивает лишь результаты выполнения текущего этапа. Результаты же выполнения предыдущих этапов сохраняются. Задание считается выполненным, если выполнены все его этапы (рис. 8.11).

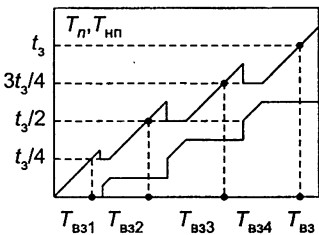


Рис. 8.11. Диаграмма изменения полезной наработки и непроизводительного времени при многоэтапном задании

При идеальном контроле работоспособности время выполнения задания является суммой интервалов выполнения отдельных этапов:

$$T_{в.з}(t_3) = \sum_{i=1}^n T_{в.зi}(\tau_i); \quad \sum_{i=1}^n \tau_i = t_3.$$

Рассмотрим далее случай, когда в системе имеется простейший поток обесценивающих отказов интенсивностью λ . Тогда вероятность выполнения одного этапа длительностью $\tau = t_3/n$ за время t находят по формуле

$$P_1^{(0)}\left(\frac{t_3}{n}, t\right) = P^{(0)}\left(\frac{t_3}{n}, t - t_3/n\right). \tag{8.105}$$

Выполняя здесь преобразование Карсона по переменной t и используя теорему смещения операционного преобразования, получим:

$$P_1^{(0)*}(t_3 / n, \omega) = P^{(0)*}(t_3 / n, \omega) e^{-\omega t_3 / n}. \quad (8.106)$$

Подставляя в (8.106) формулу (8.98), найдем:

$$P_1^{(0)*}(t_3 / n, \omega) = \frac{\exp(-(\omega + \lambda)t_3 / n)}{1 - \lambda f_b(\omega)(1 - \exp(-(\lambda + \omega)t_3 / n)) / (\lambda + \omega)}.$$

Выполняя свертку распределений (8.105) и переходя вновь от t к t_p , получим:

$$\begin{aligned} P^{(0)*}(t_3, \omega, n) &= e^{\omega t_3} P_1^{(0)*}(t_3, \omega, n) = e^{\omega t_3} (P_1^{(0)*}(t_3 / n, \omega))^n = \\ &= e^{-\lambda t_3} (1 - \lambda f_b(\omega))(1 - \exp(-(\lambda + \omega)t_3 / n)) / (\lambda + \omega)^{-n}. \end{aligned} \quad (8.107)$$

При экспоненциальном распределении времени восстановления

$$P^{(0)*}(t_3, \omega, n) = \frac{(1 + a)^n \exp(-\omega t_3)}{(1 + a \exp(-(\lambda + \omega)t_3 / n))^n}, \quad (8.108)$$

где $a = \lambda \mu / \omega(\lambda + \mu + \omega)$. Разлагая здесь дробь в ряд по степеням экспоненты и выполняя обратное преобразование, находим:

$$P^{(0)}(t_3, t_p, n) = e^{-\rho} \sum_{i=0}^{\left[\frac{m_p}{t_3} \right]} (-1)^i e^{-i\rho/n} C_{n+i-1}^i \sum_{j=0}^n C_n^j A_{i+j}(t_p - it_3 / n), \quad (8.109)$$

где $A_k(t_p)$ — оригинал функции $a^k(\omega)$. В случае сбоев $A_k(t_p)$ определяется по формуле $A_k(t_p) = (\lambda t_p)^k / k!$. Чтобы получить среднее значение и дисперсию времени выполнения задания, надо разложить функцию (8.107) или (8.108) по степеням ω и выделить коэффициенты при ω и $\omega^2 / 2$:

$$\bar{T}_{в.з}(t_3, n) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_b)(e^{\lambda t_3 / n} - 1) = n \bar{T}_{в.з}(t_3 / n); \quad (8.110)$$

$$DT_{в.з}(t_3, n) = n \bar{T}_{в.з}(t_3 / n) + n DT_{в.з}(t_3 / n), \quad (8.111)$$

где $\bar{T}_{в.з}(t_p/n)$ и $DT_{в.з}(t_p/n)$ берут из формулы (8.102).

Расчеты по формулам (8.109) и (8.110) показывают, что показатели надежности существенно зависят от количества этапов задания. Если разбиение на этапы не вызывает увеличения длительности задания, то любое увеличение n желательно, так как уменьшает суммарную обесцененную наработку. В пределе при $n \rightarrow \infty$ формулы (8.109) и (8.110) совпадают с соответствующими формулами для систем с необесценивающими отказами.

Если при разбиении задания на этапы для фиксации результатов и состояния системы после выполнения очередного этапа затрачивается время t_k , не зависящее от t_3 и n , то при увеличении n наряду с сокращением обесцененной наработки увеличивается длительность задания на величину nt_k . Поэтому можно определить оптимальное разбиение задания на этапы и оптимальную длительность одного этапа. Чтобы найти оптимальное число этапов n_0 , заменим в (8.110)

t_3 на $t_3 + nt_k$, продифференцируем $\bar{T}_{\text{в.з}}(t_3/n)$ по параметру n и приравняем производную к нулю:

$$\frac{\partial}{\partial n} \bar{T}_{\text{в.з}}(t_3, n) = (\bar{T}_0 + \bar{T}_{\text{в}})(\exp(\lambda^*(t_3/n + t_k)(1 - \lambda t_3/n) - 1)) = 0. \tag{8.112}$$

Это трансцендентное уравнение не удастся решить точно аналитически. Однако при $\lambda t_3/n < 1$ можно получить приближенное решение. Для этого разложим (8.112) по степеням показателя экспоненты $\lambda t_3/n$ и отбросим члены порядка малости $(\lambda t_3/n)^3$ и выше. Полученное при этом квадратное уравнение имеет решение

$$n_0 = \lambda t_3 / \sqrt{2(\exp(\lambda t_k) - 1)} \approx \lambda t_3 / \sqrt{2\lambda t_k}.$$

Оптимальная длительность этапа

$$\tau_0 = t_3 / n_0 = \sqrt{2t_k / \lambda} = \sqrt{2(e^\gamma - 1)} / \lambda.$$

Среднее время выполнения задания при оптимальном разбиении

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\text{в.з}}(t_3, t_k, n_0) &= n_0(\bar{T}_0 + T_{\text{в}})(e^{\lambda \tau_0} - 1) = \frac{\lambda t_3(\bar{T}_0 + T_{\text{в}})}{\sqrt{2(\exp(\lambda t_k) - 1)}} (e^{\sqrt{2(\exp(\lambda t_k) - 1)}} - 1) = \\ &= \lambda t_3(\bar{T}_0 + \bar{T}_{\text{в}})f(t_k). \end{aligned}$$

Если для каждого t_3 выбирать оптимальную длительность этапа, то среднее растёт не экспоненциально с ростом t_3 , согласно (8.110), а линейно. При $f(t_k) < \exp(\lambda t_3)$ выполняется неравенство $\bar{T}_{\text{в.з}}(n) < \bar{T}_{\text{в.з}}(1)$, то есть разбиение на этапы желательно. При $f(t_k) < \exp(\lambda t_3)$ разбиение на этапы уменьшает среднее время выполнения задания лишь при $t_3 > t_3^*$, где t_3^* — корень уравнения $\exp(\lambda t_3) - 1 = \lambda t_3 f(t_k)$.

Пример 8.5. В системе, рассмотренной в примере 8.4, задача разбивается на три равных этапа. Необходимо найти вероятность и среднее время выполнения задания СПД повышенной производительности для двух случаев: 1) $c_2 = 1,79c_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$; 2) $c_2 = 2c_1$, $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Решение. При $n = 3$ формула (8.109) имеет вид

$$\begin{aligned} P^{(0)}(t_3, t_p) &= e^{-\rho} \sum_{i=0}^3 C_3^i \frac{\gamma^i}{i!} - 3e^{-4\rho/3} \sum_{i=0}^3 C_3^i \frac{\gamma_1^{i+1}}{(i+1)!} + 6e^{-5\rho/3} \sum_{i=0}^3 C_3^i \frac{\gamma_2^{i+2}}{(i+2)!} = \\ &= e^{-\rho} \sum_{i=0}^3 C_3^i \left(\frac{\gamma^i}{i!} - 3e^{-\rho/3} \frac{\gamma_1^{i+1}}{(i+1)!} + 6e^{-2\rho/3} \frac{\gamma_2^{i+2}}{(i+2)!} \right), \quad \gamma_1 = \gamma - \frac{\rho}{3}, \quad \gamma_2 = \gamma - \frac{2\rho}{3}, \quad \gamma = \lambda t_p. \end{aligned}$$

При $\lambda_2 = \lambda_1$ и $c_2 = 1,79c_1$ параметры $\rho = 0,0838$, $\gamma = 0,0663$, а показатели надёжности $P^{(0)}(t_3, t_p) = 0,999985$, $\bar{T}_{\text{в.з}} = 1,7$ ч, $\bar{T}_{\text{ин}} = \bar{T}_{\text{в.з}} - t_3 = 1,42$ мин. При $\lambda_2 = 2\lambda_1$ и $c_2 = 2c_1$ имеем: $\rho = \gamma = 0,15$, $P^{(0)}(t_3, t_p) = 0,9999953$, $\bar{T}_{\text{в.з}} = 1,538$ ч, $\bar{T}_{\text{ин}} = 2,3$ мин. Как видим при сравнении вариантов, первый вариант немного уступает второму варианту по критерию вероятности выполнения задания (риск отказа больше в 3,7 раза) и по критерию $\bar{T}_{\text{в.з}}$ (больше на 10,5%), но лучше по критерию $\bar{T}_{\text{ин}}$ (меньше в 1,62 раза).

8.3.4. Система с периодическим контролем работоспособности

В рассмотренных ранее системах предполагалось, что отказы либо проявляются явно, либо гарантированно обнаруживаются системой непрерывного встроенного контроля в момент их возникновения. Пусть теперь система имеет только скрытые отказы, для обнаружения которых используется периодический программный или аппаратурный контроль [4], [6].

Периодический программный контроль

Работа системы нарушается потоком сбоев интенсивностью λ . Сбои обнаруживаются методом повторного счета. Задание разбивается на n равных этапов длительностью $\tau = t_z / n$. После первых двух просчетов каждого этапа в течение времени t_k проводятся анализ и сравнение результатов, а также подготовка к выполнению следующего этапа или повторению данного этапа. О выполнении этапа судят по совпадению результатов двух просчетов (не обязательно идущих подряд). После каждого дополнительного просчета на анализ и сравнение результатов затрачивается то же время t_k , что и после второго просчета.

Обозначим через $P_i(n\tau, t)$ вероятность безотказной работы (выполнения задания) при условии, что система в начальный момент приступила к выполнению первого этапа ($i = 1$), либо провела один успешный просчет первого этапа ($i = 2$), либо провела один просчет первого этапа, но из-за сбоя получила неверный результат ($i = 3$). Эти вероятности удовлетворяют системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} P_1(n\tau, t) &= p_1 P_2(n\tau, t - \tau) + q_1 P_3(n\tau, t - \tau); \\ P_2(n\tau, t) &= p_2 P_1((n-1)\tau, t - \tau - t_k) + q_2 P_2(n\tau, t - \tau - t_k); \\ P_3(n\tau, t) &= p_2 P_2(n\tau, t - \tau - t_k) + q_2 P_3(n\tau, t - \tau - t_k); \\ P_i(0, t) &= 1; \quad i = 1, 2, 3; \quad p_1 = \exp(-\lambda\tau); \quad p_2 = \exp(-\lambda\tau - \lambda t_k); \quad q_i = 1 - p_i. \end{aligned} \quad (8.113)$$

Преобразование Лапласа—Карсона по переменной t в (8.113) дает

$$\begin{aligned} P_1^*(n\tau, \omega) &= e^{-\omega\tau} (p_1 P_2^*(n\tau, \omega) + q_1 P_3^*(n\tau, \omega)); \\ P_2^*(n\tau, \omega) &= e^{-\omega(\tau+t_k)} (p_2 P_1^*((n-1)\tau, \omega) + q_2 P_2^*(n\tau, \omega)); \\ P_3^*(n\tau, \omega) &= e^{-\omega(\tau+t_k)} (p_2 P_2^*(n\tau, \omega) + q_2 P_3^*(n\tau, \omega)). \end{aligned}$$

Отсюда получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} P_1^*(n\tau, \omega) &= \pi(\omega) P_1^*((n-1)\tau, \omega); \\ \pi(\omega) &= e^{-(\lambda+\omega)(2\tau+t_k)} \frac{(1 - (1 - e^{-\lambda\tau})e^{-\omega(\tau+t_k)})}{(1 - q_2 e^{-\omega(\tau+t_k)})^2}. \end{aligned} \quad (8.114)$$

Понижая индекс n до нуля и учитывая начальные условия, получаем:

$$P_1^*(n\tau, \omega) = \pi^n(\omega). \quad (8.115)$$

Обратное преобразование проводим путем разложения (8.115) в ряд по степеням $\exp(-\omega(\tau + t_k))$ и перехода к оригиналу:

$$P_1(t_3, t) = e^{-2\rho - n\gamma} \left(1 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{nt_{p1}}{t_3 + nt_k} \right]} \sum_{i=0}^{\min(k, n)} C_n^i C_{2n+k-i-1}^{k-i} (e^{-\gamma} - 1)^i (1 - e^{-\rho/n - \gamma})^{k-i} \right), \quad (8.116)$$

где $\rho = \lambda t_3$, $\gamma = \lambda t_k$, $t_{p1} = t - 2t_3 - nt_k$. Если резерва времени t_{p1} достаточно для пересчета одного или двух этапов, то формула (8.116) приобретает вид

$$P_1(t_3, t) = e^{-2\rho - n\gamma} (1 + 2nq_2 - nq_0); \quad q_0 = 1 - \exp(-\gamma); \quad \theta \leq t_{p1} < 2\theta; \quad \theta = \tau + t_k;$$

$$P_1(t_3, t) = e^{-2\rho - n\gamma} (1 + 2nq_2 - nq_0 + C_{2n+1}^2 q_2^2 - 2n^2 q_0 q_2 + C_n^2 q_0^2); \quad 2\theta \leq t_{p1} < 3\theta.$$

Вероятность $P_1(t_3, t)$ достигает максимума, если путем подбора n и t_k удастся получить максимально возможное количество K дополнительных просчетов этапа за время t_{p1} . Это может служить основой для оптимизации длительности этапа. Решая уравнение

$$\frac{dK}{dn} = \frac{d}{dn} \left(\frac{t - 2t_3 - nt_k}{t_3 / n + t_k} \right) = 0,$$

найдем оптимальное количество этапов, оптимальную длительность одного этапа и максимальное количество дополнительных просчетов:

$$n_{01} = \frac{t_3 (\sqrt{m_t} - 1)}{t_k}; \quad \tau_{01} = \frac{t_k}{(\sqrt{m_t} - 1)}; \quad m_t = \frac{t_p}{t_3}; \quad t_p = t - t_3;$$

$$K_{\max} = \frac{(t - 2t_3 - n_{01}t_k)}{(t_k + t_3 / n_{01})} = \frac{(t - 2t_3 - t_3(\sqrt{m_t} - 1))}{t_k(1 + 1/(\sqrt{m_t} - 1))}.$$

Чтобы найти среднее время выполнения задания, получим производящую функцию распределения количества сбоев до выполнения задания. Для этого умножим (8.115) на $\exp(2\omega t_3 + n\omega t_k)$ и обозначим $z = \exp(-\omega\tau - \omega t_k)$. Тогда получим:

$$\Phi_1(n\tau, z) = \exp(-2\rho - n\gamma) \frac{(1 - zq_0)^n}{(1 - zq_2)^{2n}}.$$

Коэффициент при z^k в разложении $\Phi_1(n\tau, z)$ есть вероятность появления ровно k сбоев. Поэтому можно найти среднее значение и дисперсию случайного количества сбоев:

$$MK = \Phi'_1(n\tau, 1) = n(e^{n\theta} - e^\gamma - 1); \quad \theta = \frac{t_3}{n + t_k}; \quad \gamma = \lambda t_k; \quad (8.117)$$

$$DK = \Phi''_1(n\tau, 1) + \Phi'_1(n\tau, 1) - (\Phi'_1(n\tau, 1))^2 = n(2e^{\lambda\theta}(e^{n\theta} - 1) - e^\gamma(e^\gamma - 1)).$$

Поскольку $T_{n,3} = 2\omega t_3 + nt_k + K\theta$, найдем:

$$\bar{T}_{n,3}(t_3) = 2t_3 + nt_k + \theta MK = t_3 + (t_3 + nt_k)(2e^{\rho/n} - 1)e^\gamma;$$

$$DT_{n,3}(t_3) = \theta^2 DK = n\theta^2(2 - 2e^{-\lambda\theta} - (1 - e^{-\gamma})e^{-2\rho/n}), \quad \rho = \lambda t_3.$$

В частности, при $t_k = 0$ имеем

$$\bar{T}_{\text{в.з.}}(t_3) = 2t_3 e^{\rho/n}; \quad DT_{\text{в.з.}}(t_3) = (4t_3 / n) sh(\rho / n).$$

Среднее время выполнения задания будет минимальным при разбиении на n этапов, его находят из уравнения

$$\frac{d}{dn} \bar{T}_{\text{в.з.}}(n) = t_k (e^{2\lambda t_3/n} - 1) - \frac{2\lambda t_3}{n} \left(\frac{t_3}{n} + t_k \right) e^{\lambda t_3/n} = 0.$$

Приближенное решение этого уравнения имеет вид

$$n_{02} \approx \lambda t_3 \sqrt{1 + 2/\gamma}; \quad \tau_{02} = t_3 / n_{02} \approx 1 / \lambda \sqrt{1 + 2/\gamma}.$$

Наработка системы до отказа равна тому количеству этапов N , которое удастся выполнить до момента, когда будет полностью израсходован резерв времени t_{p1} . Чтобы найти производящую функцию распределения величины N , умножим (8.115) на $\exp(n\omega(2\tau + t_k)) = \exp(n\omega\theta_1)$, что соответствует переходу от переменной t к переменной t_{p1} , а затем составим производящую функцию:

$$\Phi_2^*(z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\omega\theta_1} (P_1^* n\tau, \omega) - e^{(n+1)\omega\theta_1} z^n = \frac{1 - \pi(\omega)e^{\omega\theta_1}}{1 - z\pi(\omega)e^{\omega\theta_1}},$$

где $\pi(\omega)$ следует брать из формулы (8.114). Отсюда изображение для функции средней наработки системы до отказа

$$\bar{T}_0^*(\omega) = (2\tau + t_k) \Phi_2^*(1, \omega) = \frac{\theta_1 \pi(\omega) e^{\omega\theta_1}}{1 - \pi(\omega) e^{\omega\theta_1}}; \quad \theta_1 = 2\tau + t_k. \quad (8.118)$$

При небольших t_{p1} обращение (8.118) дает

$$\begin{aligned} \bar{T}_0(t_{p1}) &= \bar{T}_0(0) = \frac{\theta_1}{(e^{\lambda\theta_1} - 1)}; \quad t_{p1} < \theta = \tau + t_k; \\ \bar{T}_0(t_{p1}) &= \bar{T}_0(0) \left(2 + \frac{(e^{\lambda\tau} - 1)^2}{(e^{\lambda\theta_1} - 1)} \right); \quad \theta \leq t_{p1} < 2\theta. \end{aligned}$$

При больших t_{p1} и $\lambda\theta \ll 1$ удобнее пользоваться приближенной формулой

$$\bar{T}_0(t_{p1}) = \bar{T}_0(0) \left(1 + [t_{p1} / \theta] \left(1 + \frac{(e^{\lambda\tau} - 1)^2}{(e^{\lambda\theta_1} - 1)} \right) \right),$$

где $[x]$ — целая часть x .

Периодический аппаратурный контроль

Контроль правильности функционирования системы и защита от сбоев обеспечиваются параллельной работой двух идентичных устройств, выполняющих одно и то же задание, и периодическим сравнением результатов работы (расчетов, передачи, обработки информации и пр.) в течение времени t_k . При несовпадении результатов работа на данном этапе повторяется заново. Задание считается выполненным, если за выделенное время выполнены все n его этапов. Вероятность выполнения задания удовлетворяет разностному уравнению

$$P_1(n\tau, t) = p^2 P_1((n-1)\tau, t - \theta) + (1 - p^2) P_1(n\tau, t - \theta); \quad (8.119)$$

$$p = \exp(-\lambda\theta); \quad \theta = \tau + t_k.$$

Решение (8.119) имеет вид

$$P_1^*(n\tau, \omega) = p^{2n} e^{-n\omega\theta} / (1 - (1 - p^2) e^{-\omega\theta})^n. \quad (8.120)$$

Обратное преобразование в (8.120) дает

$$P_1(t_3, t) = \sum_{i=0}^k C_{k+n}^i p^{2(k+n-i)} (1 - p^2)^i; \quad k = [t_{p1} / \theta]; \quad t_{p1} = t - t_3 - nt_k.$$

Оптимальное количество этапов n_{01} , которое обеспечивает максимум вероятности выполнения задания, находят из уравнения

$$\frac{dK}{dn} = \frac{d}{dn} \left(\frac{t - t_3 - nt_k}{t_3 / n + t_k} \right) = 0.$$

Отсюда

$$n_{01} = t_3 (\sqrt{t / t_3} - 1) / t_k = t_3 (\sqrt{m_t + 1} - 1) / t_k; \quad \tau_{01} = t_k / (\sqrt{m_t + 1} - 1).$$

При оптимальном разбиении среднее время выполнения задания

$$\bar{T}_{в.з}(t_3, n) = (t_3 + n_{01}t_k) e^{2\lambda(\tau_{01} + t_k)} = t_3 \sqrt{m_t + 1} \exp \left(2\lambda t_k \left(1 + \frac{1}{(\sqrt{m_t + 1} - 1)} \right) \right).$$

Пример 8.6. По незащищенному коммутируемому телефонному каналу связи СПД передается файл данных объемом $C = 312,5$ Кбайт со скоростью $v = 15$ Кбит/с. Для защиты от сбоев передача ведется с повторением кодовых посылок до совпадения двух из них. Необходимо выбрать оптимальную длину посылки, полагая, что сравнение копий и передача квитанции занимают время 200 мс, интенсивность сбоя тракта $\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1 / \text{бит}$, сбои в различных символах являются независимыми событиями, а выделяемый резерв времени составляет до 20% основного времени передачи.

Решение. По исходным данным находим $\lambda = \lambda_0$, $v = 0,003 \text{ с}^{-1}$, $t_3 = C/v = 500/3 \text{ с}$, резерв времени $t_p = 100/3 \text{ с}$, $\lambda_{t_3} = 0,5$, $\lambda_{t_p} = 0,1$, $\lambda_{t_k} = 0,0006$. Оптимальное число посылок находим по формуле (8.117): $n_{01} = 79$. Максимальное число дополнительных повторений $K_{\max} = 7$. Решая квадратное уравнение $K(n) = 7$, выясняем, что семь повторений возможно при $57 < n < 102$. Выбираем $n = 60$. Оптимальная длина посылки $N/n = 312,5/60 = 5,2$ Кбайт. Вероятность невыполнения задания в указанный срок находим по формуле (8.116): $Q1(t_3, t_p) = 1,75 \cdot 10^{-5}$.

8.4. Многоканальные системы с непополняемым резервом времени

Многоканальная система с непополняемым резервом времени состоит из m идентичных устройств (каналов), работающих параллельно и выполняющих общее задание известного объема V . Задание не имеет внутренней структуры и может

быть распределено между каналами произвольным образом. Поэтому оно называется безгранично делимым. При безотказной работе всех каналов система может выполнить задание за время $t_3 = V/mC$, где C — производительность одного канала. При наличии k работоспособных каналов ($k < m$) система выполнит задание за время $t_3(k) = V/kC$. В частности, при $k = 1$ $t_3(1) = t'_3 = V/C$. Если для выполнения задания выделено время t , то при $t'_3 > t$ минимальное число каналов m_0 , необходимое для выполнения этого задания в срок, определяется как минимальное целое число, удовлетворяющее условию $t'_3/m_0 \leq t$. Если здесь выполняется равенство, то есть $t'_3/m_0 = t$, то резерва времени нет и любой отказ приводит к срыву выполнения задания. При $t'_3/m_0 < t$ возникает резерв времени $t_p(m_0) = t - t'_3/m_0$. При увеличении числа каналов резерв времени увеличивается, и для некоторого $m \geq m_0$ он составляет $t_p(m) = t - t'_3/m$. По способу использования резерв является непополняемым. Время $t'_p = mt - t'_3$ можно истолковать как допустимое суммарное значение непроизводительных потерь оперативного времени всеми каналами системы до выполнения задания.

Анализ надежности проводится при следующих допущениях:

Наработка канала между отказами имеет распределение $F(t)$.

Отказы различных каналов статистически независимы.

В каналах имеется непрерывный, полный и достоверный контроль работоспособности, позволяющий обнаруживать все отказы практически в момент их возникновения.

Отказавший канал отключается, передается в ремонтный орган и после восстановления работоспособности возвращается в систему; время восстановления имеет распределение $F_b(t)$; количество восстанавливающих приборов достаточно, чтобы восстанавливать все отказавшие каналы параллельно; отключение и включение канала не нарушает работу остальных каналов.

Отказы каналов не обесценивают проделанной работы.

В начальный момент времени все каналы работоспособны.

При принятых допущениях задание оказывается выполненным, как только суммарная наработка всех каналов достигнет значения t'_3 . Поэтому вероятность безотказной работы (выполнения задания) можно представить как вероятность события

$$P_1(t_3, t, m) = P\left(T_p(t) = \sum_{i=1}^m T_{pi}(t) \geq t'_3\right), \quad t'_3 = mt_3, \quad (8.121)$$

где $T_p(t)$ — суммарная наработка системы. Из (8.2) и (8.3) получаем еще два определения этой вероятности:

$$P_1(t_3, t, m) = P\{T_{b.3}(t_3) \leq t\};$$

$$P_1(t_3, t, m) = P\left\{T_{\text{ин}}(t_3) = \sum_{i=1}^m T_{\text{ин}i}(t_3) < t'_p\right\}, \quad t'_p = mt - t'_3.$$

Учитывая статистическую независимость слагаемых в (8.121), запишем рекуррентную формулу:

$$Q_1(t'_3, t, m) = 1 - P_1(t'_3, t, m) = \int_0^{t'_3} Q_1(t'_3 - x, t, m-1) d_x Q_1(x, t), \quad t'_3 \leq mt, \quad (8.122)$$

где $Q_1(x, t)$ — вероятность отказа одного канала при наличии резерва времени $t - x$, определяемая по формулам, приведенным в 8.3. Поскольку $d_x Q_1(x, t) = a_1(x, t) dx$ при $x < t$, $d_x Q_1(x, t) = 1 - F(t)$ при $x = t$ и $d_x Q_1(x, t) = 0$ при $x > t$, можно привести (8.122) к виду [1]:

$$Q_1(t'_3, t, m) = Q(t'_3 - (m-1)t, t) = (1 - F(tQ_1(t'_3 - t, t, m-1) + \\ + \int_{\max(0, t'_3 - (m-1)t)}^{\min(t'_3, t)} Q_1(t'_3 - x, t, m-1) d_x Q_1(x, t), \quad t'_3 \leq mt.$$

Здесь необходимо учесть, что функции $Q_1(x, t) = Q_1(x, m, t) = 0$ при $x < 0$.

Выполняя в (8.122) операционное преобразование Стильтьеса по переменной t'_3 , получим:

$$Q_1^*(s, t, m) = (Q_1^*(s, t))^m. \quad (8.123)$$

Чтобы найти $Q^*(s, t)$, используем (8.65) и (8.71):

$$Q_1^{**}(s, \omega) = 1 - P_1^{**}(s, \omega) = 1 - \frac{s}{s + \omega} P^{**}(s + \omega, \omega) = \frac{\omega(\omega + \lambda + \mu)}{(\omega + \mu)(s + \omega + \lambda) - \lambda\mu}.$$

Выполняя здесь обратное преобразование по ω получим:

$$Q_1^*(s, t) = \frac{(\mu + \lambda - \omega_1)e^{-\omega_1 t} - (\mu + \lambda - \omega_2)e^{-\omega_2 t}}{\omega_2 - \omega_1}; \quad (8.124)$$

$$\omega_{1,2} = 0,5(s + \lambda + \mu) \left(1 \mp \left(1 - \frac{4\mu s}{(s + \lambda + \mu)^2} \right)^{0,5} \right).$$

Далее необходимо провести обратное преобразование по s . Эта операция может быть проделана численно [12]–[14]. Чтобы найти среднее время выполнения задания, подставим (8.124) в (8.123) и перейдем к изображению по переменной t . Тогда

$$Q_1^{**}(s, \omega, m) = \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{\omega(s - \omega_1)^i (\omega_1 - s)^{m-i}}{(\omega_2 - \omega_1)^m (\omega_2 i + (m-i)\omega_1 + \omega)}.$$

Выполняя предельный переход, получим:

$$\bar{T}_{в.з}^*(s, m) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} Q_1^{**}(s, \omega, m) = \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{(s - \omega_1)^i (\omega_1 - s)^{m-i}}{(\omega_2 - \omega_1)^m (\omega_2 i + (m-i)\omega_1)}.$$

При $m = 2$ имеем

$$\bar{T}_{в.з}^*(s, 2) = \frac{\lambda + \mu}{2s\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(s + \lambda + \mu)}.$$

Отсюда

$$\bar{T}_{\text{в.з}}(t_3, 2) = 1 + \frac{\lambda}{\mu} t_3 - \frac{\lambda(1 - e^{-(\lambda+\mu)t_3})}{2\mu(\lambda+\mu)}.$$

В этой формуле экспонента быстро затухает, и ею можно пренебречь. Если сделать то же самое при $m > 2$, то получим приближенную формулу

$$\bar{T}_{\text{в.з}}(t_3, m) = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) t_3 - \frac{(m-1)\lambda}{m\mu(\lambda+\mu)}.$$

Среднее суммарное время простоя до выполнения задания

$$\bar{T}'_{\text{ин}}(t_3, m) = m(\bar{T}_{\text{в.з}}(t_3) - t_3) = \frac{m\lambda}{\mu} \left(t_3 - \frac{m-1}{m(\lambda+\mu)}\right).$$

Далее рассмотрим невосстанавливаемую систему. Полагая в (8.124) $\mu = 0$ и выполняя обратное преобразование по s , получим:

$$Q_1(t_3, t, m) = I(m, m\lambda t_3) + \sum_{i=0}^{\lfloor mt_3/t \rfloor} C_m^i \frac{(\lambda(mt_3 - it))^{m-i}}{(m-1)!} L_{i-1}^{m-i}(\lambda(mt_3 - it)) e^{-m\lambda t_3}, \quad (8.125)$$

где $I(m, x)$ определяется по формуле (3.3), а $L_n^m(at)$ — полиномы Лаггера m -го порядка

$$L_n^m(at) = \sum_{i=0}^n C_n^i (-at)^i \prod_{j=1}^{n-i} (m+i+j).$$

В частности, для двухканальной системы:

$$Q_1(t_3, t, 2) = \begin{cases} 1 - (1 + \rho_1) e^{-\rho_1}, & \rho_1 = 2\lambda t_3, \quad t_3 \leq t/2; \\ 1 - (1 + \alpha_1 - \rho_1) e^{-\rho_1}, & \alpha_1 = 2\lambda t, \quad t/2 \leq t_3 \leq t; \end{cases}$$

$$Q(t_3, t_p, 2) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma_1) e^{-\gamma_1}, & \gamma_1 = 2\lambda t_p, \quad t_p \leq t_3; \\ 1 - (1 + \rho_1) e^{-\rho_1}, & t_p \geq t_3. \end{cases} \quad (8.126)$$

Для трехканальной системы

$$Q(t_3, t_p, 3) = \begin{cases} 1 - (1 + 2\gamma_1 + \gamma_1^2/2) e^{-\rho_1}, & \gamma_1 = 3\lambda t_p, \quad t_p \leq t_3/2; \\ 1 - (1 + \rho_1 + \frac{\gamma_1^2}{2 - (2\gamma_1 - \rho_1)^2}) e^{-\rho_1}, & t_3/2 \leq t_p \leq 2t_3; \\ 1 - (1 + \rho_1 + \rho_1^2/2) e^{-\rho_1}, & \rho_1 = 3\lambda t_3, \quad t_p \geq 2t_3. \end{cases} \quad (8.127)$$

Анализ формул (8.126)–(8.127) позволяет делать следующие выводы.

Если $t'_3 = mt_3 < t$, то с заданием может справиться и один канал. Тогда вероятность отказа многоканальной системы совпадает с вероятностью отказа не-

восстанавливаемой системы с общим ненагруженным резервом кратностью $(m - 1)/1$. В этом случае вероятность не зависит от величины оперативного времени и зависит только от объема задания.

Если зафиксировать t_3 , то ВБР $P(t_3, m) = \exp(-m\lambda t_3)$ будет уменьшаться с ростом числа каналов. Такая же зависимость наблюдается и при небольшом резерве времени. Однако начиная с некоторого значения резерва времени зависимость исчезает (рис. 8.12). В этом можно убедиться, если воспользоваться верхней оценкой вероятности (8.125) и формулой Стирлинга:

$$Q_1(t_3, t, m) \leq \frac{(\lambda t'_3)^m}{m!} = \frac{m^m (\lambda t_3)^m}{m!} \approx \frac{(\lambda t_3 e)^m}{\sqrt{2\pi m}}.$$

При $t_3 < \bar{T}_0/e$ оценка будет убывающей функцией m .

Если же зафиксировать t'_3 и выделять системе оперативное время, обратно пропорциональное числу каналов, то при любых t'_3 многоканальная система обеспечивает тем большую надежность, чем больше каналов в системе (рис. 8.12). Это легко объяснить взаимопомощью каналов при выполнении общего задания.

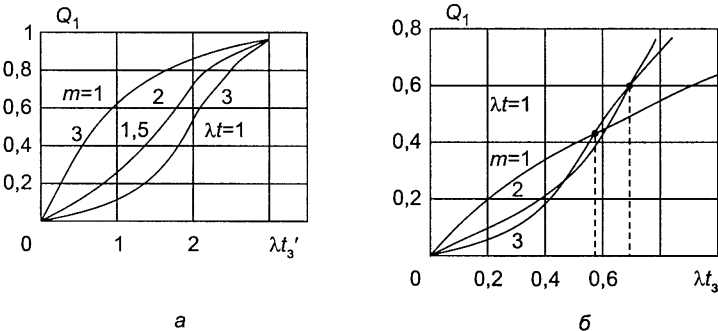


Рис. 8.12. Зависимость вероятности отказа невосстанавливаемой многоканальной системы: а — от требуемой наработки; б — от объема задания

Расчетные формулы для вероятности отказа можно найти и другим способом, используя интегральный метод. Для этого рассмотрим более общую схему.

Пусть система состоит из m основных и n резервных каналов. При экспоненциальных распределениях наработки и времени восстановления граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 8.13.

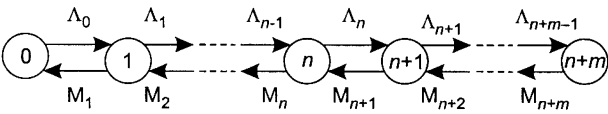


Рис. 8.13. Граф состояний многоканальной системы со структурным резервом

Повторяя рассуждения, использованные в 8.3 при выводе уравнений (8.56) и (8.57), получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
P^{(0)}(t_3, t_p) &= 1 - F^{(0)}(t_3) + \int_0^{t_3} P^{(n+1)}(t_3 - x, t_p) dF^{(0)}(x); \\
P^{(n)}(t_3, t_p) &= 1 - F^{(n)}(t_3) + \int_0^{t_1} P^{(n+1)}(t_3 - x, t_p) dF^{(n)}(x); \\
P^{(n+i)}(t_3, t_p) &= \exp\left(-(\Lambda_{n+1} + M_{n+1})\frac{mt_3}{m-i}\right) 1\left[t_p - \frac{it_3}{m-i}\right] + \\
&+ \int_0^{f(t_3, t_p)} (\Lambda_{n+i} P^{(n+i+1)}(t_3 - x / m(m-i), t_p - ix / m) + \\
&+ M_{n+i} P^{(n+i-1)}(t_3 - x / m(m-i), t_p - ix / m)) e^{-(\Lambda_{n+i} + M_{n+i})x} dx, \quad i = 1 \dots m-1; \\
P^{(m+n)}(t_3, t_p) &= \int_0^{t_p} M_{m+n} e^{-M_{m+n}x} P^{(m+n+1)}(t_3, t_p - x) dx; \\
f(t_3, t_p) &= \begin{cases} mt_p / i, & (m-i)t_p \leq it_3, \quad i = 1 \dots m-1; \\ mt_3 / (m-i), & (m-i)t_p \geq it_3. \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.128}$$

Вероятности $F^{(0)}(t)$ и $F^{(n)}(t)$ суть вероятности отказа системы со структурным резервом кратностью n/m при начальном состоянии 0 и n соответственно, определяемые по формулам, приведенным в 7.3.

Выполняя в (8.128) двойное операционное преобразование Лапласа—Карсона, получим:

$$\begin{aligned}
P^{(0)**}(s, \omega) &= 1 - F^{(0)*}(s) + F^{(0)*}(s)P^{(n+1)**}(s, \omega); \\
P^{(n)**}(s, \omega) &= 1 - F^{(n)*}(s) + F^{(n)*}(s)P^{(n+1)**}(s, \omega); \\
P^{(n+i)**}(s, \omega) &= \frac{s(m-i) + m(\Lambda_{n+i}P^{(n+i+1)**}(s, \omega) + M_{n+i}P^{(n+i-1)**}(s, \omega))}{s(m-i) + i\omega + m(\Lambda_{n+i} + M_{n+i})}, \quad i = 1 \dots m-1; \\
P^{(n+m)**}(s, \omega) &= \frac{M_{n+m}}{\omega + M_{n+m}} P^{(n+m-1)**}(s, \omega).
\end{aligned} \tag{8.129}$$

Полагая здесь $M_j = n = 0$, $\Lambda_i = (m-i)\lambda$ и решая систему уравнений по правилу Крамера, находим:

$$P^{(0)**}(s, \omega) = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} s(m\lambda)^i}{\prod_{j=0}^i (s + m\lambda + j\omega / (m-j))}. \tag{8.130}$$

Обратное преобразование а (8.130) дает

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = \sum_{k=0}^{\lfloor mt_p / (t_3 + t_p) \rfloor} \frac{m(-1)^k}{m-k} e^{-m\lambda t_3} \sum_{i=k}^{m-1} C_{i-k}^k C_{m-1}^i ((m-k)\lambda t_p - k\lambda t_3)^i / i!.$$

Эта формула удобнее, чем (8.125), при больших m и малых t_p . В частности,

$$P^{(0)}(t_3, t_p) = e^{-m\lambda t_3} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i (m\lambda t_p)^i / i!, \quad t_p < t_3 / (m-1). \tag{8.131}$$

Дифференцируя (8.131) по t_3 , находим сначала частоту, а затем интенсивность отказов:

$$\begin{aligned} a(t_3, t_p) = & m\lambda e^{-m\lambda t_3} \left(\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i \frac{(m\lambda t_p)^i}{i!} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\left[\frac{mt_p}{(t_3+t_p)} \right]} (-1)^k \sum_{i=k}^{m-1} C_i^k C_{m-1}^i \frac{((m-k)\lambda t_p - k\lambda t_3)^{i-1}}{i!} \left(m\lambda t_p - \frac{mk\lambda t_3 - ik}{m-k} \right) \right); \\ \Lambda(t_3, t_p) = & \frac{a(t_3, t_p)}{P^{(0)}(t_3, t_p)}. \end{aligned}$$

В частности, при $t_p < t_3/(m-1)$ выполняется неравенство $mt_p/(t_p + t_3) < 1, k = 0$, и поэтому

$$a(t_3, t_p) = m\lambda e^{-m\lambda t_3} \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i \frac{(m\lambda t_p)^i}{i!}, \quad \Lambda(t_3, t_p) = m\lambda.$$

Анализируя зависимость интенсивности отказов от времени t_3 , устанавливаем, что начальное значение $\Lambda(0, t_p) = 0$. При увеличении t_3 интенсивность отказов монотонно растет, достигая при $t_3 = (m-1)t_p$ значения

$$\Lambda((m-1)t_p, t_p) = \frac{m\lambda}{\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i \frac{(m\lambda t_3)^i}{(m-1)^i i!} \right)^{-1} \right)}.$$

В этой точке интенсивность отказов скачком увеличивается до значения $m\lambda$ и далее не меняется (рис. 8.14).

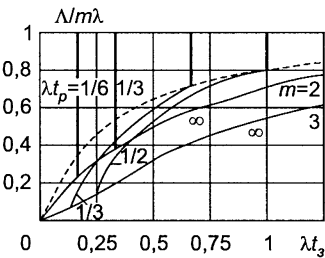


Рис. 8.14. Зависимость интенсивности отказов невозстанавливаемой многоканальной системы от требуемой наработки

При неограниченном резерве времени интенсивность отказов принимает минимальное возможное значение

$$\Lambda(t_3, t_p) = \Lambda(t_3, \infty) = m\lambda \frac{(m\rho)^{m-1}}{(m-1)!} \bigg/ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^i}{i!}, \quad \rho = \lambda t_3, \quad t_p > (m-1)t_3.$$

Как видно из этой формулы, неограниченным считается любой резерв времени кратностью более $m - 1$.

Для определения средней наработки системы до отказа составим систему уравнений, используя (8.129). Разделив почленно эти уравнения на s и выполняя предельный переход $s \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned}\bar{T}_0^{(0)*}(\omega) &= \bar{T}_0^{(0)}(0) + \bar{T}_0^{(n+1)*}(\omega); \\ \bar{T}_0^{(n)*}(\omega) &= \bar{T}_0^{(n)}(0) + \bar{T}_0^{(n+1)*}(\omega); \\ \bar{T}_0^{(n+i)*}(\omega) &= \frac{m-i + m(\Lambda_{n+i} \bar{T}_0^{(n+i+1)*}(\omega) + M_{n+i} \bar{T}_0^{(n+i-1)*}(\omega))}{i\omega + m(\Lambda_{n+i} + M_{n+i})}, \quad i = 0 \dots m-1; \\ \bar{T}_0^{(n+m)*}(\omega) &= \frac{M_{n+i}}{\omega + M_{n+i}} \bar{T}_0^{(n+m-1)*}(\omega).\end{aligned}\quad (8.132)$$

Полагая здесь $M_j = n = 0$, $\Lambda_i = (m-i)\lambda$ и выполняя обратное преобразование, получим:

$$\bar{T}_0^{(0)}(t_p, m) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i (-m)^i \sum_{j=1}^i C_i^j (-1)^{j-1} \frac{j^i}{m-j} e^{-(m-j)m\lambda t_p / j} \right).$$

В частности, для двухканальной и трехканальной систем

$$\bar{T}_0^{(0)}(t_p, 2) = \frac{1}{2\lambda} (2 - e^{-2\gamma}); \quad \bar{T}_0^{(0)}(t_p, 3) = \frac{1}{3\lambda} \left(3 - \frac{2}{3} e^{-6\gamma} - \frac{4}{3} e^{-3\gamma/2} \right), \quad \gamma = \lambda t_p.$$

Отсюда следует, что средняя наработка системы до отказа меняется в пределах от $1/m\lambda$ до $1/\lambda$. Для восстанавливаемых систем без структурного резерва ($n = 0$) из (8.132) находим:

$$\begin{aligned}\bar{T}_0^{(0)}(t_p, 2) &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} t_p + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (1 - e^{-2(\lambda + \mu)t_p}); \\ \bar{T}_0^{(0)}(t_p, 3) &= \frac{1}{3\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} t_p + \frac{2\Lambda_1}{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2} (1 - e^{-\Lambda_2 t_p} \cos(\Lambda_3 t_p)) + \\ &\quad + \frac{2}{\Lambda_3} \left(1 - \frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2} \right) e^{-\Lambda_2 t_p} \sin(\Lambda_3 t_p); \\ \Lambda_1 &= \frac{3}{4\lambda} (2\lambda + \mu)^2; \quad \Lambda_2 = \frac{3}{4} (5\lambda + 3\mu); \quad \Lambda_3 = \frac{3}{4} \sqrt{(9\lambda + 7\mu)(\mu - \lambda)}, \quad \mu > \lambda.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что в формулах основными являются первые два слагаемых. Их можно использовать для получения нижней оценки точного значения средней наработки. При произвольном m имеем:

$$\bar{T}_0^{(0)}(t_p, m) \approx \frac{1}{m\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} t_p.$$

Приращение средней наработки до отказа при введении резерва времени не зависит от количества каналов, а выигрыш в надежности по средней наработке растёт пропорционально числу каналов и резерву времени:

$$G_T = \frac{\bar{T}_0^{(0)}(t_p, m)}{\bar{T}_0^{(0)}(0, m)} = 1 + m\lambda t_p.$$

Заметим, что системы уравнений (8.129) и (8.132) позволяют находить показатели надежности многоканальных систем со структурным резервом и сравнивать по эффективности многоканальное и резервное соединения в параллельных системах.

8.5. Многофазные системы

Многофазные системы широко используется в технике. При определенных условиях к ним можно отнести системы передачи данных, вычислительные системы, автоматические линии станков, трубопроводные транспортные системы в энергетике, системы промышленной кооперации, экономические, производственные, логистические системы и др. [8], [9].

Основной особенностью многофазных систем является то, что в них между входными и выходными устройствами непрерывно движутся потоки материальных или информационных объектов (детали, энергоносители, товары, полуфабрикаты, сообщения, информационные посылки, пакеты данных, команды, служебная информация). Многофазная система простейшей структуры представляет собой последовательное соединение устройств (каналов связи, станков, участков трубопровода и пр.), разделенных между собой промежуточными накопителями (устройствами памяти, бункерами, складами, газохранилищами, нефтяными резервуарными парками и пр.), временно хранящими результаты работы предыдущего устройства до момента их использования следующим устройством (рис. 8.15).

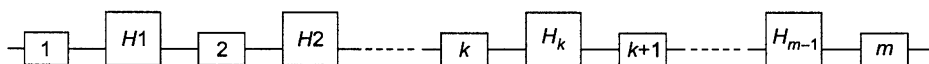


Рис. 8.15. Структурная схема многофазной системы

Каждое устройство характеризуется некоторой производительностью C_i . При одинаковой производительности и безотказной работе устройств накопители могут не понадобиться, так как вся продукция с выхода одного устройства сразу же поступает на обработку в следующее устройство. Однако если устройства отказывают, то накопители начинают выполнять функцию уменьшения доли технологически связанных простоев работоспособных устройств, так как при отказе некоторого устройства все предыдущие устройства в последовательной системе могут продолжать работу до тех пор, пока накопители не заполнятся. Если отказавшее устройство восстановит работоспособность до переполнения накопителей, то все предшествующие устройства «не заметят» отказа.

При различных производительностях устройств номинальная производительность системы равна производительности самого медленного устройства. Тогда все накопители между входом системы и медленным устройством выполняют еще одну функцию — сглаживания разности производительностей, принимая всю продукцию, которую медленное устройство не успевает переработать. Накопители, расположенные после медленного устройства, выполняют функцию обеспечения бесперебойной работы медленного устройства при отказах последующих устройств. Если эти устройства за счет запаса производительности успевают переработать всю накопленную за время их простоя продукцию, то система также «не замечает» (по результатам работы) отказов отдельных устройств.

Пусть медленное устройство имеет производительность $C_0 = C_{\min} = \min C_i, i = 1...m$, и пусть $a_i = C_i/C_0, z_{0i} = V_{0i}/C_0$ — емкость накопителя, исчисляемая как время, затрачиваемое на переработку продукции объемом V_{0i} при производительности C_0 , t_3 — время, затрачиваемое медленным устройством на выполнение задания. Тогда вероятность безотказной работы системы

$$P_c(t_3) = P(t_3, A, Z_0); \quad A = (a_1, a_2, \dots, a_m); \quad Z_0 = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0m}).$$

Коэффициент готовности системы представляет собой вероятность застать медленное устройство в работоспособном состоянии и производящим продукцию, то есть не находящимся в состоянии технологического простоя. Для этого не требуется, чтобы все прочие устройства также были работоспособными, как требуется в последовательных однофазных системах. Достаточно, чтобы между отказавшим устройством и входом медленного устройства был запас продукции в накопителях, а между выходом медленного устройства и отказавшим устройством были свободные емкости накопителей, способные принять продукцию от медленного устройства. При одинаковых производительностях устройств и запасах производительности от входа к выходу системы ($C_1 > C_2 > \dots > C_m$) критерием работоспособности системы является поступление продукции от последнего (медленного) устройства. Коэффициент готовности можно представить и как отношение средних значений:

$$K_{г.с}(m, A, Z_0) = \frac{\bar{T}_{н1}}{\bar{T}_{н1} + \bar{T}_{пр}} = \frac{\bar{T}_{н}}{\bar{T}_{н} + \bar{T}_{в}} \frac{\bar{T}_{н1}}{\bar{T}_{н}} = K_{г0} K_{н}(m, A, Z_0),$$

где $\bar{T}_{н} = \bar{T}_{н1} + \bar{T}_{н2}$ — средняя наработка на отказ медленного устройства; $\bar{T}_{н1}$ — средняя полезная наработка на отказ медленного устройства; $\bar{T}_{н2}$ — среднее суммарное время ожидания загрузки медленного устройства в интервале между отказами; $\bar{T}_{пр}$ — среднее время простоя устройства в интервале между отказами, включая время простоя в работоспособном состоянии; $\bar{T}_{в}$ — среднее время восстановления работоспособности; $K_{г0}$ — коэффициент готовности медленного устройства; $K_{н}$ — коэффициент полезного времени в работоспособном состоянии; $\delta = 1 - K_{н}$ — доля технологически связанных простоев. Рассмотрим теперь некоторые модели надежности двухфазных систем.

8.5.1. Расчет показателей безотказности двухфазной системы

Двухфазная система состоит из двух устройств, одно из которых («быстрое») имеет запас производительности, а другое («медленное») должно проработать безотказно в течение заданного времени t . Отказы устройств Y_1 и Y_2 и накопитель N статистически независимы и имеют интенсивности λ_1, λ_2 и λ_n соответственно. Быстрое устройство имеет идеальный контроль работоспособности. Время восстановления распределено экспоненциально с параметром μ . Операции отключения и включения быстрого устройства не вызывают приостановки работы или снижения производительности медленного устройства. Рассмотрим далее три варианта соотношения производительностей C_1 и C_2 .

Система с одинаковыми производительностями устройств

Если начальное заполнение накопителя системы с одинаковыми производительностями устройств нулевое, то наличие накопителя не увеличивает вероятности безотказной работы системы, а если накопитель ненадежен, может даже уменьшать ее. Ситуация меняется, если в накопителе есть некоторый запас продукции — фиксированный или случайный. Далее рассматриваем именно такой вариант. При $C_1 = C_2 = C$ вероятность безотказной работы системы представим в виде

$$P_c(t_3, z_0) = P(t_3, z_0)(1 - F_n(t_3)),$$

где $P(t_3, z_0)$ — вероятность безотказной работы системы при безотказном накопителе емкостью $z_0 = V_0 / C$. Граф состояний системы содержит пять состояний (рис. 8.16, а): в состояниях e_0, e_1, e_3 оба устройства работоспособны, но накопитель полон в состоянии e_0 , пуст в e_1 и имеет промежуточное заполнение в e_3 . В состоянии e_2 первое устройство неработоспособно, а накопитель имеет промежуточное заполнение. Состояние e_4 — неработоспособное состояние системы.

Введем вероятности $P_i(t)$ заставить систему в момент t в состоянии i и плотности распределения вероятностей $p_i(t, z)$ того, что в момент t накопитель заполнен до уровня $z \leq z_0$. Вероятности и плотности распределения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t); & \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda P_1(t); & \frac{\partial p_3(t, z)}{\partial t} &= \mu_1 p_2(t, z) - \lambda p_3(t, z); \\ \frac{\partial p_2(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial p_2(t, z)}{\partial z} &= \lambda_1 p_3(t, z) - (\lambda_2 + \mu_1) p_2(t, z), & \lambda &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned} \tag{8.133}$$

Начальные и граничные условия

$$p_2(t, z_0) = \lambda_1 P_0(t); \quad p_i(0, z) = \bar{p}_i(z), \quad i = 2, 3; \quad P_i(0) = p_i, \quad i = 0, 1.$$

При $p_0 = 1, p_1 = 0, \bar{p}_i(z) = 0$ операционное преобразование по t в (8.133) дает

$$p_2^*(s, y) = \frac{s\lambda_1}{s + \lambda} e^{-yA(s)}; \quad p_3^*(s, y) = \frac{s\lambda_1\mu_1}{(s + \lambda)^2} e^{-yA(s)}; \quad y = z_0 - z; \quad A(s) = \frac{s + \lambda_2}{1 + \mu_1 / \lambda}.$$

Интегрируя здесь по y от 0 до z_0 , находим сначала $P_2^*(s, z_0)$ и $P_3^*(s, z_0)$, а затем и вероятность

$$P^*(s, z_0) = P_0^*(s) + P_2^*(s, z_0) + P_3^*(s, z_0) = \frac{s}{s + \lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{s + \lambda} e^{-z_0 A(s)} \right). \quad (8.134)$$

Обратное преобразование по s дает

$$P(t, z_0) = e^{-\rho} \left(1 - e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} I(n+1, \lambda_1(t-z_0)) \right), \quad \rho = \lambda_2 t, \quad \gamma = \mu_1 z_0, \quad t \geq z_0.$$

Средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_0(z_0) = \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} \exp(-\lambda_2 z_0 (1 + \mu_1 / \lambda)) \right). \quad (8.135)$$

Если начальное заполнение накопителя имеет равномерное распределение

$$P_0(0) = p_0; \quad P_1(0) = p_1; \quad \bar{p}_2(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} (1 - p_0 - p_1) / z_0,$$

то из (8.133) имеем:

$$p_2^*(s, y) = \frac{s \lambda_1}{s + \lambda} e^{-y A(s)} + s \int_0^y \left(\bar{p}_2(x) + \frac{\lambda_1}{s + \lambda} \bar{p}_3(x) \right) e^{-(y-x) A(s)} dx;$$

$$p_3^*(s, y) = \frac{s}{s + \lambda} \bar{p}_3(y) + \frac{\mu_1}{s + \lambda} p_2^*(s, y).$$

Интегрируя здесь по y от 0 до z_0 и подставляя в (8.134), получим:

$$P^*(s, z_0) = p_1 \frac{s}{s + \lambda} + \frac{s}{s + \lambda_2} \left(p_0 \left(1 - \frac{\lambda_1}{s + \lambda} e^{-z_0 A(s)} \right) + \frac{1 - p_0 - p_1}{z_0 (\lambda_1 + \mu_1)} (1 - e^{-z_0 A(s)}) \right).$$

Обратное преобразование по s дает

$$P(t, z_0) = p_1 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda_2 t} \left(p_0 \left(1 - e^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} I(n+1, \lambda_1(t-z_0)) \right) + (1 - p_0 - p_1) G(t) \right);$$

$$G(t) = 1 - \frac{\lambda_2 t}{z_0 (\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{1}{z_0 (\lambda_1 + \mu_1)} e^{\gamma} \sqrt{\lambda_1(t-z_0)} / \gamma I_1(2\sqrt{\lambda_1(t-z_0)} \gamma),$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, определяемая по формуле (8.78).

Средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_0(z_0) = \frac{p_1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_2} \left(p_0 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} e^{-a} \right) + (1 - p_0 - p_1) \left(1 - \frac{1}{a} (1 - e^{-a}) \right) \right); \quad (8.136)$$

$$a = \lambda_2 z_0 \left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda} \right).$$

При $p_0 = 1$ формула (8.136) совпадает с (8.135).

Система с убывающей производительностью устройств.

Пусть в системе с убывающей производительностью устройств $C_1 > C_2$, $a = C_1/C_2 > 1$ и емкость накопителя не ограничена. В начальный момент накопитель пуст. Тогда вероятность безотказной работы системы

$$P_c(t, a) = P_1(t, a)(1 - F_1(t))(1 - F_2(t)),$$

где $P_1(t, a)$ — вероятность безотказной работы первого устройства при запасе производительности a . Введем событие A_n , состоящее в том, что в интервале $(0, t)$ будут выполнены условия

$$(a-1) \sum_{i=1}^k \tau_i > \sum_{i=1}^k \theta_i, \quad k \leq n-1; \quad (a-1) \sum_{i=1}^n \tau_i \leq \sum_{i=1}^n \theta_i. \quad (8.137)$$

Условия (8.137) означают, что впервые накопитель окажется пуст во время восстановления после n -го отказа первого устройства. Непосредственным подсчетом устанавливаем, что

$$P(A_n) = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} a^{n-1} I(2n-1, (1+\alpha)\rho_1) / (1+\alpha)^{2n-1}; \quad \alpha = \frac{\mu_1}{\lambda_1} (a-1); \quad \rho_1 = \lambda_1 t / a.$$

Тогда вероятность отказа

$$\begin{aligned} Q_1(t, a) &= 1 - P_1(t, a) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} \frac{\alpha^n}{(n+1)(1+\alpha)^{2n+1}} I(2n+1, (1+\alpha)\rho_1). \end{aligned} \quad (8.138)$$

При постоянном времени восстановления $T_{в1}$ также путем неп осредственного подсчета вероятностей события (8.137), получим:

$$Q_1(t, a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} \left[I(n+1, x_n) + \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \beta^{n-1-j} I(j+2, x_n) \right];$$

$$x_n = \min(\beta, \max(0, \rho - n\beta)), \quad \beta = \lambda_1 T_{в1} / (a-1).$$

Чтобы найти другое выражение для функции $Q_1(t, a)$, приводящее к быстро сходящемуся (по сравнению с (8.138)) ряду, выполним в (8.138) операционное преобразование по переменной $\lambda_1 t$ и получим:

$$Q_1^*(s, a) = (as + \alpha - 1 - \sqrt{(as + \alpha + 1)^2 - 4\alpha}) / 2\alpha. \quad (8.139)$$

Отсюда видно, что $Q_1^*(s, a)$ является решением квадратного уравнения

$$\alpha x^2 - (as + \alpha + 1)x + 1 = 0.$$

Представим это уравнение в виде

$$x = 1 - \frac{asx}{1 - \alpha x} = 1 - \frac{as}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n$$

и подставим сюда (8.139). Тогда

$$Q_1^*(s, a) = 1 - \frac{as}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha}^n \left(\frac{as + \alpha - 1 - \sqrt{(as + \alpha + 1)^2 - 4\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \right)^n. \quad (8.140)$$

Обратное преобразование в (8.140) дает

$$Q_1(t, a) = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha}^n \frac{n}{\rho_1} I_n(2\rho_1 \sqrt{\alpha}) e^{-(1+\alpha)\rho_1 t},$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка [15]

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2i+n}}{i!(n+i)!}.$$

Используя соотношение

$$2n/x I_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x),$$

получим:

$$Q_1(t, a) = 1 - e^{-(1+\alpha)\rho_1 t} \left[I_0(y) + \sqrt{\alpha} I_1(y) + (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha}^{n-1} I_n(y) \right], \quad y = 2\rho_1 \sqrt{\alpha} t. \quad (8.141)$$

Функции $I_n(x)$ табулированы [15]. Приемлемую по точности верхнюю оценку вероятности дают первые два слагаемых в скобках. Результат (8.139) можно обобщить для случая производного распределения наработки первого устройства $F_1(t)$. Используя метод «лестничных моментов» [1], [11], выведем уравнение

$$Q_1^*(s, a) = f_1(as + \alpha(1 - Q_1^*(s, a))); \quad f_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_1(x).$$

Решая это уравнение относительно $Q_1^*(s, a)$ и выполняя обратное преобразование, получим расчетную формулу для искомой вероятности.

Из (8.139) легко найти среднюю наработку до отказа:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{o.c}(a) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P^*(s, a) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s}{s + \lambda / \lambda_1} P_1^*(s + \lambda / \lambda_1) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(\left(\frac{a\lambda}{\lambda_1} + \alpha + 1 - \left(\left(\frac{a\lambda}{\lambda_1} + \alpha + 1 \right)^2 - 4\alpha \right)^{0.5} \right) / 2\alpha \right) \right), \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned} \quad (8.142)$$

Из (8.142) видно, что по мере улучшения надежности накопителя и выходного устройства все большая доля отказов системы приходится на входное устройство и тем большее влияние на надежность системы имеет запас производительности. В пределе

$$\bar{T}_{o.c}(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_{o.c}(a, \lambda) = \begin{cases} a / \lambda_1 (1 - \alpha), & \alpha < 1; \\ \infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (8.143)$$

При ограниченной емкости накопителя, согласно графу состояний (рис. 8.16, б), составим систему уравнений относительно вероятностей и плотностей вероятностей состояний системы в условиях безотказной работы накопителя и выходного устройства:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} + (a-1) \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial z} &= -\lambda p_1(t, z) + \mu_1 p_2(t, z); \\
 \frac{\partial p_2(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial p_2(t, z)}{\partial z} &= \lambda_1 p_1(t, z) - \mu_1 p_2(t, z); \\
 \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda'_1 P_0(t) + (a-1) p_1(t, z_0); \quad \frac{dP_3(t)}{dt} = p_2(t, 0),
 \end{aligned}
 \tag{8.144}$$

где λ'_1 — интенсивность отказов каждого первого устройства при работе с производительностью C_2 .

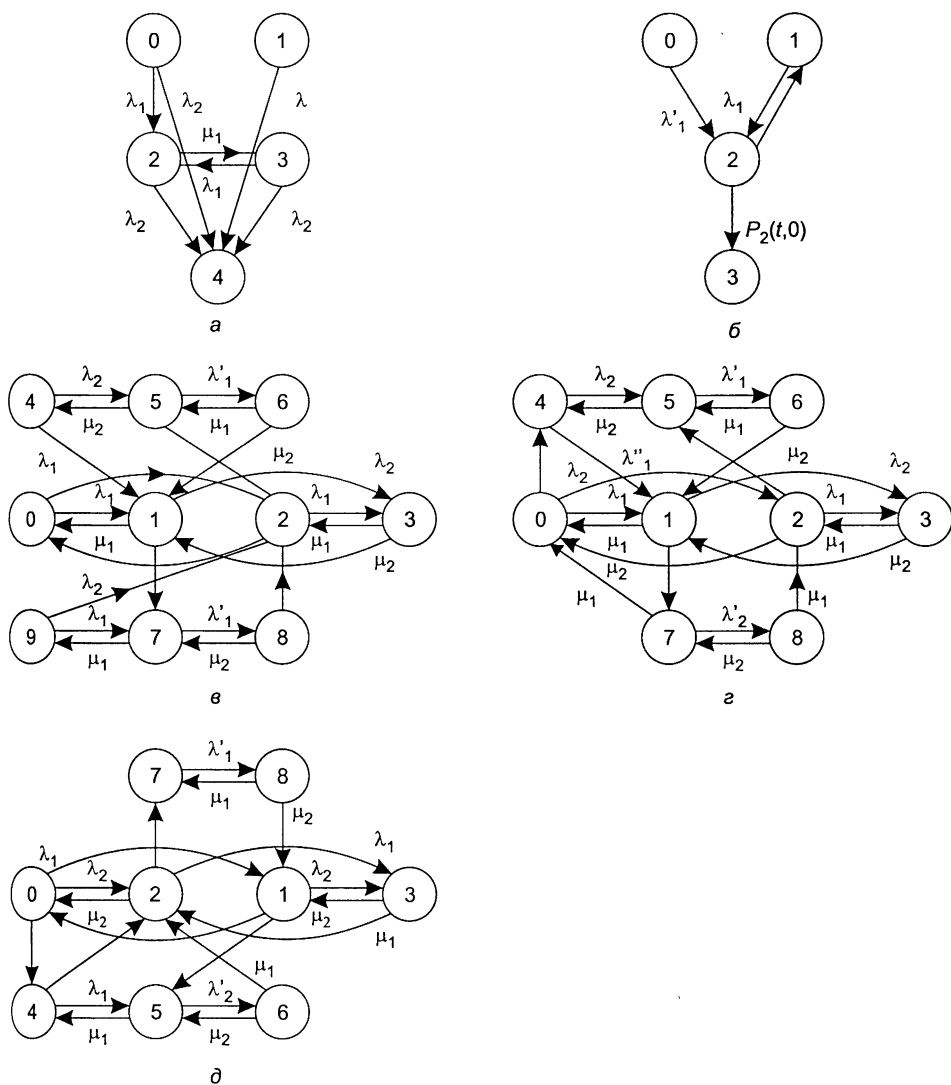


Рис. 8.16. Графы состояний двухфазной системы

Начальные и граничные условия

$$p_2(t, z_0) = \lambda'_1 P_0(t); \quad P_0(0) = p_0; \quad p_i(0, z) = p_i(z), \quad i = 1, 2.$$

Решают систему (8.144) так же, как систему (8.133), с помощью замены $y = z_0 - z$ и операционного преобразования

$$Q_1^*(s, a, z_0) = \gamma(a-1)(\omega_2 - \omega_1) \times \\ \times \exp\left(-\frac{z_0(a-1+s(a-2))}{a-1}\right) \left/ \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^2 s(s+1+(a-1)(\gamma+\omega_j)-(a-1)\gamma\omega_i) e^{-\omega_i z_0} \right., \quad (8.145)$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2(a-1)}(s(a-2) + \lambda_1(a-1)) \mp \\ \mp (s(a-2) + \lambda_1(a-1)^2 + 4s(a-1)(s + \lambda_1 + \mu_1))^{0.5}, \quad \gamma = \lambda'_1 / \lambda_1. \quad (8.146)$$

Вероятность безотказной работы системы с учетом надежности Н и Y_2

$$P^*(s, a, z_0) = s / (s + \lambda)(1 - Q_1^*(s + \lambda, a, z_0)), \quad \lambda = \lambda_{11} + \lambda_2.$$

Обратное преобразование (8.146) приводит к сложным выражениям. Однако можно найти двухсторонние оценки вероятностей:

$$P_{111}(t, a, z_0) = e^{-\rho_1} \left(1 + \rho_1 - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \rho_1}) \right); \\ P_{111}(t, a, z_0) = 1 - \frac{1}{\alpha + 1} (1 - e^{-(\alpha+1)\rho_1}), \quad \rho_1 < \beta; \\ P_{111}(t, a, z_0) = e^{-\lambda_1(t-z_0)} + e^{-\rho_1} \left(\beta - \frac{1}{\alpha} (1 - \alpha(\rho_1 - \beta))(1 - e^{-\mu_1 z_0}) \right), \quad \rho_1 \geq \beta, \quad \rho_1 = \lambda_1 t / a; \\ P_{111}(t, a, z_0) = 1 - \frac{1}{\alpha + 1} (1 - e^{-(\alpha+1)\beta}) + e^{-\alpha\beta} (e^{-\beta} - e^{-\rho_1}), \quad \rho_1 \geq \beta = \lambda_1 z_0 / (a-1),$$

где $\alpha = \mu_1(a-1)/\lambda_1$, $a = C_1/C_2$.

Средняя наработка до отказа

$$\bar{T}_{o.c}(a, z_0) = \frac{1}{\lambda} (1 - Q_1^*(\lambda, a, z_0)), \quad \lambda = \lambda_{11} + \lambda_2,$$

где $Q_1^*(s)$ берут из формулы (8.145). При $\lambda \rightarrow 0$ имеем:

$$\bar{T}_{o.cl}(a, z_0) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{\gamma} e^{\lambda_1 \delta z_0} \left(\frac{\alpha a}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{\gamma(\alpha-1)} \right) (e^{\lambda_1 \delta z_0} - 1) - \beta \left(1 + \frac{a}{\alpha-1} \right) \right),$$

где $\delta = (\alpha-1)/(a-1)$, $\alpha \neq 1$, $\gamma = \lambda'/\lambda$. При $\alpha = 1$ имеем:

$$\bar{T}_{o.cl}(a, z_0) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{\gamma} + \lambda_1 z_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma(a+1)} \right) + \frac{a}{2} \beta^2 \right). \quad (8.147)$$

Интенсивность отказов, согласно (8.13), находят путем дифференцирования логарифма вероятности безотказной работы. При неограниченной емкости накопителя с помощью (8.138) после некоторых преобразований получим:

$$\Lambda(t, a) = -\frac{d}{dt} \ln P(t, a) = \lambda_{\text{н}} + \lambda_2 + a_1(t, a) / P_1(t, a); \quad (8.148)$$

$$a_1(t, a) = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} I_1(2\sqrt{\alpha} \lambda_1 t / a) \exp\left(-\frac{1}{a}(1 + \alpha) \lambda_1 t\right),$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, определяемая по формуле (8.78), а $P_1(t, a)$ определяется по формуле (8.138) или (8.141).

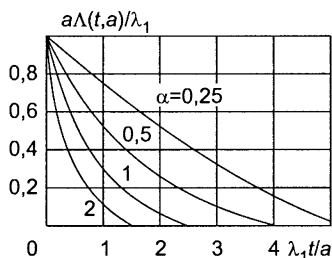


Рис. 8.17. Зависимость интенсивности отказов двухфазной системы от времени при различных значениях запаса производительности $\alpha = \mu_1(a - 1) / \lambda_1 (\lambda_H = \lambda_2 = 0)$.

Из графиков, изображенных на рис. 8.17, видно, что двухфазные системы являются единственными из уже рассмотренных классов резервированных систем, у которых интенсивность отказов является убывающей функцией времени. Системы с такой зависимостью называют молодёющими.

Система с возрастающей производительностью устройств

В системах с возрастающей производительностью устройств при $C_1 < C_2$ и неограниченной емкости накопителя вероятность безотказной работы можно представить в виде

$$P(t, a) = P_2(t, a)(1 - F_{\text{н}}(t))(1 - F_1(t)), \quad a = C_2 / C_1 > 1,$$

где $P_2(t, a)$ — вероятность безотказной работы системы при условии безотказной работы устройства Y_1 и накопителя H . Вероятность $P_1(t, a)$ удовлетворяет интегральному уравнению Такача [11]

$$P_2(t, a) = e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \int_0^{t-x} P_2(t-x-y, a) dG(y) dx; \quad (8.149)$$

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{(a-1)t/a} \frac{(\lambda_2 x / (a-1))^n}{n!} e^{-\lambda_2 x / (a-1)} G_n\left(t - \frac{ax}{a-1}\right) dF_{\text{н}}(x), \quad (8.150)$$

где $G(t) = P(\theta < t)$ — функция распределение времени до первого освобождения накопителя; $G_n(t)$ — $(n-1)$ -кратная свертка $G(t)$. Операционное преобразование в (8.150) приводит к алгебраическому уравнению

$$G^*(s) = f_n \left(\frac{as}{a-1} + \frac{1-G^*(s)}{a-1} \right). \quad (8.151)$$

где $f_n(s)$ — изображение функции распределения времени восстановления $F_n(t)$. При экспоненциальном распределении времени восстановления из (8.151) находим

$$G^*(s) = \alpha Q_1^*(s, a),$$

где $Q_1^*(s, a)$ следует взять из (8.139). Отсюда

$$G(t) = \frac{a}{\lambda_2 t} I_1(2\sqrt{\alpha}\lambda_2 t / a) e^{-(1+\alpha)\lambda_2 t / a}. \quad (8.152)$$

Подставляя (8.152) в (8.149), получим интегральное уравнение

$$P_2(t, a) = e^{-\lambda_2 t} + \sqrt{\alpha}\lambda_2 a \int_0^t K(t-y)P_2(y, a) dy; \quad (8.153)$$

$$K(t) = \int_0^t \frac{1}{x} I_1(2\sqrt{\alpha}\lambda_2 x / a) \exp\left(-\frac{a-1}{a}(\mu - \lambda_2)x - \lambda_2 t\right) dx.$$

Решение (8.153) находят численно с помощью итераций.

Среднее время до отказа системы

$$\begin{aligned} \bar{T}_{o.c}(a, \lambda) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s\lambda_2} P^*(s, a) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \lambda} P_2^*(s + \lambda, a) = \\ &= 2 / (\sqrt{a\lambda + \lambda_2(\alpha + 1)^2 - 4a\lambda_2^2} + (2-a)\lambda - (\alpha - 1)\lambda_2). \end{aligned}$$

В частности,

$$\bar{T}_{o.c}(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_{o.c}(a, \lambda) = \begin{cases} 1 / \lambda_2(1 - \alpha), & \alpha < 1; \\ \infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (8.154)$$

Сравнивая (8.154) и (8.143), видим, что при прочих равных условиях в данной системе условное среднее в a раз меньше, чем в системе с убывающей производительностью.

8.5.2. Расчет коэффициента готовности двухфазной системы

Сохраняя неизменными допущения о порядке функционирования системы, изложенные в 8.5.1, считаем дополнительно, что здесь $\lambda_H = 0$, а емкость накопителя ограничена и равна z_0 . При отказе Y_2 и заполненном накопителе входное устройство Y_1 простаивает, а при отказе Y_1 и пустом накопителе простаивает выходное устройство Y_2 . При вынужденном простое в работоспособном состоянии устройства имеют интенсивности отказов λ'_1 и λ'_2 , вообще говоря, отличные от λ_1 и λ_2 . При работе с неполной производительностью устройство Y_i имеет интенсивность отказов λ''_i , $i = 1, 2$. Рассмотрим далее три варианта соотношения производительностей.

Система с одинаковыми производительностями устройств

Граф состояний (см. рис. 8.16, в) имеет 10 состояний: три с заполненным накопителем ($z = z_0$), три с пустым накопителем ($z = 0$) и четыре с промежуточным заполнением накопителя ($0 < z < z_0$). Система уравнений относительно вероятностей состояний и плотностей вероятности состояний на стационарном участке эксплуатации имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -\lambda p_0(z) + \mu_1 p_1(z) + \mu_2 p_2(z) = 0; \\
 & \frac{dp_1(z)}{dz} + \lambda p_0(z) - (\lambda_2 + \mu_2) p_1(z) + \mu_2 p_3(z) = 0; \\
 & \frac{dp_2(z)}{dz} + \lambda_2 p_0(z) - (\lambda_1 + \mu_2) p_2(z) + \mu_1 p_3(z) = 0; \\
 & \lambda_2 p_1(z) + \lambda_1 p_2(z) - \mu p_3(z) = 0; \quad -\lambda P_4 + \mu P_5 = 0; \\
 & \lambda_2 P_4 - (\lambda'_1 + \mu_2) P_5 + \mu P_6 + p_2(z_0) = 0; \quad -\lambda'_1 P_5 + \mu P_6 = 0; \\
 & \lambda_1 P_9 - (\lambda'_2 + \mu_1) P_7 + \mu_2 P_8 + p_1(0) = 0; \\
 & -\lambda'_2 P_7 + \mu P_8 = 0; \quad p_1(z_0) = \lambda_1 P_4 + \mu_2 P_6; \\
 & p_2(0) = \lambda_2 P_9 + \mu_1 P_8; \quad \sum_{i=0}^3 \int_0^{z_0} p_i(z) dz + \sum_{i=4}^9 P_i = 1; \\
 & \lambda = \lambda_1 + \lambda_2; \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.
 \end{aligned} \tag{8.155}$$

Решая систему (8.155) относительно вероятностей P_i и учитывая, что работоспособными являются состояния 0, 1, 4 и 9, находим:

$$\begin{aligned}
 & K_{r.c}(z_0) = P_0 + P_1 + P_4 + P_9 = \mu_1 \times \\
 & \times \left(\left(1 + (\lambda_2 \mu + \lambda'_2 \lambda) \left(\frac{e^{Az_0}}{\lambda_1 \mu + \lambda'_1 \lambda} + \frac{e^{Az_0} - 1}{\lambda_1 \mu_2 (\nu - 1)} \right) \right) \right) / \left(\left(\lambda + \mu_1 + \frac{\lambda'_2 \lambda}{\mu} + \frac{\mu_1}{\mu_2} (\lambda_2 \mu + \lambda'_2 \lambda) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left(\frac{\lambda + \mu_2 + \lambda'_1 \lambda / \mu}{\lambda_1 \mu + \lambda'_1 \lambda} e^{Az_0} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda_1 \mu (\nu - 1)} (e^{Az_0} - 1) \right) \right); \\
 & A = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda \mu} (\lambda + \mu) (\nu - 1), \quad \nu = \lambda_2 \mu_1 / \lambda_1 \mu_2.
 \end{aligned} \tag{8.156}$$

Отсюда, в частности, при $\lambda'_1 = \lambda_1$ и $\lambda'_2 = \lambda_2$, $\nu = 1$, $A = 0$ имеем:

$$K_{r.c}(z_0) = (\mu^2 + \lambda_2 \mu_1 (\lambda + \mu)^2 z_0 / \lambda) / \left((\lambda + \mu)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right) \lambda_2 \mu_1 z_0 \right) \right). \tag{8.157}$$

Представляя коэффициент простоя системы в виде

$$K_{n.c}(z_0) = 1 - K_{r.c}(z_0) = 1 - K_{r2} + K_{r2}(1 - K_{r1})\delta(z_0),$$

найдем коэффициент наложения потерь (долю технологически связанных простоев):

$$\delta(z_0) = \left(1 + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\lambda_2 \mu_1 z_0}{\lambda} \right)^{-1}.$$

Коэффициент полезного времени

$$K_{н.в}(z_0) = 1 - (1 - K_{г.1})\delta(z_0) = (\mu + \lambda_2 \mu_1 z_0) / (\lambda + \mu + \lambda_2 \mu_1 z_0).$$

При $\lambda'_1 = \lambda_1$ и $\lambda'_2 = \lambda_2$, $v \neq 1$ имеем:

$$K_{г.с}(z_0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} K_{н.в}(z_0); \quad \delta(z_0) = \left(1 + \frac{v}{v-1} (e^{Az_0} - 1) \right)^{-1}; \quad (8.158)$$

$$K_{н.в}(z_0) = 1 - \lambda / \left(\lambda + \mu_1 + \frac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1} e^{Az_0} + \frac{v(\lambda + \mu)}{v-1} (e^{Az_0} - 1) \right).$$

При $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 0$ имеем:

$$K_{г.с}(z_0) = 1 - \frac{v^2 e^{Az_0} - 1}{v-1} P_7; \quad (8.159)$$

$$P_7 = \left(1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda} \right) v e^{Az_0} + \frac{v(\lambda + \mu)}{\lambda(v-1)} (e^{Az_0} - 1) \right)^{-1};$$

$$\delta(z_0) = \frac{(v-1)}{(v e^{Az_0} - 1)}; \quad K_{н.в}(z_0) = 1 - \lambda / \left(\lambda + \mu_1 + \mu_2 v e^{Az_0} + \frac{v\mu}{v-1} (e^{Az_0} - 1) \right).$$

Коэффициент простоя устройств по различным причинам находят по следующим формулам:

$$K_{н1}(z_0) = P_1 + P_3 + P_7 = (v e^{Az_0} - 1) P_7 / (v-1) = P_7 / \delta(z_0);$$

$$K_{н2}(z_0) = P_2 + P_3 + P_5 = v (v e^{Az_0} - 1) P_7 / (v-1) = v P_7 / \delta(z_0).$$

Отсюда следует, что при $v > 1$ путем увеличения емкости накопителя можно снизить коэффициент наложения потерь до сколь угодно низкого уровня. При $v < 1$ этот коэффициент также снижается, но до уровня $1 - v$.

Система с убывающей производительностью устройств

При $C_1 > C_2$ граф состояний системы с убывающей производительностью устройств (см. рис. 8.16, з) отличается от графа состояний при $C_1 = C_2$ только тем, что в нем отсутствует состояние 9 и появляется переход из состояния 7 в состояние 0. Система уравнений для стационарного участка эксплуатации имеет вид

$$(a-1) \frac{dp_0(z)}{dz} + \lambda p_0(z) - \mu_1 p_1(z) - \mu_2 p_2(z) = 0;$$

$$\frac{dp_1(z)}{dz} + \lambda_1 p_0(z) - (\lambda_2 + \mu_1) p_1(z) + \mu_2 p_3(z) = 0;$$

$$a \frac{dp_2(z)}{dz} - \lambda_2 p_0(z) (\lambda_1 + \mu_2) p_2(z) - \mu_1 p_3(z) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 p_1(z) + \lambda_1 p_2(z) - \mu p_3(z) &= 0; \quad p_1(0) = (\lambda'_2 + \mu_1)P_7 - \mu_2 P_8 = 0; \\
-\lambda'_2 P_7 + \mu P_8 &= 0; \quad (a-1)p_2(z_0) = (\lambda''_1 + \lambda_2)P_4 - \mu_2 P_5; \\
ap_2(z_0) &= -\lambda_2 P_4 + (\lambda'_1 + \mu_2)P_5 - \mu_1 P_6; \quad -\lambda'_1 P_5 + \mu P_6 = 0; \\
(a-1)p_0(0) &= \mu_1 P_7; \quad ap_2(z_0) = \mu_1 P_8; \\
p_1(z_0) &= \lambda''_1 P_4 + \mu_2 P_6; \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.
\end{aligned} \quad (8.160)$$

Коэффициент готовности есть сумма вероятностей работоспособных состояний:

$$K_{г.с}(z_0) = P_0(z_0) + P_1(z_0) + P_4(z_0).$$

Решая (8.160) относительно этих вероятностей при $\lambda'_i = \lambda''_i = \lambda_i = \lambda$ и $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2$, получаем [1]:

$$\begin{aligned}
K_{г.с}(z_0, a) &= \left(\frac{\mu(a-1)}{\lambda} (s_1 e^{-s_1 z_0} - s_2 e^{-s_2 z_0}) + \right. \\
&+ (\lambda + \mu)^2 \left(\frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}) \right) + \\
&+ (\mu(a-1) + (2\mu^2 + \lambda\mu + a\lambda^2)) \frac{(e^{-s_2 z_0} - e^{-s_1 z_0})P_7}{(a-1)(s_1 - s_2)} \Big); \quad (8.161)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_7 &= \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\mu} + \frac{(\lambda + \mu)^2 (1 + \lambda(a+1)) / (2a\mu)}{(a-1)(s_1 - s_2)} \left[\frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}) - \frac{1}{s_2} (1 - e^{-s_2 z_0}) \right] + \right. \\
&+ (s_1 e^{-s_1 z_0} - s_2 e^{-s_2 z_0}) \frac{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2}{2\lambda\mu(s_1 - s_2)} + \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\lambda + \frac{\lambda}{2a} + \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{2\lambda a} \right) + \\
&+ \left. \frac{\lambda^2(a+1)}{4a\mu} + \frac{(\lambda + \mu)^2 + a\mu^2}{(a-1)\mu} (e^{-s_2 z_0} - e^{-s_1 z_0}) \right\}^{-1},
\end{aligned}$$

где s_1 и s_2 определяются из полинома

$$a(a-1)s^2 + s(2a\lambda - (a-1)^2(\mu + \lambda/2)) - (a-1)(\lambda + \mu)^2 = a(a-1)(s + s_1)(s + s_2).$$

Учитывая, что коэффициент s_1 положителен, а s_2 — отрицателен, из (8.161) находим коэффициент готовности системы при неограниченной емкости накопителя:

$$\dot{K}_{г.с}(a) = \left[\frac{\mu}{\lambda} |s_2| (a-1) + \frac{(\lambda + \mu)^2}{|s_2|} + 2\mu + (a-1)(\lambda + 2\mu) \frac{(a\lambda + \mu)}{(2a\lambda)} \right] / B; \quad (8.162)$$

$$\begin{aligned}
B &= \left(1 + \frac{\lambda(a+1)}{2a\mu} \right) \frac{(\lambda + \mu)^2}{|s_2|} + a\mu + \frac{1}{\mu} (\lambda + \mu)^2 + (a-1) \left[\frac{|s_2|}{2\lambda\mu} ((\lambda + \mu)^2 + \mu^2) + \right. \\
&+ \left. \lambda + \frac{\lambda}{2a} + \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{2\lambda a} + \frac{\lambda^2(a+1)}{4a\mu} \right].
\end{aligned}$$

Из формулы (8.161) можно установить, что с увеличением емкости накопителя различия в значениях производительности все в меньшей степени влияют на коэффициент готовности системы, а при неограниченной емкости влияние очень

мало. Что касается влияния запасов, то легко установить, что при $\lambda_1 = 0$ коэффициент готовности не зависит от уровня запасов. Иная ситуация наблюдается при повышении надежности выходного устройства. Из (8.160) следует, что при $\lambda_2 \rightarrow 0$ коэффициент простоя системы

$$K_{н.с}(z_0, a) = \lambda_1 / \left(\lambda_1 + \mu_1 e^{-b\gamma} + \frac{a\lambda_1}{(a-1)b} (1 - e^{-b\gamma}) \right), \quad \gamma = \mu_1 z_0, \quad b = \frac{\lambda_1}{\mu_1(a-1)} - 1.$$

При увеличении z_0 коэффициент простоя существенно снижается, а при $b < 0$, то есть при $a - 1 > \lambda_1/\mu_1$, может быть доведен до любого желаемого уровня.

Система с возрастающей производительностью устройств

При $C_1 < C_2$ граф состояний системы с возрастающей производительностью устройств (см. рис. 8.16, д) является зеркальным отображением графа на рис. 8.16, з и сводится к нему, если сделать замену $y = z_0 - z$. Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы сразу составить выражения для вероятностных характеристик, используя систему уравнений (8.160):

$$\begin{aligned} p_0(z) &= \frac{\mu_2 P_7}{(b-1)(s_1 - s_2)} [B(e^{-s_2(z_0-z)} - e^{-s_1(z_0-z)}) + s_1 e^{-s_1(z_0-z)} - s_2 e^{-s_2(z_0-z)}]; \\ P_6 &= \frac{\lambda'_2}{\mu} P_5; \quad p_1(z) = \frac{\lambda_1 \mu_2 P_7}{\mu(b-1)(s_1 - s_2)} \times \\ &\times [C(e^{-s_2(z_0-z)} - e^{-s_1(z_0-z)}) + \gamma_1(s_1 e^{-s_1(z_0-z)} - s_2 e^{-s_2(z_0-z)})]; \\ P_8 &= \frac{\lambda'_1}{\mu} P_7; \quad P_5 = \frac{\mu((b-1)\lambda_1 p_0(0) + b(\lambda_1 + \lambda'_2)p_1(0))}{\mu_1(\lambda''_2 \mu + \lambda'(\lambda_1 + \lambda''_2))}; \\ p_2(z) &= (b-1)p_0(z) + b p_1(z); \quad p_3(z) = (\lambda_2 p_1(z) + \lambda_1 p_2(z)) / \mu; \\ b &= C_2 / C_1; \quad \gamma_1 = \frac{\lambda'_1}{\lambda_1}; \quad \sum_{i=0}^3 \int_0^{z_0} p_i(z) dz + \sum_{i=4}^8 P_i = 1; \\ B &= \frac{\mu_2}{\mu} (\lambda'_1 - \lambda_1) + \frac{\mu_1}{a\mu} (\mu + \lambda'_1 + \lambda_2); \quad C = \mu(1 - \gamma_1) + \frac{\mu_2 + \lambda\gamma_1}{b-1}. \end{aligned} \quad (8.163)$$

Подставляя $p_i(z)$ и P_i в нормировочное условие, находим сначала P_7 , затем $p_0(0)$, $p_1(0)$, P_4 , P_5 , P_0 , P_1 и, наконец, коэффициент готовности

$$K_{г.с}(z_0, b) = P_0 + P_1 + P_4.$$

При $\lambda'_i = \lambda''_i$, $\lambda_i = \lambda$ и $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2$, $a = b$ коэффициенты готовности для систем, имеющих $C_1 > C_2$ и $C_1 < C_2$, совпадают. Поэтому можно пользоваться формулой (8.161).

Расчеты по формулам (8.161)–(8.163) показывают, что для получения $K_{г.с}(z_0, b)$, близких к предельно достижимым, вовсе не нужно иметь большой запас производительности. Достаточный запас имеет тот же порядок, что и отношение λ/μ . Так, $\lambda/\mu = 0,1$ запас производительности в 10% снижает значение коэффициента простоя до уровня, отличающегося всего на 9,4% от минимально возможного, а запас в 20% — на 6%.

Увеличение емкости накопителя может в определенной степени компенсировать снижение запаса производительности, и наоборот. Так, при $\lambda / \mu = 0,1$ значение $K_{г.с} = 0,884$ достигается при $\mu z_0 = 4$ и $b = 1$ или при $\mu z_0 = 2$ и $b = 1,05$, то есть запас производительности в 5% позволяет уменьшить вдвое емкость накопителя при сохранении неизменным значения коэффициента готовности.

Пример 8.7. Автоматическая станочная линия разделена на два участка одинаковой производительности с промежуточным бункером емкостью, достаточной для того чтобы принять всю продукцию, изготовленную первым участком в течение 1 ч. Интенсивности отказов и восстановлений равны $\lambda_1 = 0,2 \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,02 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_1 = 1 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_2 = 0,2 \text{ ч}^{-1}$. Необходимо найти коэффициент готовности и вероятности состояний линии на стационарном участке эксплуатации для трех режимов работы: 1) во время ремонта одного из участков другой работает, даже если бункер пуст (переполнен); 2) при переполнении бункера первый участок выключается; второй участок при пустом бункере продолжает работу; 3) если один участок в ремонте, а бункер пуст (переполнен), то другой участок выключается. Как изменится коэффициент готовности, если на одном из участков создать запас производительности в 10%?

Решение. Согласно исходным данным, $z_0 = 1$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,22 \text{ ч}^{-1}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1,2 \text{ ч}^{-1}$, $\nu = 0,5$. В первом режиме $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\lambda'_2 = \lambda_2$; во втором режиме $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2 = \lambda_2$; в третьем — $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 0$. Результаты расчетов по формулам (8.156)–(8.159) приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Характеристики надежности автоматической станочной линии

Режим	P_0	P_1	P_2	P_4	P_5	P_6	P_7	P_9	$K_{г.с}$
1	0,076	0,014	0,014	0,056	0,062	0,010	0,1375	0,6254	0,7717
2	0,075	0,014	0,014	0,066	0,072	0,00	0,1360	0,6182	0,7731
3	0,067	0,012	0,012	0,058	0,064	0,00	0,1417	0,6438	0,7803
$a = 1,1$	0,544	0,062	0,007	0,217	0,069	0,012	0,0857	—	0,8232

Из данных, приведенных в табл. 8.1, следует, что отключение участков уменьшает коэффициент простоя на 3,8%. Во время работоспособного состояния системы в первом режиме 81% времени составляет интервал с пустым бункером, 7,3% — интервал с полным бункером и 11,7% — интервал с промежуточным заполнением. В третьем режиме эти интервалы имеют следующие пропорции: 82,5, 7,4 и 10,1%. Заполнение бункера имеет экспоненциальное распределение $p(z) = a \exp(-bz)$ со следующими параметрами: 1) $a = 0,113$, $b = 0,1074$; 2) $a = 0,1119$, $b = 0,1074$; 3) $a = 0,09886$, $b = 0,1074$.

Если в режиме 1 создать запас производительности первого участка в 10%, то коэффициент готовности возрастает на 0,0515. В работоспособном состоянии 26,3% времени составляет интервал с полным бункером и 73,3% — интервал с промежуточным заполнением бункера. Если, напротив, запас производительности в 10% имеет второй участок, то $K_{г.с} = 0,7682$. Это меньше, чем при одинаковой производительности. Этот эффект можно объяснить тем, что в этом случае

увеличивается доля интервала, в котором бункер ждет. А это при отказе Y_1 приводит к немедленному простое системы.

8.5.3. Расчет коэффициента готовности многофазной системы при одинаковой производительности устройств

Многофазовая система с одинаковой производительностью устройств состоит из m устройств, разделенных накопителями H_k , $k = 1 \dots m - 1$, имеющих одинаковую производительность C . Емкости накопителей, вообще говоря, различны и равны z_{0i} , $i = 1 \dots m - 1$. Полагаем, что на время простоя в ожидании загрузки устройства выключаются, и поэтому $\lambda'_k = 0$. Кроме того, интенсивности восстановления устройств μ_i одинаковы и равны μ .

Для определения коэффициента готовности используется приближенный метод, идея которого изложена в работе [16] при анализе другой системы. Суть метода состоит в следующем. Из (8.156) при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и $\lambda'_1 = \lambda'_2 = 0$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ находим:

$$K_{\text{г.с}}(z_0) = \frac{\mu(v-1)(1+ve^{Az_0}) + 2\mu v(e^{Az_0} - 1)}{(v-1)(\lambda + \mu)(1+ve^{Az_0}) + v(\lambda + 2\mu)(e^{Az_0} - 1)}; \quad A = \frac{v-1}{v+1} \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right); \quad v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Отсюда коэффициент простоя

$$K_{\text{п.с}}(z_0) = \frac{\lambda(1+ve^{Az_0}) + v(e^{Az_0} - 1)}{(v-1)(\lambda + \mu)(1+ve^{Az_0}) + v(\lambda + 2\mu)(e^{Az_0} - 1)}. \quad (8.164)$$

Преобразуем (8.164) к виду

$$K_{\text{п.с}}(z_0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(1 - \frac{1}{2} g(\lambda, v) \right); \quad (8.165)$$

$$g(\lambda, v) = \frac{2\mu v(e^{Az_0} - 1)}{(v-1)(\lambda + \mu)(1+ve^{Az_0}) + v(\lambda + 2\mu)(e^{Az_0} - 1)}. \quad (8.166)$$

Функция $g(\lambda, v)$ обладает свойством $g(\lambda, 1/v) = g(\lambda, v)$. Умножая почленно (8.165) на $\lambda + \mu$ и используя введенные обозначения, получим:

$$\lambda_1^* = \lambda_1 + \lambda_2 \left(1 - \frac{v+1}{2v} g(\lambda, 1/v) \right); \quad \lambda_2^* = \lambda_2 + \lambda_1 \left(1 - \frac{v+1}{2} g(\lambda, v) \right); \quad v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (8.167)$$

Здесь $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_c$ — интенсивность отказов двухфазной системы в стационарном режиме.

Многофазная система сводится к двум подсистемам Y'_k и Y''_{k+1} , разделенным накопителем H_k , $k = 1 \dots m - 1$. Хотя система $Y'_k - H_k Y''_{k+1}$ и выглядит как двухфазная, для расчета ее надежности нельзя использовать формулы (8.164)–(8.167), так как интенсивности отказов Y'_k и Y''_{k+1} больше, чем интенсивности отказов входящих в подсистему устройств. Будем разыскивать интенсивность отказов Y'_k как сумму

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k + \Delta \lambda_k^* + \Delta \lambda_k^{**},$$

где поправки имеют следующий смысл: $\Delta\lambda_k^*$ — интенсивность отказов Y'_k из-за истощения запасов при работоспособном Y_k ; $\Delta\lambda_k^{**}$ — интенсивность отказов Y_k из-за переполнения H_k . Полагая

$$\lambda_k^* = \lambda_k + \Delta\lambda_k^*; \quad \lambda_k^{**} = \lambda_k + \Delta\lambda_k^{**}; \quad \lambda = \lambda_k^* + \lambda_k^{**},$$

запишем (8.167) в виде

$$\begin{aligned} \lambda_k^{**} &= \lambda_k + \lambda_{k+1}^{**} - \frac{1}{2} \lambda g(\lambda, 1/v_k); \quad v_k = \lambda_{k+1}^{**} / \lambda_k^*, \quad k = 1 \dots m-1; \\ \lambda_{k+1}^* &= \lambda_{k+1} + \lambda_k^* - \frac{1}{2} \lambda g(\lambda, v_k), \quad k = 1 \dots m-1. \end{aligned} \quad (8.168)$$

Добавляя сюда еще два равенства: $\lambda_1^* = \lambda_1$, $\lambda_m^{**} = \lambda_m$, получим замкнутую систему из $2m - 2$ алгебраических уравнений относительно $2m - 2$ неизвестных чисел λ_k^{**} и λ_{k+1}^* . Поскольку при $k = m$ отказ системы может быть только по двум причинам — отказ Y_m и истощение запасов в накопителях $H_1 H_{m-1}$, — постольку интенсивность отказов системы

$$\lambda_c = \lambda_m + \Delta\lambda_m^* = \lambda_m^*.$$

Решая (8.168) и получая значение λ_m^* , найдем коэффициент готовности системы

$$K_{г.с}(Z_0) = \frac{\mu}{(\mu + \lambda_m^*)}; \quad Z_0 = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0,m-1}).$$

В системе с одинаковыми устройствами ($\lambda_i = \lambda$) и одинаковыми накопителями ($z_{0i} = z_0$) система уравнений (8.168) упрощается, так как $\lambda_{k+1}^* = \lambda_{m-k}^{**}$, и приобретает вид

$$\lambda_{k+1}^* = \lambda + \lambda_k^* - \frac{1}{2} (\lambda_k^* + \lambda_{m-k}^{**}) g(\lambda_k^* + \lambda_{m-k}^{**}, \lambda_{m-k}^* / \lambda_k^*), \quad k = 1 \dots m-1.$$

Пример 8.8. Автоматическая станочная линия разделена на четыре участка с тремя промежуточными бункерами. Интенсивности отказов участков и емкости бункеров приведены в табл. 8.2. Интенсивность восстановления $\mu = 1 \text{ ч}^{-1}$. Найти коэффициент простоя линии.

Таблица 8.2. Характеристики автоматической станочной линии

k	$\lambda_k, \text{ч}^{-1}$	$z_{0k}, \text{ч}$	k	$\lambda_k, \text{ч}^{-1}$	$z_{0k}, \text{ч}$
1	0,01	10	3	0,10	5
2	0,02	2	4	0,01	—

Решение. Из (8.168) находим шесть уравнений:

- $\lambda_2^* = \lambda_2 + \lambda_1 \left(1 - \frac{v_1 + 1}{2} g(\lambda_1(1 + v_1), v_1) \right), \quad v_1 = \lambda_2^{**} / \lambda_1;$
- $\lambda_3^* = \lambda_3 + \lambda_2^* \left(1 - \frac{v_2 + 1}{2} g(\lambda_2^*(1 + v_2), v_2) \right), \quad v_2 = \lambda_3^{**} / \lambda_2^*;$

$$3) \quad \lambda_4^* = \lambda_4 + \lambda_3^* \left(1 - \frac{v_3 + 1}{2} g(\lambda_3^*(1 + v_3), v_3) \right), \quad v_3 = \lambda_3^{**} / \lambda_2^*;$$

$$4) \quad \lambda_2^{**} = \lambda_2 + \lambda_3^{**} \left(1 - \frac{v_2 + 1}{2v_2} g(\lambda_3^{**}(1 + v_2) / v_2, 1 / v_2) \right);$$

$$5) \quad \lambda_1^{**} = \lambda_1 + \lambda_2^{**} \left(1 - \frac{v_1 + 1}{2v_1} g(\lambda_2^{**}(1 + v_1) / v_1, 1 / v_1) \right);$$

$$6) \quad \lambda_3^{**} = \lambda_3 + \lambda_4 \left(1 - \frac{v_3 + 1}{2v_3} g \left(\lambda_4(1 + v_3) / v_3, \frac{1}{v_3} / v_3 \right) \right).$$

Для решения этой системы используем метод итераций. Задаем в качестве нулевого приближения $\lambda_2^* = \lambda_2$, $\lambda_3^* = \lambda_3$. Затем из второго и пятого уравнения определяем λ_3^{**} и λ_2^* . Эти значения подставим в 1) и 6) и найдем первые приближения λ_2^* и λ_3^* . Процедуру повторяем до получения заданной точности. Когда найдены λ_2^* и λ_3^* , из 3) и 4) находим λ_4^* и λ_1^{**} . Результаты двух итераций представлены в табл. 8.3, из которой видно, что коэффициент простоя линии на 5,7% меньше коэффициента простоя наименее надежного третьего участка из-за его собственных отказов и на 48% меньше, чем коэффициент простоя линии без бункеров.

Таблица 8.3. Результаты расчета надежности автоматической станочной линии

№	λ_2^*	λ_2^{**}	λ_3^*	λ_3^{**}	λ_1^{**}	λ_4^*	K_n
1	0,02087	0,10560	0,10560	0,10095	—	—	0,0934
2	0,02096	0,10685	0,10667	0,10125	0,10781	0,10792	0,0946

Из расчетов следует также, что наименее надежные участки следует располагать в середине или даже в начале линии.

Список литературы

1. Черкесов Г. Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. — М.: Сов. радио, 1974. — 296 с.
2. Креденцер Б. П. Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью. — Киев: Наук. думка, 1978. — 238 с.
3. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности АСУ / ЛПИ. — Л., 1975. — 220 с. — Гл. 7.
4. Черкесов Г. Н. Вероятностные модели производительности контролируемых вычислительных систем: Учеб. пособие / ЛПИ. — Л., 1983. — 78 с.
5. ГОСТ 27.204 – 83. Надежность в технике. Технологические системы. Технические требования к методам оценки надежности по параметрам производительности. — М.: Изд-во стандартов, 1984. — 38 с.
6. Надежность в технике. Выбор способов и методов резервирования. Рекомендации Р50-54-82-88. — М.: Изд-во стандартов, 1988. — 94 с.

7. *Копп В. Я., Обжерин Ю. Е., Песчанский А. И.* Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием / Сев ГТУ. — Севастополь, 2000. — 284 с.
8. *Черкесов Г. Н., Сухарев М. Г., Морозова В. Н.* Надежность систем энергетики и их оборудования: Т. 3. Надежность систем газо- и нефтеснабжения. Кн. 1. — М.: Недра, 1994. — С. 87—210.
9. *Черкесов Г. Н., Креденцер Б. П.* Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 5. Проектный анализ надежности. — М.: Машиностроение, 1988. — С. 135—239.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. Т. 1. — М.: Мир, 1964. — 498 с.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. Т. 2. — М.: Мир, 1967. — 748 с.
12. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. — Минск: Наука и техника, 1968. — 296 с.
13. *Черкесов Г. Н., Голощапов С. Г., Митрофанов С. Ф.* Одномерное обращение преобразования Лапласа с использованием полиномов Лаггера // Алгоритмы и программы ГФАП. — 1987. — № 4. — С. 3.
14. *Черкесов Г. Н., Голощапов С. Г., Митрофанов С. Ф.* Двухмерное обращение преобразования Лапласа с использованием полиномов Лаггера // Алгоритмы и программы ГФАП. — 1987. — № 4. — С. 3.
15. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
16. *Севастьянов Б. А.* Задача о влиянии емкости бункеров на среднее время простоя автоматической линии станков // Теория вероятностей и ее применения. — 1962. — Т. VII, вып. 4. — С. 11—24.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте перечень случайных величин, изучаемых в системах с резервом времени.
2. Дайте перечень показателей надежности СВР.
3. Классифицируйте системы с резервом времени.
4. Каков порядок выбора величины мгновенно пополняемого резерва времени, достаточной для обеспечения надежности системы?
5. Приведите основное уравнение для системы с непополняемым резервом времени.
6. Дайте сравнение временного и структурного резервирования.
7. В чем заключается защита наработки от обесценивания? Каково оптимальное разбиение задания на этапы?
8. Каков оптимальный период периодического контроля работоспособности?
9. Какова фактическая производительность многоканальной системы с учетом надежности?
10. Перечислите способы повышения надежности многофазной системы, сравните их.

Глава 9

Надежность систем с ограниченным ЗИП

9.1. Постановка задачи

Рассмотренные в главах 7 и 8 модели надежности восстанавливаемых систем используют предположение о том, что устранение отказа происходит путем ремонта в ремонтном органе за некоторое случайное и относительно небольшое в среднем время восстановления. Причем возможное количество восстановлений в интервале функционирования априорно ничем не ограничено. Отказом резервированной системы признается событие, при котором время восстановления превышает либо резервное время, либо время до отказа резервного устройства. Многие реальные технические системы имеют такие условия функционирования, когда ремонтный орган находится в непосредственной близости от места эксплуатации системы. Тогда вполне обоснованным является и допущение о неограниченном количестве возможных восстановлений.

Однако известно большое количество различных по масштабам и назначению систем, в том числе систем управления, восстановление работоспособности которых путем ремонта не удастся организовать по следующим причинам. Во-первых, далеко не всегда на месте эксплуатации может быть развернута ремонтная база. Это относится не только к системам, имеющим серьезные ограничения по весу и габаритам, например к бортовым системам (на обитаемых орбитальных космических аппаратах, самолетах, судах), но и ко многим системам военного назначения, системам управления на транспорте, системам, эксплуатируемым в малонаселенных труднодоступных регионах страны. Во-вторых, при современном высокотехнологичном производстве ремонт часто невозможен или экономически нецелесообразен вне крупных, хорошо оснащенных специализированных предприятий.

Альтернативой ремонту является использование комплектов запасного имущества и принадлежностей (ЗИП), когда восстановление работоспособности

сводится к замене отказавшего модуля (сменной части) работоспособной запасной частью (ЗЧ), что вполне может выполнить эксплуатационный персонал. В этом случае, однако, возникает другая проблема. По соображениям ограничений на суммарную стоимость запасных частей не удастся создать настолько большие начальные запасы сменных модулей, которые позволяли бы гарантированно иметь ЗЧ при любом отказе в системе. Это значит, что кроме ранее указанной причины отказа резервированной системы (новый отказ до завершения восстановления) появляется и другая причина, а именно — отсутствие в комплекте ЗИП необходимой ЗЧ. Поскольку время пополнения запасов в комплекте существенно превышает допустимое время восстановления работоспособности, изделие после исчерпания запасов становится невозстанавливаемым по отказам данного типа до ближайшего регламентного или случайного момента пополнения комплекта ЗИП.

Влияние ЗИП на надежность системы существенно зависит от соотношения между временем замены отказавшего модуля на ЗЧ и допустимым временем перерыва в работе системы. Здесь возможны три варианта. Время замены отказавшего модуля на ЗЧ обычно составляет несколько десятков минут. Если вследствие инерционности протекающих в системе процессов перерыв такой длительности не приводит к нарушению качества ее функционирования, то в модели надежности можно пренебречь временем замены по сравнению с наработкой на отказ и считать это время нулевым. Если же создаваемый инерционностью процессов резерв времени сравним со временем замены, то при оценке надежности надо использовать формулы для систем с мгновенно пополняемым резервом времени (см. 8.2). Наконец, если допустимое время перерыва в работе столь мало, что заменить за это время отказавший модуль работоспособной ЗЧ практически невозможно, то комплект ЗИП не может обеспечить повышение надежности системы. Тогда надо использовать структурное резервирование и комплект ЗИП для восстановления структуры резервированной системы. В этом случае время замены и время пополнения комплекта ЗИП сравниваются с наработкой до отказа резервного модуля.

По назначению различают три разновидности комплекта ЗИП. Одиночный ЗИП (ЗИП-О) предназначен для восстановления работоспособности одного образца изделия и размещается вблизи места его эксплуатации, чтобы обеспечить малое время замены (несколько десятков минут). Начальный уровень запасов комплекта ЗИП-О пополняется в соответствии с принятыми правилами из неиссякающего источника пополнения (НИП). При эксплуатации одновременно нескольких образцов изделия (обычно не менее четырех) может быть создан групповой ЗИП (ЗИП-Г), который одинаково доступен любому из образцов изделия. Основное отличие ЗИП-Г от ЗИП-О состоит в существенно большем времени доставки ЗЧ к месту эксплуатации образца, в котором произошел отказ. Поэтому создание комплекта ЗИП-Г возможно в двух случаях: допустимое время перерыва довольно велико, но существенно меньше интервала времени между соседними отказами; по всем типам модулей, представленных в комплекте ЗИП-Г, в системе имеется внутреннее структурное резервирование. Комплект ЗИП-Г также пополняется из НИП.

Если эксплуатируются несколько образцов изделия, но не выполняются необходимые условия для создания ЗИП-Г по одной или нескольким типам сменных модулей, то создают двухуровневую систему ЗИП (ЗИП-2У). На первом (нижнем) уровне размещают комплекты ЗИП-О, на втором (верхнем) уровне — комплект ЗИП-Г (рис. 9.1). Комплект ЗИП-Г пополняется из НИП, а комплекты ЗИП-О могут пополняться либо из комплекта ЗИП-Г, если в нем есть ЗЧ такого же типа, либо непосредственно из НИП, если ЗЧ данного типа в ЗИП-Г отсутствует.

Для пополнения комплектов ЗИП могут применяться различные способы. При периодическом пополнении (ПП) назначается период T_i пополнения запасов i -го типа, по истечении которого запасы пополняются до первоначального уровня. Если запасы исчерпаны до момента T_i и произошел еще один отказ, то система переходит в неработоспособное состояние до очередного пополнения запасов. При пополнении с экстренными доставками (ПЭД) также назначается период T_i . Однако в этом случае, в отличие от ПП, после исчерпания запасов и следующего отказа организуется досрочная (экстренная) доставка ЗЧ для замены отказавшего модуля и пополнения запасов до начального уровня. При этом уменьшается среднее время ожидания восстановления работоспособности. При пополнении по заданному уровню (ПУ) заявка на пополнение запасов формируется после снижения запасов до установленного уровня, в том числе нулевого, еще до того, как возникает следующий отказ. Заявка всегда формируется при работоспособном состоянии системы. Этим способ ПУ отличается от ПЭД. Способ ПУ характеризуется пороговым уровнем запасов K и распределением (или средним значением) времени доставки. При непрерывном пополнении (НП) заявка на пополнение запасов формируется и передается на исполнение после каждого отказа и использования каждой ЗЧ. Способ НП характеризуется распределением или средним значением времени доставки ЗЧ.

Для характеристики достаточности комплекта ЗИП используют количественные показатели, называемые далее показателями достаточности (ПД). Обычно применяют один из следующих показателей: коэффициент готовности комплекта ЗИП $K_{г\text{ЗИП}}$, вероятность достаточности $P_{\text{ЗИП}}(T)$, среднее время задержки в выполнении заявки на ЗЧ $\Delta t_{\text{ЗИП}}$. Вероятность достаточности комплекта ЗИП используют при периодическом пополнении запасов или пополнении с экстренными доставками при одинаковом для всех типов запасов периодом T . Коэффициент готовности комплекта ЗИП применяют при любых способах пополнения запасов. Среднее время задержки применяют только для структурно резервированных систем.

Введение показателя достаточности преследует две цели.

Обеспечить выбор состава комплекта ЗИП без проведения расчетов надежности и до проведения этих расчетов.

Обеспечить возможность упрощенного учета состава комплекта ЗИП при оценке надежности изделия.

Рассмотрим теперь более подробно, как достигаются эти цели. Сначала заметим, что в техническом задании на проектирование изделий обычно нормируют

показатели надежности, но не нормируют показатели достаточности комплектов ЗИП. Поэтому нормативное значение ПД, равное $ПД_0$, должно быть вычислено с помощью нормативных значений показателей надежности.

Если в качестве ПД выбрана вероятность достаточности $P_{\text{ЗИП}}(T)$, то нормативное значение $P_{\text{ЗИП}}^0(T)$ определяют так. Сначала проводят расчет вероятности безотказной работы изделия при условии неограниченного ЗИП:

$$P_c(t, \infty) = \prod_{i=1}^N P_i(t, \infty),$$

где N — количество типов сменных частей, используемых в изделии. Затем находят нормативное значение ПД:

$$P_{\text{ЗИП}}^0(t) = P_c^0(t) / P_c(t, \infty),$$

где $P_c^0(t)$ — нормативное значение ВБР. Если время функционирования t и период пополнения T не совпадают, то корректируют нормативное значение ПД:

$$P_{\text{ЗИП}}^0(T) = (P_{\text{ЗИП}}^0(t))^{T/t}. \quad (9.1)$$

Если в качестве ПД используют $K_{\text{гЗИП}}$, то нормативное значение находят по формуле

$$K_{\text{гЗИП}}^0 = \frac{K_{\text{г.с}}^0}{K_{\text{г.с}}(\infty)}, \quad (9.2)$$

где $K_{\text{г.с}}^0$ — нормативное значение коэффициента готовности системы; $K_{\text{г.с}}(\infty)$ — расчетное значение коэффициента готовности системы при неограниченном ЗИП.

При использовании $\Delta t_{\text{ЗИП}}$ в качестве ПД нормативное значение

$$\Delta t_{\text{ЗИП}}^0 = -\ln(K_{\text{гЗИП}}^0) / \lambda_c,$$

где $K_{\text{гЗИП}}^0$ определяют по формуле (9.2). Ситуация усложняется, если нормируется коэффициент оперативной готовности системы $K_{\text{о.г.с}}(\tau)$, где τ — оперативное время выполнения ожидаемой задачи. В этом случае необходимо нормативное значение $K_{\text{о.г.с}}(\tau)$ преобразовать в нормативное значение $K_{\text{г.с}}^0$. Это можно сделать, в частности, таким образом. Сначала найти вероятность безотказной работы системы при отсутствии ЗИП:

$$P_c(\tau, L=0) = \prod_{i=1}^N P_i(\tau, L=0),$$

а затем нормативное значение

$$K_{\text{г.с}}^0 = K_{\text{о.г.с}}^0(\tau) / P_c(\tau, L=0).$$

Требования к комплекту ЗИП предъявляют в виде

$$P_{\text{ЗИП}}(L, S, T) \geq P_{\text{ЗИП}}^0; \quad (9.3)$$

$$K_{\text{гЗИП}}(L, S, \alpha, \beta) \geq K_{\text{гЗИП}}^0; \quad (9.4)$$

$$\Delta t_{\text{ЗИП}}(L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) \leq \Delta t_{\text{ЗИП}}^0, \quad i \in M_1, \quad (9.5)$$

где $L = (L_1, \dots, L_N)$ — вектор запасов в комплекте ЗИП; $S = (S_1, \dots, S_N)$ — вектор структурных схем, используемых в изделии для модулей различных типов; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — вектор индикаторов способов пополнения комплекта ЗИП ($\alpha_i = 1$ при ПП, $\alpha_i = 2$ при ПЭД, $\alpha_i = 3$ при ПУ, $\alpha_i = 4$ при ПН); $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ — вектор параметров способа пополнения запасов i -го типа; M_1 — множество типов модулей, для которых применяют внутреннее структурное резервирование. Векторы α и β задают потому, что, вообще говоря, допускается для каждого типа запасов выбирать свой способ пополнения и в каждом выбранном способе выбирать конкретные значения параметров.

Чтобы удовлетворить требованию (9.3), необходимо рассчитать ПД при некотором фиксированном комплекте ЗИП, задаваемом векторами (L, α, β) :

$$P_{\text{ЗИП}}(L, T) = \prod_{i=1}^N P_{\text{ЗИП}i}(L_i, T); \quad (9.6)$$

$$K_{\text{г.ЗИП}}(L, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N K_{\text{г.ЗИП}i}(L_i, \alpha_i, \beta_i). \quad (9.7)$$

Рассчитывают ПД без учета внутреннего структурного резервирования, так как потребление ЗЧ происходит одинаково при отказах как основных, так и резервных элементов.

Следует обратить внимание на то, что нормирование ПД, согласно (9.3) и (9.4), происходит по всему комплекту ЗИП в целом, а распределение ПД по отдельным типам запасов — только при расчете фактического уровня ПД по формулам (9.6) и (9.7). Поэтому выполнение требований (9.5) желательно, но, вообще говоря, не обязательно, так как при нарушении требования (9.5) по одной из позиций неравенства (9.3) или (9.4) все-таки могут быть выполнены за счет других сомножителей в (9.6) или (9.7).

Согласно [1], учет комплекта ЗИП при оценке надежности при отсутствии структурного резервирования проводят по формулам

$$P_c(T, L) = P_c(T, \infty) P_{\text{ЗИП}}(L, T); \quad (9.8)$$

$$K_{\text{г.с}}(L, \alpha, \beta) = K_{\text{г.с}}(\infty) K_{\text{г.ЗИП}}(L, \alpha, \beta); \quad (9.9)$$

$$K_{\text{а.г.с}}(\tau, L, \alpha, \beta) = K_{\text{г.с}}(L, \alpha, \beta) P(\tau).$$

Если все модули структурно резервированы, то сначала рассчитывают

$$K_{\text{г.ЗИП}}(L, S, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N K_{\text{г.ЗИП}i}(L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i); \quad (9.10)$$

$$\Delta t_{\text{г.ЗИП}i}(L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) = -\ln(K_{\text{г.ЗИП}i}) / (k_i \lambda_i), \quad (9.11)$$

где λ_i — интенсивность отказов модулей i -го типа; k_i — количество модулей i -го типа в изделии. Затем корректируют среднее время восстановления работоспособности i -й резервированной группы:

$$\bar{T}_{\text{в}i}(L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) = \bar{T}_{\text{в}i}(\infty) + \Delta t_{\text{г.ЗИП}i}(L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i). \quad (9.12)$$

Наконец вычисляют вероятность безотказной работы, коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности:

$$P_c(t, L, S, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N P_i(t, S_i, \bar{T}_{wi}, \infty); \quad (9.13)$$

$$K_{г.с}(L, S, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N K_{гi}(S_i, \bar{T}_{wi}, \infty); \quad (9.14)$$

$$K_{о.г.с}(\tau, L, S, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N K_{гi}(S_i, \bar{T}_{wi}, \infty) P_i(\tau, S_i, \bar{T}_{wi}).$$

Скорректированное среднее время восстановления i -й резервированной группы со структурой S_i зависит от начального уровня запасов, способа их пополнения и параметров способа пополнения. Но рассчитывают показатели надежности по формулам, полученным в предположении неограниченного ЗИП.

Если некоторые модули из множества M_0 не резервированы, а остальные модули (из множества M_1) резервированы по схеме S_i , то нормативные значения ПД представляют в виде

$$P_{ЗИП}^0 = P_{ЗИП,0}^0 P_{ЗИП,1}^0; \quad K_{гЗИП}^0 = K_{гЗИП,0}^0 K_{гЗИП,1}^0, \quad (9.15)$$

где нижний индекс 0 отмечает множество M_0 , а индекс 1 — множество M_1 . Тогда условия (9.3) и (9.4) имеют вид

$$\begin{aligned} P_{ЗИП,0}(t, L^0, T) &\geq P_{ЗИП,0}^0; \quad P_{ЗИП,1}(t, L^1, S^1, T) \geq P_{ЗИП,1}^0; \\ K_{гЗИП,0}(L^0, \alpha^0, \beta^0) &\geq K_{гЗИП,0}^0; \quad K_{гЗИП,1}(L^1, S^1, \alpha^1, \beta^1) \geq K_{гЗИП,1}^0; \\ P_{ЗИПj}(t, L^j, T) &= \prod_{i \in M_j} P_{ЗИПj,i}(t, L_i, T), \quad j=0,1; \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$K_{гЗИП,0}(L^j, \alpha^j, \beta^j) = \prod_{i \in M_j} K_{гЗИПj,i}(L_i, \alpha_i, \beta_i), \quad j=0,1. \quad (9.17)$$

Для нерезервированной части выбирают $K_{гЗИП,0} = K_{гЗИП}$. Вероятность безотказной работы и коэффициент готовности системы находят по формулам

$$P_c(t, L, S, \alpha, \beta) = P_{с,0}(t, \infty) P_{ЗИП}(L, T) \prod_{i \in M_1} P_i(t, S_i, \bar{T}_{wi}, \infty); \quad (9.18)$$

$$K_{г.с}(L, S, \alpha, \beta) = K_{г.с,0}(\infty) K_{гЗИП}(L, \alpha, \beta) \prod_{i \in M_1} K_{гi}(S_i, \bar{T}_{wi}, \infty); \quad (9.19)$$

$$\bar{T}_{wi} = \bar{T}_{wi\infty} - \ln K_{гЗИПi}(L_i, \alpha_i, \beta_i), \quad i \in M_1.$$

Заметим, что вероятность безотказной работы может быть рассчитана по формулам (9.8) или (9.18), даже если в качестве ПД выбран $K_{гЗИП}$. В этом случае в (9.8) и (9.18) надо заменить $P_{ЗИП}(L, T)$ на $K_{гЗИП}$.

Коэффициент оперативной готовности находят по формуле

$$K_{о.г.с}(\tau, L, S, \alpha, \beta) = K_{г.с,0}(L, S, \alpha, \beta) P_0(\tau^0) \prod_{i \in M_1} K_{о.гi}(\tau_i, L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i); \quad (9.20)$$

$$K_{о.гi}(\tau_i, L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) = K_{гi}(S_i, \bar{T}_{wi}, \infty) P_i(\tau_i, S_i), \quad i \in M_1.$$

Заметим, что разбиение ПД на два множителя в (9.15) можно провести различными способами, и эта неоднозначность требует упорядочения возможных

вариантов. Неопределенность исчезает или уменьшается, если использовать процедуру оптимизации.

Использование формул (9.8) и (9.9) существенно упрощает задачу оценки надежности при ограниченном ЗИП, так как состав комплекта ЗИП определяется по показателям достаточности без расчета показателей надежности и до этого расчета, а затем уже решается вторая часть задачи — рассчитывается надежность изделия при известном составе комплекта ЗИП. Вместе с тем очевидно, что формулы (9.8), (9.9), (9.13), (9.14), (9.18)–(9.20) для показателей надежности являются приближенными, причем заранее не известен знак погрешности по сравнению с точной формулой. Поэтому в ряде случаев они могут оказаться неприемлемыми, и надо искать точные формулы.

При оценке надежности по точным формулам запасные части из комплекта ЗИП рассматриваются как поэлементный ненагруженный резерв, восстанавливаемый по установленным правилам. В этом случае отпадает надобность в использовании показателей достаточности, и их расчет может проводиться разве только для сведения. Выбирают состав комплекта ЗИП, способ пополнения и параметры способа пополнения исходя из требований к нормируемому показателю надежности:

$$\begin{aligned} P_c(t, L, S, \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^N P_i(t, L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) \geq P_c^0; \\ K_{г.с}(L, S, \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^N K_{г.с}(L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) \geq K_{г.с}^0; \\ K_{о.г.с}(\tau, L, S, \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^N K_{о.г.с}(\tau_i, L_i, S_i, \alpha_i, \beta_i) \geq K_{о.г.с}^0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Точные формулы не содержат методической погрешности, связанной с учетом ограниченности ЗИП. Однако они все-таки менее универсальны, чем приближенные формулы. Поэтому их количество так же велико, как велико разнообразие структур резервированных систем. Основное внимание при построении точных формул уделяется пакету типовых структур, с помощью которых удастся обеспечить до 80–90% практических потребностей при проектировании. Если в системе появляется структура резервирования, не вошедшая в основной пакет, надо заново делать вывод расчетной формулы. С этой целью в данной главе наряду с расчетными формулами для типовых структур излагается общий метод построения расчетных формул для любой заданной структуры.

Далее рассмотрим методы и формулы для расчета состава комплекта ЗИП и показателей надежности исходя из методик приближенного и точного расчета при различных структурах комплекта ЗИП и различных способах пополнения запасов.

9.2. Расчет показателей достаточности комплекта одиночного ЗИП

Рассматривается система, состоящая из N групп однотипных элементов, в составе которой i -я группа содержит n_i однотипных элементов, имеющих интенсивность отказов λ_{ji} . Для обеспечения надежности в комплект ЗИП вводится L_i

запасных частей i -го типа ($i = 0 \dots N$). Для пополнения запасов i -го типа используется способ («стратегия») α_i ($\alpha_i = 1$ при ПП, $\alpha_i = 2$ при ПЭД, $\alpha_i = 3$ при ПУ, $\alpha_i = 4$ при ПН). В качестве показателя достаточности используют вероятность достаточности комплекта ЗИП $P_{\text{ЗИП}}$ или коэффициент готовности $K_{\text{гЗИП}}$. ПД по запасам i -го типа и ПД комплекта в целом связаны соотношениями

$$P_{\text{ЗИП}}(L, S, T) = \prod_{i=1}^N P_{\text{ЗИП},i}(L_i, \alpha_i, \beta_i); \quad (9.22)$$

$$K_{\text{гЗИП}}(L, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N K_{\text{гЗИП},i}(L_i, \alpha_i, \beta_i). \quad (9.23)$$

Формулы для расчета $P_{\text{ЗИП},i}$ и $K_{\text{гЗИП},i}$ зависят от способа пополнения запасов. Показатель (9.22) используется при периодическом пополнении и пополнении с экстренными доставками, причем периоды пополнения одинаковые, а (9.23) — при любом способе пополнения и при любых значениях параметров способа пополнения.

9.2.1. Периодическое пополнение ($\alpha = 1$)

Группа однотипных элементов и запасные части в комплекте ЗИП того же типа могут быть представлены с помощью модели надежности невосстанавливаемой резервированной системы из n основных и L резервных элементов в ненагруженном режиме (индекс i опускаем). Согласно (6.24), вероятность безотказной работы указанной системы за время t , равное периоду пополнения T , совпадающее численно с вероятностью достаточности комплекта ЗИП по данному типу запасов, следует рассчитывать по формуле

$$P_{\text{ЗИП}}(T, L) = 1 - I(A, L + 1), \quad A = n\lambda T = \lambda_c T. \quad (9.24)$$

В невосстанавливаемой системе коэффициент готовности как вероятность застать систему работоспособной в заданный момент времени совпадает с вероятностью безотказной работы и обозначается $K_{\text{г}}(t)$. Средний по интервалу $(0, T)$ коэффициент готовности находят путем интегрирования (9.24):

$$\begin{aligned} K_{\text{гЗИП}}(T, L) &= \bar{P}_{\text{ЗИП}}(T, L) = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{ЗИП}}(t, L) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (1 - I(\lambda t, L + 1)) dt = 1 - I(A, L) + \frac{L + 1}{A} I(A, L + 1). \end{aligned} \quad (9.25)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\begin{aligned} K_{\text{гЗИП}}(T, 1) &= 1 / A(2 - (2 + A)e^{-A}), \quad A = n\lambda T = na; \\ K_{\text{гЗИП}}(T, 2) &= 1 / A(3 - (3 + 2A + A^2)e^{-A}). \end{aligned} \quad (9.26)$$

9.2.2. Пополнение с экстренными доставками ($\alpha = 2$)

Поскольку заявка на экстренную доставку формируется уже после отказа системы, вероятность безотказной работы системы в течение периода пополнения

находят, как и при периодическом пополнении, по формуле (9.24). Чтобы найти коэффициент готовности комплекта ЗИП, надо представить систему в виде эквивалентного восстанавливаемого элемента с распределением наработки $F(t) = I(\lambda t, L + 1)$ и распределением времени восстановления $F_b(t) = 1 - \exp(-\mu t)$, где $\mu = 1 / \bar{T}_{э.д}, \bar{T}_{э.д}$ — среднее время экстренной доставки. Тогда среднее число моментов экстренной доставки в интервале $(0, t)$ равно среднему числу моментов восстановления эквивалентного элемента. Согласно (3.55) и (3.13), изображение функции интенсивности потока восстановлений

$$sH_2^*(s) = \omega_2^*(s) = \frac{sF^*(s)F_b^*(s)}{1 - F^*(s)F_b^*(s)} = \frac{s\mu F^*(s)}{s + \mu(1 - F^*(s))}; \quad F^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^{L+1}. \quad (9.27)$$

С другой стороны, согласно (3.57), изображение для функции готовности

$$K_r^*(s) = \frac{1 - F^*(s)}{1 - F^*(s)F_b^*(s)} = 1 - \frac{sF^*(s)}{s + \mu(1 - F^*(s))}. \quad (9.28)$$

Сравнивая (9.27) и (9.28), устанавливаем, что

$$K_r^*(s) = 1 - \omega_2^*(s) / \mu; \quad K_r(t) = 1 - \bar{T}_{э.д} \omega_2(t).$$

Средний по интервалу $(0, T)$ коэффициент готовности есть показатель достаточности комплекта ЗИП, называемый коэффициентом готовности комплекта ЗИП:

$$K_{г.ЗИП}(T, L, \bar{T}_{э.д}) = \bar{K}_r(T, L, \bar{T}_{э.д}) = \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \bar{T}_{э.д} \omega_2(t)) dt = 1 - \frac{\bar{T}_{э.д}}{T} H_2(T), \quad (9.29)$$

где $H_2(T)$ — среднее число моментов экстренной доставки за период пополнения T . Найдем явное выражение для функций $\omega_2(t)$ и $H_2(t)$. Для этого представим (9.27) в виде

$$\omega_2^*(s) = \frac{s\mu\lambda^{L+1}}{(s + \mu)(s + \lambda)^{L+1}} = \frac{\mu\lambda^2}{a_0 + sa_1 + \dots + s^{L+1}a_{L+1}}; \quad (9.30)$$

$$a_0 = \lambda(\lambda + (L + 1)\mu); \quad a_1 = (L + 1)(\lambda + L\mu / 2).$$

Оригинал функции (9.30) является смесью экспонент, из которых одна имеет существенно меньший показатель, чем другие, а именно, $s_0 t = a_0 t / a_1$. Пренебрегая слагаемыми, содержащими быстро затухающие экспоненты, найдем приближенное значение для $\omega_2(t)$. Для этого в знаменателе (9.30) надо удалить все слагаемые, имеющие порядки малости $o(s)$. Тогда

$$\omega_2^*(s) \approx \frac{\mu\lambda^2}{a_0 + sa_1} = \frac{\mu\lambda}{\lambda + (L + 1)\mu} \frac{s_0}{s_0 + s}; \quad s_0 = 2\lambda \frac{\lambda + (L + 1)\mu}{(L + 1)(2\lambda + L\mu)}.$$

Отсюда

$$\omega_2(t) = \omega_2(1 - e^{-s_0 t}); \quad \omega_2 = \frac{\mu\lambda}{\lambda + (L + 1)\mu} = \frac{1}{\bar{T}_2}.$$

Интегрируя эту формулу по интервалу $(0, T)$, получим:

$$H_2(T) = \frac{\omega_2}{s_0} (b - 1 + e^{-b}); \quad b = s_0 T = \frac{2a}{L} \left(1 + \frac{\rho}{L+1} \right) / \left(1 + \frac{2\rho}{L} \right); \quad \rho = \lambda \bar{T}_{\text{з.л}}. \quad (9.31)$$

Подставляя эту формулу в (9.29), найдем:

$$K_{\text{г.зип}}(T, L, \bar{T}_{\text{з.л}}) = 1 - \frac{\rho}{Lb(1 + (1 + \rho)/L)} (b - 1 + e^{-b}). \quad (9.32)$$

Если в (9.31) и (9.32) пренебречь ρ за малостью по сравнению с единицей, получим:

$$K_{\text{г.зип}}(T, L, \bar{T}_{\text{з.л}}) \approx 1 - \frac{\bar{T}_{\text{з.л}}}{2T(1 + 1/L)} \left(\frac{2a}{L} - 1 + e^{-2a/L} \right), \quad a = \lambda T. \quad (9.33)$$

Сравним (9.32) и (9.33) с точной формулой при $L = 1$. Согласно (9.27), имеем:

$$\omega_2(s) = \frac{\mu \lambda^2}{(s + s_1)(s + s_2)}; \quad s_{1,2} = \frac{1}{2}(\mu + 2\lambda \mp \mu \sqrt{1 - 4\lambda/\mu}).$$

Выполняя здесь обратное преобразование, интегрируя в интервале $(0, T)$ и подставляя в (9.29), находим:

$$K_{\text{г.зип}}(T, 1, \bar{T}_{\text{з.л}}) = 1 - \frac{\bar{T}_{\text{з.л}}}{T} (\omega_2 T - (\mu(\mu + 2\lambda) - (s_2^2 e^{-s_1 T} - s_1^2 e^{-s_2 T}) / \sqrt{1 - 4\rho})). \quad (9.34)$$

При $\bar{T}_{\text{з.л}} \ll 1/\lambda$ имеем $\omega_2 \approx \lambda/2$, $s_2 \approx \mu$, $s_1 \approx 2\lambda$. Тогда (9.34) приобретает вид

$$K_{\text{г.зип}}(T, L, \bar{T}_{\text{з.л}}) \approx 1 - \frac{\bar{T}_{\text{з.л}}}{4T} (2a - 1 + e^{-2a}), \quad a = \lambda T. \quad (9.35)$$

Легко установить, что (9.35) является частным случаем (9.33) при $L = 1$.

9.2.3. Пополнение по уровню ($\alpha = 3$)

Граф состояний системы содержит $L + 2$ состояния: состояния $0 \dots L$ — работоспособные, а состояние с номером $L + 1$ — неработоспособное (рис. 9.1).

Заявка на доставку $L - k$ запасных частей формируется при попадании системы в состояние $L - k$, в котором в комплекте ЗИП имеется еще k запасных частей. Эта заявка не корректируется, если до поставки партии ЗЧ возникнут дополнительные отказы. Интенсивность отказов равна $\lambda = n\lambda_{\text{з}}$, время выполнения заявки имеет экспоненциальное распределение $F_b(t) = 1 - \exp(-\mu t)$. Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Согласно графу состояний (рис. 9.1, а), система уравнений относительно стационарных вероятностей состояний имеет вид

$$p_1 = p_0 + p_{L+1} / \rho; \quad p_i = p_{i-1}, \quad i = 2 \dots L-1; \quad p_L = \rho p_0; \quad p_{L+1} = \rho p_L; \quad \rho = \lambda / \mu.$$

Отсюда находим

$$p_L = \rho p_0; \quad p_{L+1} = \rho^2 p_0; \quad p_i = (1 + \rho) p_L / \rho = (1 + \rho) p_0, \quad i = 1 \dots L-1.$$

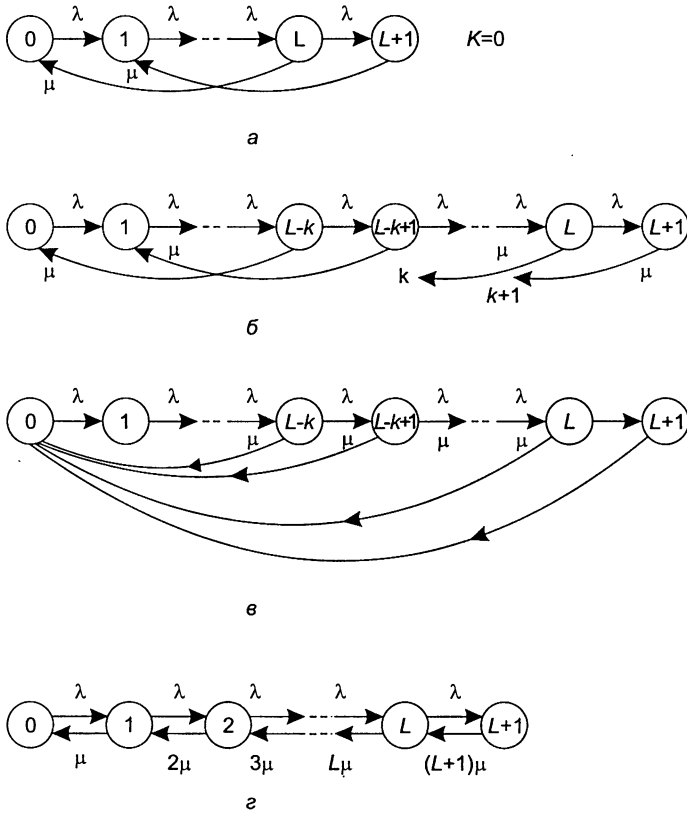


Рис. 9.1. Графы состояний системы при различных способах пополнения запасов

Подставляя эти выражения в нормировочное условие, получим:

$$p_0 = 1 / (\rho^2 + (1 + \rho)L).$$

Коэффициент готовности

$$K_{\text{ЗИП}}(L, k = 0) = 1 - p_{L+1} = 1 - \rho^2 / (\rho^2 + (1 + \rho)L). \quad (9.36)$$

В общем случае при \$k > 0\$, согласно графу состояний (рис. 9.1, б), система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} 1) & -\rho p_0 + p_{L-k} = 0; \\ 2) & -\rho p_i + \rho p_{i-1} + p_{L-k+1} = 0, \quad i = 1 \dots k+1; \\ 3) & p_i = p_{i-1}, \quad i = k+2 \dots L-k-1; \\ 4) & \rho p_{i-1} - (1 + \rho)p_i = 0, \quad i = L-k \dots L; \\ 5) & -\rho p_L + p_{L+1} = 0; \\ 6) & \sum_{i=0}^{L+1} p_i = 1. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Решение (9.37) находим следующим образом. Из 1) и 5) имеем: \$p_{L-k} = \rho p_0\$, \$p_{L+1} = \rho p_L\$. Из 4) имеем: \$p_i = b p_{i-1}\$, \$b = \rho / (1 + \rho)\$, \$i = L-k \dots L\$. В частности, при \$i = L-k\$:

$p_{L-k} = bp_{L-k-1} = \rho p_0$. Отсюда $p_{L-k-1} = (1 + \rho)p_0$. Теперь из 3) имеем: $p_{k+1} = p_{k+2} = \dots = p_{L-k-1} = (1 + \rho)p_0$. Возвращаясь к 4), находим: $p_i = bp_{i-1}$, $i = L - k \dots L$; $p_{L-k+1} = bp_{L-k} = b\rho p_0$, $p_{L-k+1} = b^i \rho p_0$, $i = 0 \dots k$. В частности, при $i = k$ имеем: $p_L = b^k \rho p_0$. Из 2) имеем: $p_1 = p_0 + p_{L-k+1}/\rho = p_0(1 + b)$. Аналогично $p_2 = p_1 + p_{L-k+2}/\rho = p_0(1 + b + b^2)$. Применяя метод полной математической индукции, получим:

$$p_i = p_{i-1} + \frac{1}{\rho} p_{L-k+i} = p_0(1 + b + \dots + b^{i-1}) + b^i p_0 = p_0(1 + \rho)(1 - b^{i+1}), \quad i = 1 \dots k + 1.$$

Подставляя эти значения в нормировочное условие 6), найдем сначала p_0 , затем $p_{L+1} = b^k \rho^2 p_0$ и коэффициент готовности

$$K_{г\text{ЗИП}}(L, k) = 1 - \frac{\rho^{k+2}}{\rho^{k+2} + (L - k)(1 + \rho)^{k+1}}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (9.38)$$

При $k = 0$ формула (9.38) переходит в (9.36).

Если после $(k + 1)$ -го отказа заявка корректируется так, чтобы пополнить ЗИП до начального уровня, и при этом время доставки в среднем остается прежним, то граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 9.1, в. Тогда система уравнений

$$\begin{aligned} p_i &= p_0, \quad i = 1 \dots L - k - 1; \quad (1 + \rho)p_{L-k} = \rho p_{L-k-1} = \rho p_0; \\ (1 + \rho)p_{L-k+i+1} &= \rho p_{L-k+i}, \quad i = 0 \dots k - 1; \quad \rho p_L = \rho p_{L+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_{г\text{ЗИП}}(L, k) = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{\rho^2}{(L - k + \rho)(1 + \rho)^{k+1}}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

В частности, при $k = 0$ имеем

$$K_{г\text{ЗИП}}(L, 0) = 1 - \rho^2 / ((L + \rho)(1 + \rho)). \quad (9.39)$$

Сравнивая (9.36) и (9.39), устанавливаем, что при корректировке заявки относительное снижение коэффициента простоя (неготовности) комплекта ЗИП

$$\delta K_{г\text{ЗИП}}(L, 0) = \rho / ((L + \rho)(1 + \rho)) \approx \rho / L.$$

При малом ρ уменьшение коэффициента простоя столь незначительно, а усложнение процедуры поставки столь заметно, что корректировка заявок вряд ли целесообразна.

9.2.4. Непрерывное пополнение ($\alpha = 4$)

В случае непрерывного пополнения запасов заявки на пополнение формируются после каждого отказа модуля, представленного в комплекте ЗИП, и эти заявки выполняются независимо друг от друга. Поэтому граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 9.1, г, и совпадает с графом состояний системы массового обслуживания (СМО) с потерями типа MMn при $n = L + 1$ [8]. Используя формулы Эрланга для СМО типа MMn , запишем расчетную формулу:

$$K_{\text{г.зип}}(L) = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{\rho^{L+1}}{(L+1)!} \bigg/ \sum_{i=0}^{L+1} \frac{\rho^i}{i!}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (9.40)$$

Сравнивая (9.40) и (9.38) при $k = L - 1$, видим, что

$$K_{\text{г.зип}}(L, \alpha = 3) = 1 - \frac{\rho^{L+1}}{1 + L\rho + \alpha\rho} < K_{\text{г.зип}}(L, \alpha = 4) = 1 - \frac{\rho^{L+1}}{1 + \rho + o(\rho)},$$

то есть непрерывное пополнение обеспечивает более высокий коэффициент готовности комплекта ЗИП, чем пополнение по уровню $k = L - 1$. Риск неудовлетворения заявки на ЗЧ в комплекте ЗИП при пополнении по уровню $L - 1$ в $1 + (L - 1)\rho / (1 + \rho)$ раз превышает риск при непрерывном пополнении. Очевидно, что стратегии пополнения ПП и ПН являются крайними, а ПЭД и ПУ занимают промежуточное положение. Именно поэтому стратегиям периодического и непрерывного пополнения далее уделяется особое внимание.

9.3. Расчет надежности однофункциональных систем с одиночным ЗИП при периодическом пополнении запасов

Поскольку, согласно формулам (9.21), показатели надежности отдельных резервированных групп могут функционировать независимо друг от друга, рассмотрим здесь только одну резервированную группу. Опуская индекс i , представим группу как систему из k однотипных основных элементов, образующих структуру S , и L ненагруженных элементов в составе комплекта одиночного ЗИП. Каждый элемент имеет интенсивность отказов λ , а все элементы группы, включая резервные элементы схемы внутреннего структурного резервирования, имеют суммарную интенсивность отказов $\lambda_0 = k\lambda$. Период пополнения запасов равен T , а расчетное время функционирования

$$t = rT + \tau, \quad r \geq 1, \quad \tau < T. \quad (9.41)$$

Поскольку события на соседних интервалах пополнения независимы в совокупности, вероятность безотказной работы системы находят по формуле

$$P(t) = P'(T)P(\tau), \quad \tau < T, \quad t > T, \quad (9.42)$$

где вероятности $P(\tau)$ и $P(T)$ рассчитываются по одной и той же формуле при различных значениях аргумента. Поэтому далее будет разыскиваться лишь формула для вероятности $P(T, L, S)$. Рассмотрим сначала возможность приближенной оценки показателей надежности с учетом комплекта ЗИП-О [1]. Для последовательной системы $P_c(t)$, $K_{\text{г.с}}$ и $K_{0,\text{г.с}}(\tau)$ рассчитывают с помощью формул (9.8) и (9.9). Последовательность действий следующая. Сначала вычисляют показатели надежности (ПН) $P_c(t, \infty)$ и $K_{\text{г.с}}(\infty)$ в условиях неограниченного ЗИП, затем находят показатели достаточности при некотором количестве ЗЧ для каждого

типа запасов, вычисляют ПН для каждой группы однотипных модулей в период пополнения по формулам (9.8) и (9.9) и, наконец, для расчетного времени функционирования (9.42) вычисляют ПН по формулам (9.21).

При наличии внутреннего структурного резервирования сначала находят ПД запасов данного типа в виде $K_{\text{ЗИП},b}$, затем определяют среднее время задержки (9.11) и скорректированное время восстановления (9.12) и рассчитывают ПН по формулам (9.13) и (9.14). Для смешанных структур используют формулы (9.16)–(9.19) при $\beta_i = T_{ii}$ ($\alpha_i = 1$).

При составлении точных расчетных формул следует иметь в виду, что группа однотипных основных элементов с последовательным соединением и некоторым числом ЗЧ сводится к системе с ненагруженным резервом с дробной кратностью. Расчетные формулы для этой схемы получены в главе 6. Поэтому далее рассмотрим лишь системы с внутренним структурным резервированием.

Пусть система со структурой S имеет следующие показатели живучести [9]: d — минимальный запас живучести, m — максимальный запас живучести. Тогда вероятность $P(T, L, S)$ находят в виде суммы:

$$P(T, L, S) = \sum_{j=0}^m P_j(T, L, S), \quad (9.43)$$

где $P_0(T, L, S)$ — вероятность того, что за время T в системе произойдет не более L отказов и сохранится первоначальная структура соединения элементов $S = S_0$; $P_j(T, L, S)$ — вероятность того, что за время T произойдет $L + j$ ($j > 0$) отказов и система сохранит работоспособность, имея структуру S_j . Структура S_j характеризуется выживаемостью $R(j)$ как условной вероятностью того, что система сохранит работоспособность после отказа любых j элементов [9]. Выживаемость $R(j) > 0$ при $j \leq m$ и $R(j) = 1$ при $j \leq d$. Вводя вероятности возникновения ровно j отказов $p_j(T, L)$, представим (9.43) в виде

$$\begin{aligned} P(T, L, S) &= \sum_{j=0}^m R_j(j, S) p_j(T, L) = \\ &= \sum_{j=0}^d p_j(T, L) + \sum_{j=d+1}^m R_j(j, S) p_j(T, L). \end{aligned} \quad (9.44)$$

При оценке коэффициента готовности в режиме многократного циклического применения (МКЦП) по наихудшему циклу, расположенному в конце периода пополнения, следует использовать формулы (9.43) и (9.44):

$$K_r^*(t, L, S) = P(T, L, S), \quad t = rT. \quad (9.45)$$

Если же требования предъявляются к произвольно выбранному циклу, то коэффициент готовности

$$\begin{aligned} K_r(t, L, S) &= \frac{1}{T} \int_0^T K_r^*(t, L, S) dt = \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{T} \int_0^T P_j(t, L, S) dt = \sum_{j=0}^m K_{ij}(T, L, S). \end{aligned} \quad (9.46)$$

Если цикл имеет существенную длительность τ , то в режиме МКЦП для оценки надежности используют коэффициент оперативной готовности для наихудшего и произвольно выбранного циклов:

$$K_{o.r}^*(T, \tau, L, S) = \sum_{j=0}^m K_{ij}^*(T, L, S)P(\tau, L|j) = \sum_{j=0}^m K_{o.ij}^*(T, \tau, L, S); \quad (9.47)$$

$$K_{o.r}^*(T, \tau, L, S) = \sum_{j=0}^m K_{ij}^*(T, L, S)P(\tau, L|j) = \sum_{j=0}^m K_{o.ij}^*(T, \tau, L, S),$$

где $P(\tau, L|j)$ — вероятность безотказной работы при условии, что в начале выполнения цикла в системе нет отказавших элементов ($j = 0$) или в резервированной структуре отсутствуют j резервных элементов ($j > 0$). При расчете этой вероятности учитывают, что во время выполнения цикла замена отказавшего элемента уже не допускается. Если при различных вариантах выбора j отказавших элементов в системе могут возникать различные работоспособные структуры, то вероятность $P(\tau, L|j)$ распадается на сумму слагаемых:

$$P(\tau, L|j) = \sum_{i=0}^{i_j} \beta_{ji} P_i(\tau, L|j), \quad (9.48)$$

где $P_i(\tau, L|j)$ — вероятность безотказной работы при условии, что стартовой структурой при выполнении цикла будет структура S_{ji} как i -й вариант структуры S_j , β_{ji} — весовые коэффициенты, имеющие смысл условной вероятности возникновения S_{ji} при условии, что произошло $L + j$ ($j > 0$) отказов.

При выводе расчетной формулы для вероятности безотказной работы используют представление вероятности в форме (9.44). Вероятность $p_j(T, L)$ при $j = 0$ имеет вид

$$p_0(T, L) = 1 - I(ka, L), \quad a = \lambda T. \quad (9.49)$$

При $j > 0$ период T можно представить как сумму $T = X_1 + X_2 + \dots + X_j + \tau_j$, где X_i — интервал времени между $(L + i - 1)$ -м и $(L + i)$ -м отказами ($i = 1 \dots j$), τ_j — остаток периода пополнения, в котором система работает безотказно после j отказов в первоначальной структуре. Очевидно, что X_i имеет распределение

$$F_1(t) = PX_1 < t = I(ka, L + 1); \quad F_i(t) = PX_i < t = I(ka, L + i), \quad i = 1 \dots m, \quad (9.50)$$

где m — максимальный запас живучести. Вероятность $p_j(T, L)$ может быть представлена в виде

$$p_j(T, L) = F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_j(t) * e^{-(k-j)\lambda T}, \quad (9.51)$$

где знаком $*$ обозначена операция типа свертки. Вычисление в (9.51) можно проводить путем многократного интегрирования либо с помощью операционного преобразования Лапласа — Карсона. Выполняя операционное преобразование и учитывая (9.50), получим:

$$p_j^*(s, L) = \left(\frac{k\lambda}{s + k\lambda} \right)^{L+1} \prod_{i=2}^j \frac{k-i+1}{s + (k-i+1)\lambda} \frac{s}{s + (k-j)\lambda}. \quad (9.52)$$

Чтобы найти $p_j(T, L)$, надо выполнить в (9.52) обратное преобразование. Далее рассмотрим различные варианты систем без резервирования и с резервированием.

Последовательная система (модель П1). В системе $d = m = 0$. Поэтому, согласно (9.49), ВБР и приращение ВБР от добавления одной ЗЧ вычисляются по формулам

$$P(T, L) = p_0(T, L) = 1 - I(A, L), \quad A = ka, \quad a = \lambda T; \quad (9.53)$$

$$\Delta P(T, i) = P(T, i) - P(T, i-1) = \frac{A^i}{i!} e^{-A}.$$

Дублированная система с нагруженным резервом (модель П2). Система состоит из двух параллельных ветвей из $r = k/2$ -элементов. В системе $d = m = 1$, поэтому в формуле (9.44) будет два слагаемых, одно из которых находят по формуле (9.49), а второе из (9.51) при $j = 1$. Тогда

$$P(T, L) = 1 - I(A, L) + 2^{L+1} e^{-A/2} I\left(\frac{A}{2}, L+1\right) = P(T, 0) + \sum_{i=1}^L \Delta P(T, i); \quad (9.54)$$

$$P(T, 0) = e^{-A/2} (2 - e^{-A/2}); \quad \Delta P(T, i) = 2^i e^{-A/2} I\left(\frac{A}{2}, i+1\right), \quad A = 2ra.$$

В частности, при одной и двух ЗЧ имеем:

$$P(T, 1) = e^{-ra} (4 - (3 + 2ra)e^{-ra}); \quad P(T, 2) = e^{-ra} (8 - (7 + 6ra + 2(ra)^2)e^{-ra}). \quad (9.55)$$

Мажорированная система (модель П3). Система состоит из трех элементов ($k = 3$), соединенных по схеме «два из трех» (см. 6.2.3). Как и в дублированной системе, здесь $d = m = 1$. Вероятность безотказной работы находят по формуле

$$P(T, L) = 1 - I(A, L) + k^{L+1} e^{-(k-1)a} I(a, L+1), \quad A = ka, \quad k = 3; \quad (9.56)$$

$$\Delta P(T, i) = k^{i+1} e^{-(k-1)a} I(a, i+1). \quad (9.57)$$

В частности, при одной и двух ЗЧ имеем:

$$P(T, 1) = e^{-2a} (9 - (8 + 6a)e^{-a}); \quad P(T, 2) = e^{-2a} (27 - (26 + 24a + 9a^2)e^{-a}). \quad (9.58)$$

Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель П4). Из общего количества k элементов $2r$ элементов образуют дублированную подсистему, а $k - 2r$ элементов не резервированы. В системе $d = 0, m = 1$, $R(1) = 2r/k$. Согласно (9.44),

$$P(T, L) = p_0(T, L) + 2(k/r)^L e^{-(k-r)a} I(ra, L+1), \quad (9.59)$$

где $p_0(T, L)$ следует взять из (9.53). Отсюда $P(T, 0) = e^{-(k-r)a} (2 - e^{-ra})$;

$$\Delta P(T, i) = \left(\frac{k}{r}\right)^{i-1} \left(\frac{k}{r} - 1\right) e^{-(k-r)a} \left(I(ra, i) - \frac{A^i}{i!} e^{-A} \right), \quad A = ka, \quad i \geq 1. \quad (9.60)$$

При $k = 2r$ формулы (9.59) и (9.60) совпадают с (9.54).

В данной системе для повышения надежности может быть использована структурная реконфигурация, при которой работоспособные элементы в отказавшей ветви дублированной подсистемы могут быть переведены в ЗИП в качестве запасных частей. При этом максимальный запас живучести увеличивается от 1 до r .

Однако дополнительные $r - 1$ элементов могут быть использованы только для восстановления работоспособности нерезервированной подсистемы, так как в оставшейся ветви дублированной подсистемы перерывы в работе недопустимы даже на короткое время. Поэтому здесь $R(j) = (k - 2r)/(k - r) = 1 - r/(k - r) = \delta$ при $j = 2 \dots r$. Таким образом, в периоде пополнения допускается $L + 1$ отказ без каких-либо ограничений и еще $r - 1$ отказ в нерезервированной части. Поэтому

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 2) + \delta \sum_{i=2}^r \left(\frac{k}{k-r} \right)^{L+i} e^{-ra} I((k-r)a, L+i). \quad (9.61)$$

Отсюда

$$P(T, 0) = e^{-A} (1 + A) + \delta \sum_{i=2}^r \left(\frac{k}{k-r} \right)^i e^{-ra} I(B, i), \quad A = ka, \quad B = (k-r)a; \quad (9.62)$$

$$\Delta P(T, i) = \frac{A^{i+1}}{(i+1)!} e^{-A} + \delta \sum_{i=2}^r \left(\frac{k}{k-r} \right)^{L+i-1} e^{-ra} \left(\frac{k}{k-r} I(B, L+i) - I(B, L+i-1) \right).$$

Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель П5). Из k элементов три образуют мажорированную группу по схеме «два из трех», а остальные $k - 3$ не резервированы. Для этой системы $d = 0, m = 1, R(1) = 3/k$. Поэтому

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + 3k^L e^{-A+a} I(a, L + 1), \quad A = ka. \quad (9.63)$$

Отсюда

$$P(T, 0) = e^{-A+a} (3 - 2e^{-a}); \quad \Delta P(T, i) = k^{i-1} e^{-A+a} (3(k-1)I(a, i) - 2ka^i e^{-a} / i!). \quad (9.64)$$

Последовательное соединение двух дублированных элементов (модель П6). В системе из четырех элементов $d = 1, m = 2, R(2) = 2/3$. Поэтому вероятность безотказной работы является суммой трех слагаемых. После некоторых преобразований формула приводится к виду

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + 2^{L+2} e^{-2a} (I(2a, L + 1) - 2^L e^{-a} I(a, L + 1)), \quad A = 4a. \quad (9.65)$$

Отсюда

$$P(T, 0) = e^{-2a} (4 - 4e^{-a} + e^{-2a}); \quad P(T, 1) = e^{-2a} (8 - 16e^{-a} + (9 + 4a)e^{-2a}); \quad (9.66)$$

$$\Delta P(T, i) = \frac{A^i}{i!} e^{-A} + 2^{i+1} e^{-2a} (I(2a, i) - 3e^{-a} 2^{i-1} I(a, i)).$$

При использовании реконфигурации после отказа одной из дублированных пар резервный элемент второй пары используется в качестве основного элемента первой пары. Тогда $d = m = 2, R(2) = 1$, и формула для ВБР приобретает вид

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + 2^{L+1} e^{-2a} (3I(2a, L + 1) - 2^{L+2} e^{-a} I(a, L + 1)). \quad (9.67)$$

Нетрудно установить, что схема с реконфигурацией соответствует схеме скользящего резервирования типа «два из четырех».

Последовательное соединение двух мажорированных групп (модель П7). Система состоит из 6 элементов и имеет параметры $d = 1, m = 2, R(2) = 0,6$. Далее, как

в предыдущей модели, находим три слагаемых. После некоторых преобразований расчетная формула для ВБР приобретает вид

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + 3^{L+1} e^{-4a} (3I(2a, L + 1) - 2^{L+2} e^{-a} I(a, L + 1)), \quad A = 6a. \quad (9.68)$$

Отсюда

$$P(T, 0) = e^{-4a} (9 - 12e^{-a} + 4e^{-2a}); \quad P(T, 1) = e^{-4a} (27 - 72e^{-a} + 2(23 + 12a)e^{-2a});$$

$$\Delta P(T, i) = 2e^{-4a} 3^i \left(3I(2a, i) - 5e^{-a} 2^i I(a, i) + 2 \frac{(2a)^i}{i!} e^{-2a} \right). \quad (9.69)$$

При использовании реконфигурации $R(2) = 1$, и тогда

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + 3^{L+1} e^{-4a} (5I(2a, L + 1) - 2^{L+3} e^{-a} I(a, L + 1)). \quad (9.70)$$

Отсюда

$$P(T, 0) = e^{-4a} (15 - 24e^{-a} + 10e^{-2a}); \quad P(T, 1) = e^{-4a} (45 - 144e^{-a} + 20(5 + 3a)e^{-2a});$$

$$\Delta P(T, i) = 5e^{-4a} 3^i \left(2I(2a, i) - e^{-a} 2^{i+2} I(a, i) + 2 \frac{(2a)^i}{i!} e^{-2a} \right). \quad (9.71)$$

Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель П8). Из общего количества k элементов два образуют дублированную, три — мажорированную, а $k - 5$ нерезервированную подсистемы. Параметры системы $d = 0$, $m = 2$, $R(1) = 5/k$, $R(2) = C_3^1 C_2^1 / C_k^2 = 12 / (k(k-1))$. Тогда, согласно (9.43), вероятность безотказной работы состоит из трех слагаемых. Вероятность $P_0(T, L)$ находят по формуле (9.53), а вероятности $P_1(T, L)$ и $P_2(T, L)$ — по формулам

$$P_1(T, L) = 5k^L e^{-(k-1)a} I(a, L + 1);$$

$$P_2(T, L) = 5(k/2)^L e^{-(k-2)a} (I(2a, L + 1) - 2^{L+1} e^{-a} I(a, L + 1)).$$

Суммируя вероятности, имеем:

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + (k/2)^L e^{-(k-2)a} (6I(2a, L + 1) - 7e^{-a} 2^L I(a, L + 1)). \quad (9.72)$$

Отсюда

$$P(T, 0) = e^{-(k-2)a} (3 - 2e^{-a})(2 - e^{-a}); \quad (9.73)$$

$$P(T, 1) = e^{-(k-2)a} (3k - 7ke^{-a} + (1 + 4k + 2ka)e^{-2a});$$

$$\Delta P(T, i) = (k/2)^{i-1} e^{-(k-2)a} \left(3(k-2)I(2a, i) - 7(k-1)e^{-a} 2^{i-1} I(a, i) + k \frac{(2a)^i}{i!} e^{-2a} \right).$$

При использовании реконфигурации $d = m = 2$, $R(1) = R(2) = 1$, и тогда

$$P(T, L) = 1 - I(A, L + 1) + \left(\frac{k}{2} \right)^{L+1} e^{-(k-2)a} \times$$

$$\times ((k-1)I(2a, L + 1) - (k-1)e^{-a} 2^{L+1} I(a, L + 1)). \quad (9.74)$$

При определении показателей надежности на интервале функционирования $t > T$ надо использовать формулы (9.42), (9.45)–(9.47), подставляя в них найденные в этом разделе выражения для $P(T, L)$ и формулы для $P(\tau, L | j)$ из главы 6. Например, для дублированной системы коэффициент оперативной готовности для наихудшего цикла находят по формуле

$$K_{o.r}^*(T, \tau, L) = (1 - I(A, L + 1))(2 - e^{-\lambda\tau})e^{-\lambda\tau} + 2^{L+1}e^{-A/2}I(A/2, L + 1)e^{-\lambda\tau}, \quad A = 2ra.$$

Заметим, что потребность в использовании формулы (9.48) возникает только в модели П8. После $(L + 1)$ -го отказа в системе могут возникнуть две работоспособные структуры, одна из которых имеет мажорированную группу (с вероятностью $\beta_{11} = 0,4$), а вторая — дублированную пару (с вероятностью $\beta_{12} = 0,6$). Поэтому второе слагаемое в (9.47) при $j = 1$ имеет вид

$$K_{o.r.1}^*(T, \tau, L) = P_1(T, L)(0,4e^{-2\lambda\tau}(3 - 2e^{-\lambda\tau}) + 0,6e^{-\lambda\tau}(2 - e^{-\lambda\tau})).$$

Коэффициент оперативной готовности для произвольно выбранного цикла получается путем интегрирования по времени t в периоде пополнения T функции $K_{o.r}^*(t, \tau, L)$.

9.4. Расчет надежности многофункциональных систем с одиночным или групповым ЗИП при периодическом пополнении запасов

Автоматизированные системы обработки информации и управления относятся к классу многофункциональных систем (МФС). В типовой перечень выполняемых ими функций входят функции измерения и сбора данных определенного профиля, отображения и регистрации данных, архивирования, формирования управляющих воздействий в штатном режиме работы, управления в экстремальных ситуациях, связи и взаимодействия со смежными системами и пр. В развитых АСОИУ может выполняться несколько десятков различных функций и групп функций. Оценка надежности МФС проводится отдельно по каждой функционально самостоятельной операции (ФСО), предназначенной для выполнения одной функции или группы функций. В выполнении ФСО занята только часть аппаратно-программного комплекса системы, тогда как комплект одиночного ЗИП создается для устранения отказов любых модулей определенного типа, а не только тех, которые заняты в выполнении конкретной ФСО. В результате возникает ситуация, когда интенсивность потребления запасных частей не совпадает с интенсивностью отказов модулей, занятых в выполнении определенной ФСО. Поэтому для оценки надежности МФС не могут быть использованы формулы, разработанные для однофункциональных систем (ОФС). Аналогичная ситуация возникает и при групповом ЗИП; причем не только для МФС, но и для ОФС. В самом деле, при эксплуатации одновременно нескольких образцов

изделия, обслуживаемых комплектом ЗИП-Г, расчет надежности проводится для одного образца, а потребляют ЗЧ все работающие образцы. Надежность МФС при одиночном ЗИП и любых систем (МФС или ОФС) при групповом ЗИП рассчитывают по одним и тем же формулам, если время доставки ЗЧ из комплекта ЗИП и время замены находятся в пределах диапазона допустимых значений времени перерыва в работе системы, что позволяет пренебречь этим временем в моделях надежности. Поэтому далее не будем различать тип комплекта ЗИП и формализуем работу системы следующим образом.

Пусть система характеризуется вектором $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ количества модулей различных типов, обслуживаемых комплектом ЗИП, вектором $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ интенсивностей отказов модулей, вектором $T = (T_1, T_2, \dots, T_M)$ периодов пополнения запасов. Подсистема, выполняющая оцениваемую ФСО и называемая далее основной, дополнительно характеризуется векторами состава $K_j = (k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{jM})$ и структуры $S = (S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jM})$. Аппаратура, не занятая в выполнении ФСО, образует дополнительную подсистему. Некоторые позиции в векторах K_j и S_j могут быть пустыми, если модули данного типа не используются в основной подсистеме. Для оценки надежности МФС по j -й ФСО применяют тот же набор показателей, что и для ОФС. При этом могут использоваться как приближенные оценки, так и расчет по точным формулам.

9.4.1. Приближенные оценки первого типа

Оценка первого типа основана на использовании показателей достаточности комплекта ЗИП [1]. Последовательные системы оцениваются с помощью формул (9.8) или (9.9). Структурно резервированные системы оцениваются с помощью формул (9.10)–(9.14) путем коррекции среднего времени восстановления работоспособности. При этом ПД рассчитывают на основе вектора полного состава n , а показатели надежности — на основе вектора K_j для j -й ФСО. Ситуация усложняется, если система имеет смешанную структуру, в которой одна часть элементов резервирована, а другая — нет. В этом случае надо использовать формулы (9.18) и (9.19). Сложность здесь заключается в том, что для расчета $K_{\text{ЗИП } 0}$ и $T_{\text{в}}$, относящихся к нерезервированной и резервированным частям системы, надо назначать количество запасных частей $L0$ и $L1$. Поскольку в различных ФСО одни и те же модули могут быть и не резервированы, и резервированы, а комплект ЗИП рассчитывают по всей совокупности ФСО, то возникает задача связи $L0$ и $L1$, с одной стороны, и L — с другой. Если взять $L0 = L1 = L$, это приведет к завышению реальных запасов ЗЧ и завышению надежности. Если же взять $L0 + L1 = L$, то запасы искусственно разделяются на две неполнодоступные части и оценка надежности при этом будет заниженной. Область применения оценок обоих типов может быть исследована численно.

9.4.2. Приближенные оценки второго типа

Общий подход к построению расчетных формул состоит в том, чтобы учесть в показателе достаточности запасов факт потребления ЗЧ дополнительной подсистемой. Для этого вводится вероятность удовлетворения запроса на ЗЧ после

i -го отказа элементов данного типа в основной подсистеме $P_{y.3}(i)$. Тогда вероятность безотказной работы системы находят в форме

$$P_c(T, L) = P(T, 0) + \sum_{i=1}^L \Delta P(T, i) P_{y.3}(i). \quad (9.75)$$

Очевидно, что запрос будет удовлетворен, если к моменту i -го отказа в основной подсистеме дополнительная подсистема израсходует не более $L - i$ запасных частей. В качестве оценки вероятности $P_{y.3}(i)$ можно использовать вероятность того, что за период пополнения в дополнительной подсистеме произойдет не более $L - i$ отказов:

$$P_{y.3}(i) = P\{X(T) \leq L - i\} = 1 - I(B, L - i + 1), \quad B = (n - k)a, \quad a = \lambda T. \quad (9.76)$$

Формула (9.75) с учетом (9.76) дает оценку ВБР снизу, поскольку (9.76) соответствует дисциплине обслуживания с абсолютным приоритетом дополнительной подсистемы при расходовании ЗЧ, тогда как на самом деле дисциплина беспriorитетная. Значения вероятностей $P(T, 0)$ и $\Delta P(T, i)$ находят по формулам, приведенным в 9.3 для однофункциональных систем.

9.4.3. Точные методы расчета надежности

При получении расчетных формул можно использовать дифференциальный или интегральный методы.

Дифференциальный метод. При L запасных частях данного типа в комплекте ЗИП потребление ЗЧ определяется полным составом системы. После исчерпания запасов вероятность безотказной работы системы при выполнении ФСО определяется только структурой основной подсистемы (ОПС). Поэтому граф состояний имеет всего $L + m + 2$ состояний, где m — максимальный запас живучести (рис. 9.2, а). В состояниях $0 \dots L - 1$ в комплекте ЗИП есть по крайней мере одна ЗЧ. Поэтому отказ элемента ОПС гарантированно не приводит к отказу системы. В состояниях $L + i, i = 0 \dots m$, структура S_i получается в результате деградации первоначальной резервированной структуры S_0 . Она остается работоспособной, хотя и имеет меньшую структурную избыточность. Интенсивность переходов между состояниями определяется количеством работоспособных элементов в ОПС и показателем выживаемости $R(i) \equiv R_i$. Система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} P'_{0}(t) &= -n\lambda P_0(t); \quad P'_i(t) = n\lambda P_{i-1}(t) - n\lambda P_i(t), \quad i = 0 \dots L - 1; \\ P'_L(t) &= n\lambda P_{L-1}(t) - k\lambda P_L(t); \\ P'_{L+i}(t) &= R_i(k - i + 1)\lambda P_{L+i-1}(t) - (k - i)\lambda P_{L+i}(t), \quad i = 0 \dots m; \\ P'_{L+m}(t) &= R_m(k - m + 1)\lambda P_{L+m-1}(t) - (k - m)\lambda P_{L+m}(t); \\ Q'_c(t, L) &= P'_{L+m}(t) = \sum_{i=0}^m (1 - R_{i+1})(k - i)\lambda P_{L+i}(t), \quad R_{m+1} = 0. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Начальные условия: $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i > 0$.

Используя в (9.77) операционное преобразование, сначала решают полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно изображения функции вероятности отказа $Q_c(s, L)$, а затем выполняют обратное операционное преобразование.

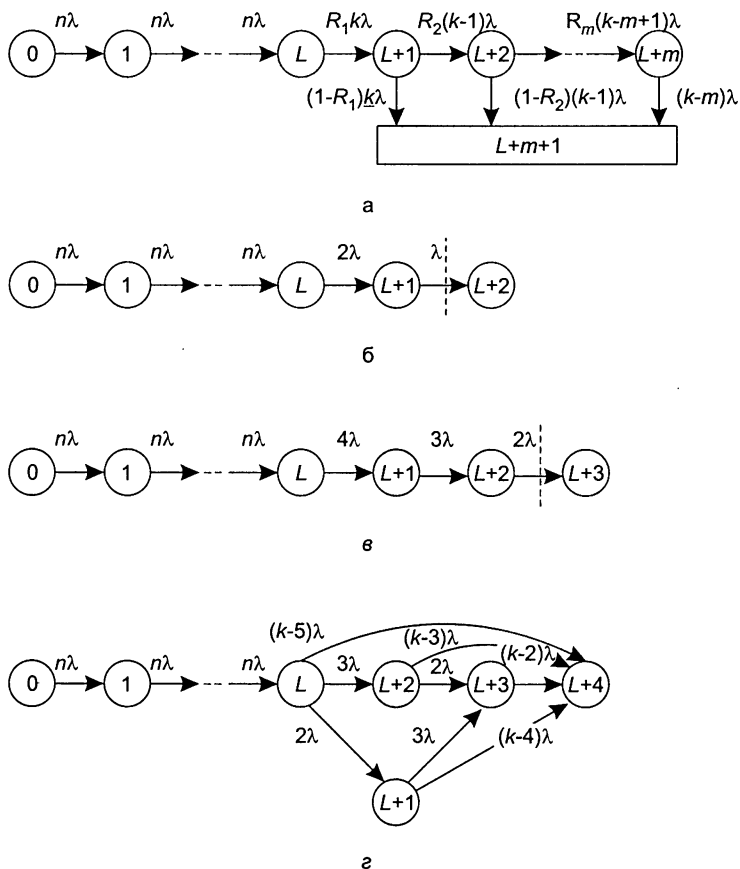


Рис. 9.2. Графы состояний многофункциональной системы при периодическом пополнении запасов: а — система с общим резервированием; б — дублированная или мажорированная система; в — последовательное соединение дублированных элементов; г — последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем

Интегральный метод. Вводим вероятности $P_c(t, l, S_0)$ того, что система будет работоспособна в течение времени t при наличии в комплекте ЗИП l запасных частей ($l = 0...L$) и начальной структуре S_0 , и вероятности $P_c(t, S_j)$ безотказной работы системы в течение времени t при отсутствии ЗИП и начальной структуре S_j ($j = 1...m$). Эти вероятности удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$P_c(T, L, S_0) = e^{-A} + \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{L-1} P_i((n-k)\lambda x) P_c(T-x, L-1-i, S_0) \right) dF_1(x) + \\ + \sum_{j=1}^m R_j \int_0^T P_{\geq L}((n-k)\lambda x) P_c(T-x, S_j) dF_j(x), \tag{9.78}$$

где $F_j(x)$ — функция распределения наработки до j -го отказа элементов ОПС; $P_i((n-k)\lambda x)$ — вероятность того, что за время x произойдет ровно i отказов элементов ДПС; $P_{\geq L}((n-k)\lambda x)$ — вероятность того, что в ДПС произойдет не

менее L отказов элементов; R_j — показатель выживаемости ОПС при j отказавших элементах. Поскольку интегралы в (9.78) являются интегралами типа свертки, система (9.78) с помощью операционного преобразования сводится к группе рекуррентных формул относительно изображений функций вероятностей $P_c^*(s, L, S_0)$ и $P_c^*(s, S_j)$. Решая систему уравнений относительно $P_c^*(s, L, S_0)$ и выполняя обратное преобразование, найдем вероятность безотказной работы $P_c(t, L) = P_c(t, L, S_0)$. Рассмотрим теперь некоторые типовые структуры.

9.4.4. Расчетные формулы для типовых структур

Последовательная система (модель МП1). Система уравнений (9.78) имеет вид

$$P_c(T, L) = e^{-A} + \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{L-1} \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x} P_c(T-x, L-1-i) \right) k\lambda e^{-k\lambda x} dx. \quad (9.79)$$

Операционное преобразование в (9.79) дает

$$P_c^*(s, L) = \frac{s}{s+k\lambda} + \sum_{i=0}^{L-1} \frac{k}{n-k} \left(\frac{(n-k)\lambda}{s+n\lambda} \right)^{i+1} P_c^*(s, L-1-i); \quad P_c^*(s, 0) = \frac{s}{s+k\lambda}. \quad (9.80)$$

Отсюда

$$P_c^*(s, 1) = \frac{s}{s+k\lambda} \left(1 + \frac{k\lambda}{s+n\lambda} \right); \quad P_c^*(s, 2) = P_c^*(s, 1) + \frac{skn\lambda^2}{(s+k\lambda)(s+n\lambda)^2}.$$

Используя (9.80) как рекуррентную формулу, находим:

$$P_c^*(s, L) = P_c^*(s, L-1) + \Delta P_c^*(s, L); \quad \Delta P_c^*(s, L) = \frac{skn^{L-1}\lambda^L}{(s+k\lambda)(s+n\lambda)^L}. \quad (9.81)$$

Обратное преобразование в (9.81) дает:

$$\Delta P_c(T, L) = \frac{AC^{L-1}}{B^L} e^{-A} I(B, L), \quad A = ka, \quad B = (n-k)a, \quad C = na, \quad a = \lambda T;$$

$$P_c(T, L) = e^{-A} \left(1 + (A/C) \sum_{l=1}^L (C/B)^l I(B, l) \right). \quad (9.82)$$

В частности, имеем:

$$P_c(T, 1) = e^{-A} \left(1 + \frac{A}{B} I(B, 1) \right) = \frac{1}{B} (Ce^{-A} - Ae^{-C});$$

$$P_c(T, 2) = e^{-A} \left(1 + \frac{A}{B} \left(I(B, 1) + \frac{C}{B} I(B, 2) \right) \right) = \frac{1}{B^2} (C^2 e^{-A} - A(B+C+BC) e^{-C});$$

$$P_c(T, 3) = e^{-A} \left(1 + \frac{A}{B} \left(I(B, 1) + \frac{C}{B} I(B, 2) + \left(\frac{C}{B} \right)^2 I(B, 3) \right) \right). \quad (9.83)$$

При $B \rightarrow 0$ формула (9.83) совпадает с (9.53).

Дублированная система (модель МП2). Рассмотрим сначала систему из двух параллельных элементов. Используя дифференциальный метод, составим граф состояний (см. рис. 9.2, б) и найдем вероятность отказа как функцию распределения суммы трех независимых слагаемых $T_{0c} = T_L + X_1 + X_2$, где T_L — время до истощения запасов в комплекте ЗИП, имеет распределение Эрланга с параметрами L и $C = n \lambda T$; X_1 и X_2 — случайные величины, имеющие экспоненциальные распределения с параметрами 2λ и λ соответственно. Для независимых слагаемых изображение для функции вероятности отказа находят как произведение изображений функций распределения слагаемых. Поэтому

$$Q_c^*(s, L) = \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L \frac{2\lambda}{s + 2\lambda} \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad L \geq 0. \quad (9.84)$$

Отсюда

$$P_c^*(s, L) = P_c^*(s, L-1) + \Delta P_c^*(s, L); \quad \Delta P_c^*(s, L) = \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L \frac{2\lambda s}{n(s + 2\lambda)(s + \lambda)}. \quad (9.85)$$

Обратное преобразование в (9.85) дает:

$$\begin{aligned} P_c(T, L) &= P(T, 0) + \sum_{i=1}^L \Delta P_c(T, i); \quad P(T, 0) = e^{-a}(2 - e^{-a}); \\ \Delta P_c(T, i) &= \frac{2}{n} e^{-a} \left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^i (1 - e^{-(n-1)a}) - \left(\frac{n}{n-2} \right)^i e^{-a} (1 - e^{-(n-2)a}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(na)^j}{j!} e^{-(n-1)a} \left(\left(\frac{n}{n-2} \right)^{i-j} - \left(\frac{n}{n-1} \right)^{i-j} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} P_c(T, L) &= e^{-a} \left(2 - e^{-a} + 2(1 - e^{-Ca}) \left(\left(\frac{C}{C-a} \right)^L - 1 \right) - e^{-a} (1 - e^{-B}) \left(\left(\frac{C}{B} \right)^L - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-Ca} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{C^i}{i!} \left(1 + \left(\frac{C}{B} \right)^{L-i} - 2 \left(\frac{C}{C-a} \right)^{L-i} \right) \right). \quad (9.86) \end{aligned}$$

В частности, имеем:

$$P_c(T, 1) = e^{-a} \left(\frac{2C}{C-a} - \frac{C}{B} e^{-a} + \frac{2a^2}{(C-a)B} e^{-Ca} \right), \quad B = C - 2a; \quad (9.87)$$

$$P_c(T, 2) = e^{-a} \left(2 + \frac{2a(C+D)}{D^2} (1 - e^{-D}) - e^{-a} \left(1 + \frac{4aD}{B^2} (1 - e^{-B}) + \frac{2Ca^2}{DB} e^{-B} \right) \right),$$

где $D = C - a$. В более общем случае дублированная система имеет в каждой ветви $r = k/2$ элементов. Используем теперь интегральный метод, учитывая, что здесь $d = m = 1$, $R_1 = 1$. Тогда уравнение (9.78) приобретает вид

$$P_c(T, L) = e^{-A} + \int_0^T k\lambda e^{-k\lambda x} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x} P_c(T-x, L-1-i) + \right. \\ \left. + \left(1 - \sum_{i=0}^{L-1} \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x} \right) e^{-r\lambda(T-x)} \right) dx. \quad (9.88)$$

Операционное преобразование в (9.88) дает:

$$P_c^*(s, L) = P_c^*(s, 0) + \sum_{i=1}^L \Delta P_c^*(s, i); \quad P_c^*(s, 0) = \frac{s(s+3\lambda)}{(s+\lambda)(s+2\lambda)}; \\ \Delta P_c^*(s, i) = \frac{skr\lambda}{n(s+r\lambda)(s+k\lambda)} \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L. \quad (9.89)$$

При $r=1$, $k=2$ формулы (9.89) совпадают с (9.85). Обратное преобразование в (9.89) дает:

$$\Delta P_c(T, i) = \frac{k}{n} e^{-ra} \left(\left(\frac{n}{n-r} \right)^i (1 - e^{-(n-r)a}) - \left(\frac{n}{n-k} \right)^i e^{-ra} (1 - e^{-(n-k)a}) + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(na)^j}{j!} e^{-(n-r)a} \left(\left(\frac{n}{n-k} \right)^{i-j} - \left(\frac{n}{n-r} \right)^{i-j} \right) \right). \quad (9.90)$$

Подставляя (9.90) в (9.88), получим:

$$P_c(T, L) = P(T, 0) + 2e^{-A/2} (1 - e^{-D}) \left(\left(\frac{C}{D} \right)^L - 1 \right) - e^{-A} (1 - e^{-B}) \left(\left(\frac{C}{B} \right)^L - 1 \right) + \\ + e^{-C} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{C^i}{i!} \left(1 + \left(\frac{C}{B} \right)^{L-i} - 2 \left(\frac{C}{D} \right)^{L-i} \right); \quad P(T, 0) = e^{-A/2} (2 - e^{-A/2}), \quad (9.91)$$

где $A = 2ra$, $B = C - A$, $D = C - ra$. В частности, имеем:

$$P_c(T, 1) = e^{-ra} \left(\frac{2C}{D} - \frac{C}{B} e^{-ra} + \frac{A^2}{2DB} e^{-D} \right); \quad (9.92)$$

$$P_c(T, 2) = P(T, 0) + \frac{A(C+D)}{D^2} e^{-ra} - \frac{A(C+B)}{B^2} e^{-A} + e^{-C} \frac{A^2}{2BD} \left(1 + C - \frac{C(B+D)}{BD} \right).$$

При $r=1$ формулы (9.91) и (9.92) совпадают с (9.87) и (9.87).

Мажорированная система (модель МПЗ). Граф состояний имеет тот же вид, что и в дублированной системе (см. рис. 9.2, б), только переход из L в $L+1$ происходит с интенсивностью 3λ , а переход из $L+1$ в $L+2$ — с интенсивностью 2λ . Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным для дублированной системы, получим формулы для изображений:

$$Q_c^*(s, L) = \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L \frac{3\lambda}{s+3\lambda} \frac{2\lambda}{s+2\lambda}, \quad L \geq 0; \quad \Delta P_c^*(s, L) = \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L \frac{6\lambda s}{n(s+3\lambda)(s+2\lambda)}.$$

Обратное преобразование дает:

$$\Delta P_c(T, i) = \frac{2A}{C} \left(e^{-2a} \left(\left(\frac{C}{B+a} \right)^i - \left(\frac{C}{B} \right)^i e^{-a} \right) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{C^j}{j!} e^{-C} \left(\left(\frac{C}{B} \right)^{i-j} - \left(\frac{C}{B+a} \right)^{i-j} \right) \right).$$

Отсюда

$$P_c(T, L) = P_c(T, 0) + 2e^{-2a} \left(\frac{A}{A-a} (1-e^{-D}) \left(\left(\frac{C}{D} \right)^L - 1 \right) - e^{-a} (1-e^{-B}) \left(\left(\frac{C}{B} \right)^L - 1 \right) \right) + \\ + 2e^{-C} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{C^i}{i!} \left(\frac{a}{A-a} + \left(\frac{C}{B} \right)^{L-i} - \frac{A}{A-a} \left(\frac{C}{D} \right)^{L-i} \right); \quad P_c(T, 0) = e^{-2a} (3 - 2e^{-a}), \quad (9.93)$$

$$A = 3a, \quad C = na, \quad B = C - A, \quad D = B + a.$$

В частности, имеем:

$$P_c(T, 1) = P_c(T, 0) + 2Ae^{-2a} \left(\frac{1-e^{-D}}{D} - \frac{1-e^{-B}}{B} e^{-a} \right); \quad (9.94)$$

$$P_c(T, 2) = P_c(T, 0) + 2Ae^{-2a} \left(\left(1 + \frac{C}{D} \right) \frac{1-e^{-D}}{D} - \left(1 + \frac{C}{B} \right) \frac{1-e^{-B}}{B} e^{-a} \right) + e^{-C} \frac{2aCA}{BD}.$$

Последовательное соединение дублированной и резервированной подсистем (модель МП4). Описание структуры системы приведено в 9.3 (модель П4). Интегральное уравнение для вероятности безотказной работы имеет вид

$$P_c(T, L) = e^{-A} + \int_0^T k\lambda e^{-k\lambda x} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x} P_c(T-x, L-1-i) + \right. \\ \left. + \frac{2r}{k} \left(1 - \sum_{i=0}^{L-1} \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x} \right) e^{-(k-r)\lambda(T-x)} \right) dx. \quad (9.95)$$

Операционное преобразование в (9.95) дает зависимость $P_c^*(s, L)$ от изображений $P_c^*(s, i)$ при $i < L$. Путем преобразований рекуррентная формула сводится к виду

$$P_c^*(s, L) = P_c^*(s, L-1) + \Delta P_c^*(s, L); \quad (9.96)$$

$$\Delta P_c^*(s, L) = \frac{s}{n} \left(\frac{2(k-r)}{s + (k-r)\lambda} - \frac{k}{s + k\lambda} \right) \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L. \quad (9.97)$$

Обратное преобразование в (9.97) дает:

$$\Delta P_c(T, i) = \frac{2(k-r)}{n} e^{-(k-r)a} \left(\left(\frac{n}{n-k+r} \right)^i - \frac{k}{n} \left(\frac{n}{n-k} \right)^i e^{-ra} \right) + \\ + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(na)^j}{j!} e^{-na} \left(\frac{k}{n} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{i-j} - \frac{2(k-r)}{n} \left(\frac{n}{n-k+r} \right)^{i-j} \right).$$

Отсюда

$$P_c(T, L) = P_c(T, 0) + 2e^{-(k-r)a}(1 - e^{-B-ra}) \left(\left(\frac{C}{B+ra} \right)^L - 1 \right) - e^{-A}(1 - e^{-B}) \left(\left(\frac{C}{B} \right)^L - 1 \right) + \\ + e^{-C} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{C^i}{i!} \left(1 + \left(\frac{C}{B} \right)^{L-i} - 2 \left(\frac{C}{B+ra} \right)^{L-i} \right); \quad P_c(T, 0) = e^{-(k-r)a}(2 - e^{-ra}). \quad (9.98)$$

В частности, имеем:

$$P_c(T, 1) = P_c(T, 0) + 2(A - ra)e^{-A+ra} \frac{1 - e^{-D}}{D} - Ae^{-A} \frac{1 - e^{-B}}{B}, \quad D = B + ra. \quad (9.99)$$

При $k = 2r$ формулы (9.98) и (9.99) совпадают с (9.91) и (9.92).

Последовательное соединение мажорированной и резервированной подсистем (модель МП5). Интегральное уравнение имеет вид (9.95), где надо заменить $2r$ на $3r$ и принять $r = 1$. Операционное преобразование в (9.95) дает

$$\Delta P_c^*(s, L) = \frac{s}{n} \left(\frac{3(k-1)}{s + (k-1)\lambda} - \frac{2k}{s + k\lambda} \right) \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L.$$

Отсюда

$$\Delta P_c(T, i) = \frac{3(k-1)}{n} e^{-(k-1)a} \left(\left(\frac{n}{n-k+1} \right)^i - \frac{2k}{n} \left(\frac{n}{n-k} \right)^i e^{-a} \right) + \\ + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(na)^j}{j!} e^{-na} \left(\frac{2k}{n} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{i-j} - \frac{3(k-1)}{n} \left(\frac{n}{n-k+1} \right)^{i-j} \right); \\ P_c(T, L) = P_c(T, 0) + 3e^{-(A+r)a}(1 - e^{-B-a}) \left(\left(\frac{C}{B+a} \right)^L - 1 \right) - 2e^{-A}(1 - e^{-B}) \left(\left(\frac{C}{B} \right)^L - 1 \right) + \\ + e^{-C} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{C^i}{i!} \left(1 + 2 \left(\frac{C}{B} \right)^{L-i} - 3 \left(\frac{C}{B+ra} \right)^{L-i} \right); \quad P_c(T, 0) = e^{-A+a}(3 - 2e^{-a}). \quad (9.100)$$

При $k = 3$ формула (9.100) переходят в (9.93).

Последовательное соединение двух дублированных элементов (модель МП6). Граф состояний содержит $L + 4$ состояния (см. рис. 9.2, в). Составляя систему дифференциальных уравнений типа (9.77) и переходя к операционным изображениям, получим:

$$P_{L-1}^*(s) = \frac{s(n\lambda)^{L-1}}{(s + n\lambda)^L}; \quad P_L^*(s) = \frac{n\lambda}{s + 4\lambda} P_{L-1}^*(s) = \frac{s}{s + 4\lambda} \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L; \\ P_{L+1}^*(s) = \frac{4\lambda}{s + 3\lambda} P_L^*(s) = \frac{s}{s + 3\lambda} \frac{4\lambda}{s + 4\lambda} \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L;$$

$$P_{L+2}^*(s) = \frac{2\lambda}{s+2\lambda} P_L^*(s) = \frac{s}{s+3\lambda} \frac{2\lambda}{s+2\lambda} \frac{4\lambda}{s+4\lambda} \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L.$$

Отсюда

$$Q_c^*(s, L) = \frac{\lambda}{s} (P_{L+1}^*(s) + 2P_{L+2}^*(s)) = \frac{\lambda}{s+3\lambda} \frac{4\lambda}{s+4\lambda} \left(1 + \frac{4\lambda}{s+2\lambda} \right) \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L, L \geq 0. \quad (9.101)$$

При $L = 0$ имеем:

$$Q_c(T, 0) = 1 - e^{-2a} (2 - e^{-a})^2, \quad a = \lambda T. \quad (9.102)$$

Из (9.101) находим:

$$\begin{aligned} \Delta P_c^*(s, L) &= Q_c^*(s, L-1) - Q_c^*(s, L) = \\ &= Q_c^*(s, 0) \frac{s(n\lambda)^{L-1}}{(s+n\lambda)^L} = \Delta P_c^*(s, 1) \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^{L-1}; \end{aligned} \quad (9.103)$$

$$\Delta P_c^*(s, 1) = Q_c^*(s, 0) \frac{s}{s+n\lambda}. \quad (9.104)$$

Обратное преобразование (9.103) проведем в два этапа. Сначала выполним обращение (9.104):

$$\Delta P_c(T, 1) = \int_0^T e^{-n\lambda(T-x)} dQ_c(x, 0) = 4 \left(\frac{2}{n-2} e^{-2a} - \frac{3}{n-3} e^{-3a} + \frac{1}{n-4} e^{-3a} + d_1 e^{-c} \right);$$

$$d_1 = \frac{n-6}{(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Учитывая, что второй сомножитель в (9.103) имеет оригиналом функцию распределения Эрланга, находим:

$$\begin{aligned} \Delta P_c(T, L) &= \int_0^T \Delta P_c(T-x, 1) \frac{(n\lambda)^{L-1} x^{L-2}}{(L-2)!} e^{-n\lambda x} dx = \\ &= 4 \left(\frac{2}{n-2} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{L-1} e^{-2a} I((n-2)a, L-1) - \frac{3}{n-3} \left(\frac{n}{n-3} \right)^{L-1} I((n-3)a, L-1) e^{-3a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{n-4} \left(\frac{n}{n-4} \right)^{L-1} I((n-3)a, L-1) e^{-4a} + d_1 \frac{C^{L-1}}{(L-1)!} e^{-c} \right). \end{aligned} \quad (9.105)$$

Суммируя приращения, получим:

$$\begin{aligned} P_c(T, L) &= P_c(T, 0) + \sum_{i=1}^L \Delta P_c(T, i) = e^{-2a} (2 - e^{-a})^2 + 4 \sum_{i=1}^{L-1} \left(\frac{2n^i e^{-4a}}{(n-2)^{i+1}} I((n-2)a, i) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3n^i e^{-3a}}{(n-3)^{i+1}} I((n-3)a, i) + \frac{n^i e^{-4a}}{(n-4)^{i+1}} I((n-4)a, i) + d_1 \frac{C^i}{i!} e^{-c} \right). \end{aligned} \quad (9.106)$$

В частности, при одной и двух ЗЧ имеем:

$$P_c(T, 1) = \frac{4n}{n-2} e^{-2a} - \frac{4n}{n-3} e^{-3a} + \frac{n}{n-4} e^{-4a} + d_1 e^{-c}; \quad (9.107)$$

$$P_c(T, 2) = 4 \left(\frac{n}{n-2} \right)^2 e^{-2a} - 4 \left(\frac{n}{n-3} \right)^2 e^{-3a} + \left(\frac{n}{n-4} \right)^2 e^{-4a} + 4(d_1(1+C) - d_2) e^{-c};$$

$$d_2 = \frac{2n}{(n-2)^2} - \frac{3n}{(n-3)^2} + \frac{n}{(n-4)^2}.$$

Последовательное соединение двух мажорированных групп (модель МП7). Граф состояний совпадает с графом для модели МП6, изменяются только интенсивности переходов: $\lambda_{L, L+1} = 6\lambda$, $\lambda_{L+1, L+2} = 3\lambda$, $\lambda_{L+1, L+3} = 2\lambda$, $\lambda_{L+2, L+3} = 4\lambda$. Составляя по графу состояний систему дифференциальных уравнений и решая ее, получаем:

$$Q_c^*(s, L) = Q_c^*(s, 0) \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda} \right)^L; \quad Q_c^*(s, 0) = \frac{2\lambda}{s + 5\lambda} \frac{6\lambda}{s + 6\lambda} \left(1 + \frac{6\lambda}{s + 4\lambda} \right). \quad (9.108)$$

Отсюда находим, что приращение вероятности удовлетворяет соотношению (9.103), где $Q_c^*(s, 0)$ находят по формуле (9.108). Обратное преобразование дает:

$$P_c(T, 0) = e^{-4a} (3 - 2e^{-a})^2; \quad d_1 = \frac{n-10}{(n-4)(n-5)(n-6)};$$

$$\Delta P_c(T, 1) = \int_0^T e^{-n\lambda(T-x)} dQ_c(x, 0) = 12 \left(\frac{3}{n-4} e^{-4a} - \frac{5}{n-5} e^{-5a} + \frac{2}{n-6} e^{-6a} + d_1 e^{-c} \right);$$

$$\Delta P_c(T, L) = \int_0^T \Delta P_c(T-x, 1) \frac{(n\lambda)^{L-1} x^{L-2}}{(L-2)!} e^{-n\lambda x} dx = 12 \left(\frac{3n^{L-1}}{(n-4)^L} e^{-4a} I((n-4)a, L-1) - \right.$$

$$\left. - \frac{5n^{L-1}}{(n-5)^L} e^{-5a} I((n-4)a, L-1) + \frac{2n^{L-1}}{(n-6)^L} e^{-5a} I((n-6)a, L-1) + d_1 \frac{C^{L-1}}{(L-1)!} e^{-c} \right).$$

Суммируя приращения, получим формулу для нахождения вероятности безотказной работы:

$$P_c(T, L) = P_c(T, 0) + \frac{12}{n} \sum_{i=1}^{L-1} \left(3 \left(\frac{n}{n-4} \right)^{i+1} e^{-4a} I((n-4)a, i) - \right.$$

$$\left. - 5 \left(\frac{n}{n-5} \right)^{i+1} e^{-5a} I((n-5)a, i) + 2 \left(\frac{n}{n-6} \right)^{i+1} e^{-6a} I((n-6)a, i) + nd_1 \frac{C^i}{i!} e^{-c} \right). \quad (9.109)$$

В частности, для одной и двух ЗЧ имеем:

$$P_c(T, 1) = \frac{9n}{n-4} e^{-4a} - \frac{12n}{n-5} e^{-5a} + \frac{4n}{n-6} e^{-6a} + 12d_1 e^{-c}; \quad (9.110)$$

$$P_c(T, 2) = 9 \left(\frac{n}{n-4} \right)^2 e^{-4a} - 12 \left(\frac{n}{n-5} \right)^2 e^{-5a} + 4 \left(\frac{n}{n-6} \right)^2 e^{-6a} + 12(d_1(1+C) - d_2)e^{-C};$$

$$d_2 = \frac{3n}{(n-4)^2} - \frac{5n}{(n-5)^2} + \frac{2n}{(n-6)^2}.$$

Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МП8). Граф состояний содержит $L + 5$ состояний (см. рис. 9.2, з). Из системы уравнений получаем:

$$P_{L-1}^*(s) = \frac{s(n\lambda)^{L-1}}{(s+n\lambda)^L}; \quad P_L^*(s) = \frac{s}{s+k\lambda} \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L; \quad P_{L+1}^*(s) = \frac{2\lambda}{s+(k-1)\lambda} P_L^*(s);$$

$$P_{L+2}^*(s) = \frac{3\lambda}{s+(k-1)\lambda} P_L^*(s); \quad P_{L+3}^*(s) = \frac{2\lambda}{s+(k-1)\lambda} \frac{3\lambda}{s+(k-2)\lambda} P_L^*(s).$$

Отсюда

$$Q_c^*(s, L) = \frac{\lambda}{s} ((k-5)P_L^*(s) + (k-4)P_{L+1}^*(s) + (k-3)P_{L+2}^*(s) + (k-2)P_{L+3}^*(s)) =$$

$$= Q_c^*(s, 0) \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L; \quad (9.111)$$

$$Q_c^*(s, 0) = \frac{3\lambda}{s+k\lambda} \left(k-5 + \frac{\lambda}{s+(k-1)\lambda} \left(5k-17 + \frac{6\lambda(k-2)}{s+(k-2)\lambda} \right) \right).$$

Изображения $\Delta P_c^*(s, l)$ и $\Delta P_c^*(s, L)$ находят по формулам (9.103). Обратное преобразование в (9.103) и (9.111) дает:

$$P_c(T, 0) = e^{-(k-2)a} (2 - e^{-a}) (3 - 2e^{-a}); \quad d_1 = \frac{6(k-2)}{n-k+2} - \frac{7(k-1)}{n-k+1} + \frac{2k}{n-k};$$

$$\Delta P_c(T, 1) = \frac{6(k-2)}{n-k+2} e^{-(k-2)a} - \frac{7(k-1)}{n-k+1} e^{-(k-1)a} + \frac{2k}{n-k} e^{-ka} + d_1 e^{-C};$$

$$\Delta P_c(T, L) = d_1 \frac{C^{L-1}}{(L-1)!} e^{-C} + \frac{6(k-2)n^{L-1}}{(n-k+2)^L} e^{-(k-2)a} I((n-k+2)a, L-1) -$$

$$- \frac{7(k-1)n^{L-1}}{(n-k+1)^L} e^{-(k-1)a} I((n-k+1)a, L-1) + \frac{2kn^{L-1}}{(n-k)^L} e^{-ka} I((n-k)a, L-1). \quad (9.112)$$

Суммируя приращения, получим формулу для вероятности безотказной работы:

$$P_c(T, L) = P_c(T, 0) + \sum_{i=0}^L \left(d_1 \frac{C^i}{i!} e^{-C} + \frac{6(k-2)n^i}{(n-k+2)^{i+1}} e^{-(k-2)a} I((n-k+2)a, i) - \right.$$

$$\left. - \frac{7(k-1)n^i}{(n-k+1)^{i+1}} e^{-(k-1)a} I((n-k+1)a, i) + \frac{2kn^i}{(n-k)^{i+1}} e^{-ka} I((n-k)a, i) \right). \quad (9.113)$$

В частности, имеем:

$$P_c(T, 1) = 6e^{-(k-2)a} \left(\frac{6}{n-k+2} - \frac{7}{n-k+1} e^{-a} + \frac{2}{n-k} e^{-2a} \right) + d_1 e^{-c}. \quad (9.114)$$

Для расчета коэффициента готовности МФС надо использовать общие формулы (9.45) и (9.46), подставляя в них выражения для $P_c(T, L)$ из 9.4.4. Коэффициент оперативной готовности находят по общим формулам (9.47), подставляя в них $K_{vj}^*(T, L)$ и $K_{vj}(T, L)$ из (9.45) и (9.46), а $P(\tau, L | j)$ — из формул (6.17), (6.21), (6.24), (6.35)—(6.38), приведенных в главе 6.

Пример 9.1. В системе управления блоком АЭС для повышения надежности при выполнении функции радиационного контроля применено структурное дублирование мониторов типа СТХ. Кроме этих двух мониторов в составе АСУ ТП работают еще 14 мониторов этого же типа, не используемых в выполнении данной ФСО. Для восстановления работоспособности в АСУ ТП предусмотрен комплект одиночного ЗИП с периодическим пополнением с периодом T . Необходимо определить, сколько запасных мониторов надо предусмотреть в комплекте ЗИП-О, чтобы вероятность безотказной работы мониторов при выполнении указанной ФСО в течение двух лет была не менее 0,9. Рассмотреть период пополнения в диапазоне от 0,5 до 1 года. Известно, что средняя наработка до отказа монитора равна 20 000 ч.

Решение. По исходным данным находим параметры: $n = 16$, $\cdot 10^{-5}$ ч, $t = 17\,520$ ч. Для периода $T = 0,5$ года параметр $a = T = 0,219$, а для $T = 1$ год $a = 0,438$. Без ЗИП вероятность безотказной работы $P(t) = \exp(-\lambda t)(2 - \exp(-\lambda t)) = 0,416$ для $t = 2$ года и 0,2126 для $t = 5$ лет. Расчет по точным формулам (9.87) для модели МП2 дает $P_c(T, 1) = 0,9062$ при $T = 1$ год и $P_c(T, 1) = 0,9765$ при $T = 0,5$ года. Используя формулу (9.41) при $r = t/T = 2$ или 4, получим $P_c(t, T, 1) = 0,8212$ при $T = 1$ год и $P_c(t, T, 1) = 0,9093$ при $T = 0,5$ года, $P_c'(t, T, 2) = 0,8778$ при $T = 1$ год и $P_c(t, T, 2) = 0,9494$ при $T = 0,5$ года. Таким образом, при периоде пополнения 0,5 года достаточно предусмотреть в комплекте ЗИП-О один монитор, а при периоде 1 год надо иметь два монитора. При двух ЗЧ можно установить период 10 месяцев, чтобы обеспечить значение ВБР не менее 0,9. Для периода $T = 0,5$ года расчет по приближенной формуле (9.75) дает $P_c(T, 1) = 0,9616$, $P_c(t, T, 1) = 0,8797$. Это существенно меньше, чем точные значения 0,9765 и 0,9063. Расчет по приближенной формуле (9.13) проводится в следующем порядке. Сначала по формуле (9.26) находим коэффициент готовности $K_{гзип} = (2 - (2 + C)\exp(-C))/C = 0,5235$ при $C = na = 16 \cdot 0,219 = 3,504$, затем вычисляем $\rho = -\ln K_{гзип}/n = 0,0404$ и вероятность $P(T, 1) = \exp(-\rho 2a/(1 + 3\rho)) = 0,9843$. Эта величина является оценкой сверху для точного значения 0,9765. При $L = 2$ и $T = 0,5$ года точное значение $P_c(T, 2) = 0,9871$, а верхняя оценка равна 0,9897. Здесь погрешность существенно меньше.

Проведем анализ результатов, представленных в 9.3 и 9.4. Одной из задач анализа является оценка погрешности приближенных формул и области возможного их использования.

Для последовательных однофункциональных систем перерывы в работе на время замены отказавшего модуля работоспособной ЗЧ считаются допустимыми, и поэтому при неограниченном ЗИП можно в приближенных формулах (9.1) и (9.2) принять $P_c(t, \infty) = 1$ и $K_{г. \infty} = 1$, то есть тогда ВБР системы равна вероятности достаточности комплекта ЗИП-О, а коэффициент готовности системы равен коэффициенту готовности комплекта ЗИП-О, рассчитанному по формуле (9.25). Результаты расчетов по точной формуле (9.53) и приближенной формуле (9.25) приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1. Последовательная однофункциональная система

<i>n</i>	<i>a</i>	<i>L</i>	<i>K</i> _{г. т}	<i>K</i> _{г. нр2}	Δ_2	δ_2
2	0,2	1	0,9384	0,9781	0,0396	0,644
4	0,2	1	0,8088	0,9273	0,1186	0,620
6	0,2	1	0,6626	0,8635	0,2009	0,595
10	0,2	1	0,4060	0,7293	0,3233	0,544
20	0,2	1	0,0916	0,4725	0,3809	0,419
2	0,4	1	0,8088	0,9273	0,1186	0,620
4	0,4	1	0,5249	0,7957	0,2708	0,570
6	0,4	1	0,3084	0,6670	0,3586	0,519
10	0,4	1	0,0916	0,4725	0,3809	0,419
20	0,4	1	0,0030	0,2496	0,2466	0,247
2	0,2	2	0,9921	0,9979	0,0058	0,734
4	0,2	2	0,9526	0,9866	0,0340	0,718
6	0,2	2	0,8795	0,9639	0,0844	0,701
10	0,2	2	0,6767	0,8910	0,2143	0,663
20	0,2	2	0,2381	0,6630	0,4249	0,558

Из данных, приведенных в таблице, следует, что приближенная формула (9.25) всегда дает оценку сверху для точного значения коэффициента готовности, причем абсолютная погрешность тем больше, чем больше число основных элементов *k*, интенсивность отказов λ и период пополнения *T*. С увеличением числа ЗЧ абсолютная погрешность уменьшается, но относительная погрешность по коэффициенту простоя $\delta = \Delta / (1 - K_{гст})$, напротив, растет, достигая значений 65–74%. Для резервированных однофункциональных систем следует сравнивать точные формулы (9.54)–(9.74) с приближенными формулами (9.10)–(9.14). При этом можно принять $\bar{T}_{воо} = 0$. В частности, для дублированной системы с двумя элементами при расчете ВБР надо сравнивать точную формулу (9.54) с приближенной формулой

$$P_{нр}(T, L) = \exp(-2\rho a / (1 + 3\rho)), \quad \rho = (-\ln K_{гзип}(L)) / k, \quad a = \lambda T, \quad k = 2, \quad (9.115)$$

где $K_{гзип}(L)$ рассчитывают по формуле (9.25) при $A = k\lambda T = ka$. Некоторые результаты расчетов приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2. Дублированная однофункциональная система

a	L	$\Delta t_{зип}$	$P_{точ}$	$P_{ир2}$	Δ_2	δ_2
0,1	1	132,64	0,9994	0,9994	-0,000011	-0,019
0,2	1	242,70	0,9958	0,9957	-0,000116	-0,028
0,3	1	334,98	0,9876	0,9872	-0,000348	-0,028
0,4	1	412,96	0,9738	0,9733	-0,000570	-0,022
0,5	1	479,22	0,9546	0,9541	-0,000511	-0,011
0,6	1	535,75	0,9302	0,9304	0,000135	0,002
0,7	1	584,10	0,9013	0,9029	0,00163	0,016
0,8	1	625,50	0,8686	0,8727	0,00413	0,031
0,9	1	660,93	0,8328	0,8406	0,00771	0,046
1	1	691,23	0,7948	0,8072	0,01234	0,060
0,1	2	6,48	0,99997	0,99997	-0,0000006	-0,0202
0,2	2	23,07	0,99960	0,99958	-0,000016	-0,0395
0,3	2	46,32	0,9982	0,9981	-0,000101	-0,0567
0,4	2	73,71	0,9951	0,9947	-0,000348	-0,0707
0,5	2	103,43	0,9895	0,9887	-0,000849	-0,0810
0,6	2	134,17	0,9810	0,9793	-0,00166	-0,0872
0,7	2	165,01	0,9691	0,9664	-0,00277	-0,0896
0,8	2	195,33	0,9538	0,9497	-0,00410	-0,0884
0,9	2	224,68	0,9351	0,9296	-0,00546	-0,0840
1	2	252,77	0,9130	0,9063	-0,0067	-0,0771

Здесь относительная погрешность меньше почти на десятичный порядок, чем в последовательной системе (табл. 9.1), и вполне приемлема для выполнения приближенных расчетов. Однако погрешность знакопеременна, и это создает определенные трудности, особенно учитывая, что при значениях ВБР, близких к единице, формула (9.115) дает оценку сверху, то есть завышает фактическую надежность.

Для систем со смешанной структурой следует сравнивать точные формулы (9.59)–(9.74) для моделей П4...П8 с приближенными формулами (9.16)–(9.19). Например, при расчете ВБР для модели П4 следует сравнивать формулу (9.60) и частный случай формулы (9.19)

$$P_c(T, L) = K_{гзип}(T, L) \exp(-2\rho a / (1 + 3\rho)), \quad \rho = (-\ln K_{гзип}) / k, \quad a = \lambda T, \quad (9.116)$$

где $K_{гзип}$ находят по формуле (9.26) при $A = ka$. Результаты расчетов приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.3. Однофункциональная система со смешанной структурой

k	a	$\Delta t_{\text{ЗИП}}, \text{ч}$	$K_{\text{ЗИП}}$	P_1	P_r	$P_{\text{нр}}$	Δ	δ
3	0,1	190,15	0,9871	0,9982	0,9860	0,9852	-0,0008	-0,055
4	0,1	242,70	0,9781	0,9959	0,9662	0,9740	0,0078	0,231
4	0,2	412,96	0,9274	0,9757	0,8857	0,9048	0,0101	0,167
4	0,3	535,75	0,8635	0,9407	0,7828	0,8123	0,0295	0,136
4	0,4	625,50	0,7957	0,8972	0,6732	0,7140	0,0408	0,125
4	0,5	691,23	0,7293	0,8503	0,5670	0,6208	0,0538	0,124
4	0,6	739,01	0,6670	0,8030	0,4696	0,5356	0,0660	0,125
4	0,8	796,66	0,5588	0,7124	0,3100	0,3981	0,0881	0,128
4	1,0	820,88	0,4725	0,6304	0,1968	0,2979	0,1011	0,126

Из данных, приведенных в таблице, следует, что формула (9.116) почти всюду дает оценку сверху для точного значения P_r вероятности безотказной работы. При малых a и k погрешность отрицательна, так как формула для расчета ВБР дублированной части системы P_1 сама является приближенной и в этом диапазоне параметров дает оценку снизу, причем с довольно большой погрешностью. Увеличение числа элементов приводит к повышению абсолютной и относительной погрешности. С ростом a (в диапазоне значений, представляющих практический интерес: $a \leq 0,4$) абсолютная погрешность растет, а относительная падает. Для многофункциональных систем расчеты ВБР могут проводиться как по точным формулам (9.82)–(9.114), так и по двум типам приближенных формул: либо (9.9.13)–(9.14), (9.18) и (9.19), либо (9.75) и (9.76) с использованием формул, приведенных в 9.3. Результаты расчетов для последовательной, дублированной и смешанной систем приведены в табл. 9.4–9.6.

Таблица 9.4. Последовательная многофункциональная система

n	k	a	L	P_r	$P_{\text{нр1}}$	$P_{\text{нр2}}$	Δ_1	Δ_2	δ_1	δ_2
2	1	0,2	1	0,9671	0,953	0,978	-0,014	0,011	-0,44	0,33
4	1	0,2	1	0,9419	0,909	0,927	-0,033	-0,015	-0,57	-0,25
6	1	0,2	1	0,9222	0,879	0,864	-0,043	-0,059	-0,56	-0,76
10	1	0,2	1	0,8947	0,846	0,729	-0,049	-0,165	-0,46	-1,57
20	1	0,2	1	0,8609	0,822	0,473	-0,039	-0,388	-0,28	-2,79
2	1	0,4	1	0,8913	0,850	0,927	-0,041	0,036	-0,38	0,33
4	1	0,4	1	0,8265	0,751	0,796	-0,075	-0,031	-0,43	-0,18
6	1	0,4	1	0,7862	0,707	0,667	-0,080	-0,119	-0,37	-0,58
10	1	0,4	1	0,7428	0,678	0,473	-0,065	-0,270	-0,25	-1,05
10	2	0,2	1	0,8041	0,725	0,729	-0,080	-0,075	-0,41	-0,38

продолжение ➤

Таблица 9.4 (продолжение)

n	k	a	L	P_T	$P_{ип1}$	$P_{ип2}$	Δ_1	Δ_2	δ_1	δ_2
10	3	0,2	1	0,7260	0,630	0,729	-0,096	0,003	-0,35	0,012
10	4	0,2	1	0,6587	0,558	0,729	-0,101	0,071	-0,30	0,21
2	1	0,2	2	0,9958	0,993	0,998	-0,003	0,002	-0,68	0,49
4	1	0,2	2	0,9862	0,972	0,987	-0,015	0,0004	-1,07	0,029
6	1	0,2	2	0,9742	0,945	0,964	-0,029	-0,010	-1,12	-0,40
10	1	0,2	2	0,9490	0,897	0,891	-0,052	-0,058	-1,01	-1,14
20	1	0,2	2	0,9013	0,837	0,663	-0,065	-0,238	-0,66	-2,42
10	2	0,2	2	0,9036	0,822	0,891	-0,082	-0,013	-0,85	-0,13
10	4	0,2	2	0,8271	0,731	0,891	-0,096	0,064	-0,56	0,37
10	6	0,2	2	0,7659	0,691	0,891	-0,075	0,125	-0,32	0,53

Таблица 9.5. Дублированная многофункциональная система

n	k	a	L	P_T	$P_{ип1}$	$P_{ип2}$	Δ_1	Δ_2	δ_1	δ_2
3	2	0,1	1	0,9991	0,9986	0,9991	-0,0005	0,00001	-0,618	0,006
4	2	0,1	1	0,9989	0,9979	0,9989	-0,0010	0,00003	-0,893	0,029
6	2	0,1	1	0,9984	0,9966	0,9985	-0,0018	0,00011	-1,106	0,069
10	2	0,1	1	0,9976	0,9947	0,9979	-0,0028	0,00033	-1,148	0,134
10	2	0,2	1	0,9853	0,9729	0,9885	-0,0123	0,00327	-0,836	0,222
10	2	0,4	1	0,9284	0,8947	0,9522	-0,0338	0,02377	-0,472	0,332
10	2	0,6	1	0,8432	0,7975	0,9050	-0,0456	0,06183	-0,291	0,394
10	2	0,8	1	0,7461	0,6970	0,8549	-0,0491	0,10874	-0,193	0,428
4	2	0,4	1	0,9562	0,9284	0,9617	-0,0278	0,0056	-1,212	0,127
6	2	0,4	1	0,9438	0,9080	0,9561	-0,0359	0,0122	-1,431	0,218
8	2	0,4	1	0,9350	0,8988	0,9533	-0,0362	0,0184	-1,336	0,282
10	2	0,4	1	0,9284	0,8947	0,9522	-0,0338	0,0238	-1,168	0,332
4	2	0,1	2	0,9999	0,9997	0,99989	-0,0002	0,000002	-1,600	0,019
6	2	0,1	2	0,9998	0,9993	0,99979	-0,0005	0,000013	-2,288	0,057
10	2	0,1	2	0,9995	0,9980	0,9995	-0,0014	0,000066	-2,659	0,123
20	2	0,1	2	0,9985	0,9950	0,9989	-0,0035	0,000378	-2,336	0,250
10	2	0,2	2	0,9943	0,9830	0,9956	-0,0114	0,0012	-2,008	0,214
10	2	0,4	2	0,9568	0,9063	0,9712	-0,0505	0,0144	-1,168	0,333
10	2	0,6	2	0,8851	0,8032	0,9314	-0,0819	0,0462	-0,713	0,403
10	2	0,8	2	0,7941	0,6990	0,8853	-0,0951	0,0912	-0,462	0,443
4	2	0,4	2	0,9854	0,9676	0,9655	-0,0177	0,0012	-1,212	0,082

n	k	a	L	P_T	P_{np1}	P_{np2}	Δ_1	Δ_2	δ_1	δ_2
6	2	0,4	2	0,9749	0,9389	0,9797	-0,0360	0,0048	-1,431	0,191
8	2	0,4	2	0,9652	0,9187	0,9746	-0,0465	0,0094	-1,336	0,271
10	2	0,4	2	0,9568	0,9063	0,9712	-0,0505	0,0144	-1,168	0,333

Таблица 9.6. Многофункциональная система со смешанной структурой

n	k	a	L	P_T	P_{np1}	P_{np2}	Δ_1	Δ_2	δ_1	δ_2
4	3	0,1	1	0,9820	0,9775	0,9973	-0,0044	0,0154	-0,246	0,852
6	3	0,1	1	0,9746	0,9629	0,9969	-0,0117	0,0224	-0,459	0,879
10	3	0,1	1	0,9622	0,9410	0,9963	-0,0212	0,0341	-0,561	0,902
20	3	0,1	1	0,9417	0,9130	0,9954	-0,0287	0,0538	-0,492	0,921
10	3	0,2	1	0,8821	0,8305	0,9826	-0,0516	0,1004	-0,438	0,852
10	3	0,3	1	0,7877	0,7159	0,9600	-0,0717	0,1723	-0,338	0,812
10	3	0,4	1	0,6917	0,6115	0,9313	-0,0802	0,2396	-0,260	0,777
10	3	0,5	1	0,6005	0,5200	0,8989	-0,0805	0,2985	-0,201	0,747
4	3	0,4	1	0,7944	0,7524	0,9407	-0,0421	0,1462	-0,205	0,711
6	3	0,4	1	0,7456	0,6671	0,9351	-0,0785	0,1895	-0,309	0,745
8	3	0,4	1	0,7136	0,6287	0,9325	-0,0848	0,2189	-0,296	0,764
20	3	0,4	1	0,6441	0,5977	0,9342	-0,0464	0,2900	-0,130	0,815
6	4	0,1	1	0,9523	0,9381	0,9925	-0,0142	0,0402	-0,298	0,842
8	4	0,1	1	0,9401	0,9151	0,9921	-0,0250	0,0520	-0,417	0,869
10	4	0,1	1	0,9294	0,8963	0,9919	-0,0330	0,0625	-0,468	0,885
20	4	0,1	1	0,8913	0,8426	0,9910	-0,0487	0,0997	-0,448	0,917

Для последовательной системы расчет проводится по формулам (9.82), (9.25) и (9.75) с использованием (9.53), для дублированной системы — по формулам (9.87), (9.115) и (9.75) с использованием (9.54). Для смешанной структуры используются формулы (9.99), (9.116), (9.75) и (9.60).

Из данных, приведенных в табл. 9.4, видно, что формула (9.25) дает знакопеременную ошибку, и в ряде случаев существенно большую, чем формула (9.75). Формула (9.75) всегда дает оценку снизу, причем ее относительная погрешность растет с увеличением разности $n - k$. По всей совокупности признаков формула (9.75) предпочтительнее, чем (9.25). Для дублированной системы (табл. 9.5) формулы (9.115) и (9.75) дают двустороннюю оценку точного значения вероятности. При этом формула (9.115) дает оценку сверху, но более близкую к точному значению, чем оценка (9.75). Более устойчивую оценку, имеющую меньшую погрешность, дает среднее арифметическое оценок, но и оно знакопеременно. Поэтому в инженерных расчетах следует использовать формулу (9.75). Эта оценка по аналогичным критериям остается предпочтительнее и для системы со смешанной структурой (табл. 9.6).

9.5. Расчет надежности многофункциональных систем при непрерывном пополнении запасов

При переходе от периодического пополнения к непрерывному сохраняется возможность использования приближенных оценок первого типа (см. 9.4.1) в соответствии с рекомендациями [1]. Для расчета коэффициента готовности последовательной системы можно использовать формулы (9.125) и (9.40), резервированных систем — формулы (9.11), (9.12) и (9.14), систем со смешанной структурой — формулу

$$K_{г.с}(L, S, \alpha, \beta) = K_{г.зип,0}(L, \alpha, \beta) K_{г.1}(S, \bar{T}_v, \infty),$$

где $K_{г.зип,0}$ рассчитывают по формуле (9.40), а $K_{г.1}$ для резервированной структуры S — по формулам (9.540), (9.11), (9.12) и одной из следующих формул главы 7: (7.6), (7.18а), (7.45), (7.65), (7.74). Для расчета вероятности безотказной работы резервированной системы используются формулы (9.40), (9.11)—(9.13) и одна из следующих формул главы 7: (7.22), (7.25), (7.28)—(7.29а), (7.83). Зная $K_{г.с}$ для последовательной системы, легко по формуле (9.125) найти и коэффициент оперативной готовности.

Однако такой подход не позволяет найти ВБР систем с последовательной и смешанной структурой, а также $K_{г.с}$ и $K_{о.г.с}(\tau)$ для резервированных структур и $K_{о.г.с}(\tau)$ для смешанных структур. Поэтому далее излагается точный метод расчета показателей надежности для всех классов структур. При этом здесь рассматриваются только многофункциональные структуры, так как расчетные формулы для однофункциональных структур можно получить отсюда как частный случай при $n = k$.

При непрерывном пополнении заявка на поставку очередной ЗЧ формируется сразу же после отказа основного элемента. Распределение времени поставки ЗЧ из НИП предполагается экспоненциальным с параметром μ . Поэтому модель функционирования системы сводится либо к схеме гибели и размножения, либо к более общей схеме марковского процесса, рассмотренного в 7.3.1. При расчете ВБР используется приближенная формула (7.29а), так как в технических системах обычно выполняется условие быстрого восстановления, когда $n\lambda/\mu < 1$. Это позволяет свести задачу расчета ВБР к более простой задаче расчет средней нагрузки системы до отказа $\bar{T}_{0c}$. Рассмотрим далее некоторые типовые структуры.

Последовательная систем (модель МН1). Согласно графу состояний (см. рис. 9.3, а), система алгебраических уравнений типа (7.15) имеет вид

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + i\mu\bar{T}_{i-1} + n\lambda\bar{T}_{i+1}}{i\mu + n\lambda}, \quad i = 1 \dots L-1; \quad \bar{T}_L = \frac{1}{L\mu + k\lambda} + \frac{L\mu}{L\mu + k\lambda} \bar{T}_{L-1}.$$

Отсюда

$$\bar{T}_{0c}(L) = \bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \sum_{i=1}^{L-1} \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_i}{n\lambda\theta_i} + \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_L}{k\lambda\theta_L}; \quad (9.117)$$

$$\theta_i = \frac{(np)^i}{i!}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b}, \quad a = \lambda t, \quad b = \mu t.$$

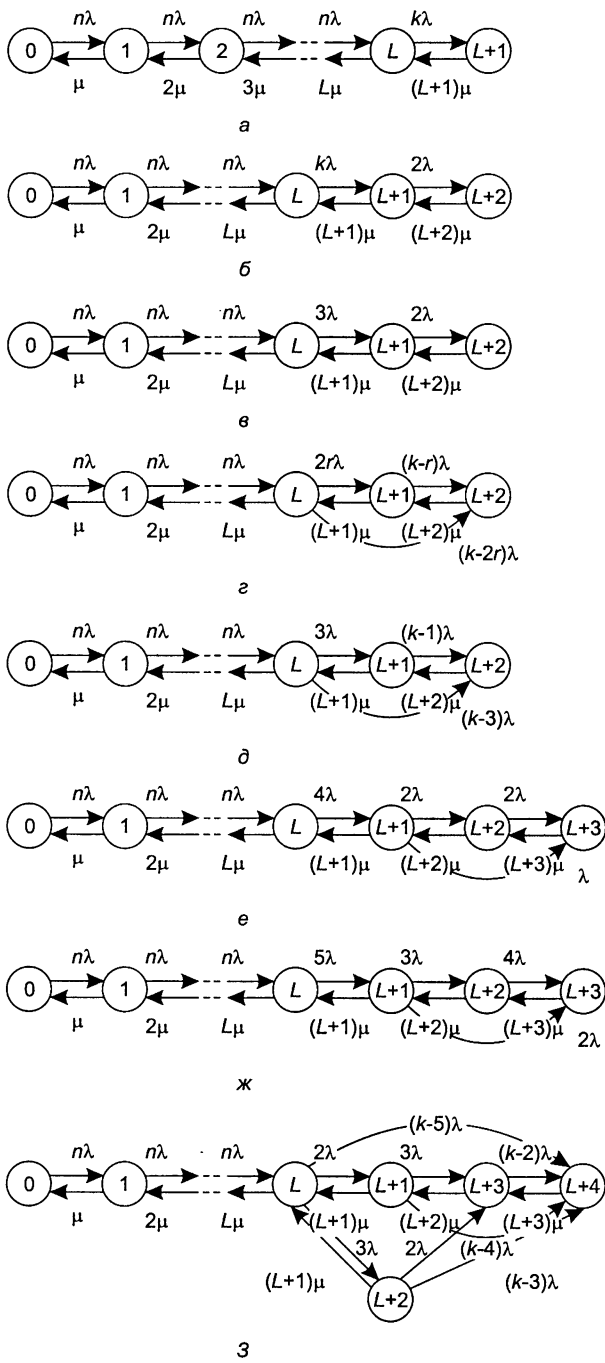


Рис. 9.3. Графы пополнения запасов: а — последовательная; б — дублированная; в — мажорированная; г — последовательная и дублированная; д — последовательная и мажорированная; е — две дублированные; ж — две мажорированные; з — дублированная, мажорированная и последовательная

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(1) = 1 + \frac{C}{A} + \frac{a}{Ap}; \quad P_c(t, 1) = \exp\left(-C/\left(1 + \frac{C}{A} + \frac{b}{A}\right)\right), \quad A = ka, \quad C = na; \quad (9.118)$$

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(2) = 2 + \frac{C}{A} + b\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{A}\right) + \frac{2b^2}{AC}; \quad P_c(t, 2) = \exp\left(-C/\left(2 + \frac{C}{A} + b\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{A}\right) + \frac{2b^2}{AC}\right)\right).$$

Коэффициент готовности определяется в предположении, что после отказа система выключается до момента доставки хотя бы одной ЗЧ. Поэтому система уравнений типа (7.4) имеет вид

$$\begin{aligned} npp_0 &= p_1; \quad npp_{i-1} - (i + np)p_i + (i + 1)p_{i+1} = 0, \quad i = 1 \dots L - 1; \\ npp_{L-1} - (L + kp)p_L + (L + 1)p_{L+1} &= 0; \quad kpp_L = (L + 1)p_{L+1}; \quad \sum_{i=0}^{L+1} p_i = 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_{г.с}(L) = 1 - p_{L+1} = \frac{1 - \theta_{L+1}}{(1 + \theta_1 + \dots + \theta_L + \theta_{L+1})}; \quad \theta_{L+1} = \frac{k(np)^{L+1}}{n(L+1)!}. \quad (9.119)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$K_{г.с}(1) = \frac{1 - knp^2}{(2 + 2np + knp^2)},$$

$$K_{г.с}(2) = \frac{1 - kn^2p^3}{(6 + 6np + 3n^2p^2 + kn^2p^3)}.$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{о.г.с}(\tau, L) = K_{г.с}(L)P_c(\tau) = K_{г.с}(L)\exp(-k\lambda\tau).$$

Дублированная система (модель МН2). Согласно графу состояний (см. рис. 9.3, б), система уравнений для определения средней наработки до отказа имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \frac{1}{n\lambda} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + i\mu\bar{T}_{i-1} + n\lambda\bar{T}_{i+1}}{i\mu + n\lambda}, \quad i = 1 \dots L - 1; \\ \bar{T}_L &= \frac{1 + L\mu\bar{T}_{L-1} + k\lambda\bar{T}_{L+1}}{L\mu + k\lambda}; \quad \bar{T}_{L+1} = \frac{1 + (L+1)\mu\bar{T}_L}{(L+1)\mu + r\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{T}_{0c}(L) = \bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \sum_{i=1}^{L-1} \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_i}{n\lambda\theta_i} + \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_L}{k\lambda\theta_L} + \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+1}}{r\lambda\theta_{L+1}},$$

где θ_i определяют по формулам (9.117) и (9.119). В частности, имеем:

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(1) = 1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{k} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{k} + \frac{n}{r^2} \right) + \frac{1}{(rp)^2};$$

$$P_c(t, 1) = \exp\left(-C/\left(1 + \frac{3C}{A} + \frac{b}{A}\left(1 + \frac{4C}{A}\right) + \frac{4b^2}{A^2}\right)\right);$$

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(2) = 2 + \frac{3n}{k} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{k} + \frac{6}{k^2}\right) + \frac{2}{k\rho^2}\left(\frac{1}{n} + \frac{6}{k}\right) + \frac{12}{nk^2\rho^3};$$

$$P_c(t, 2) = \exp\left(-C/\left(2 + \frac{3C}{A} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{a}{C} + \frac{2a}{A} + \frac{6a^2}{A^2}\right) + \frac{2a}{A\rho^2}\left(\frac{a}{C} + \frac{6a}{A}\right) + \frac{12a^3}{CA^2\rho^3}\right)\right).$$

Коэффициент готовности находят из системы уравнений

$$npp_0 = p_1; \quad npp_{i-1} = ip_i, \quad i = 1 \dots L-1; \quad krp_L = (L+1)p_{L+1};$$

$$rpp_{L+1} = (L+2)p_{L+2}; \quad \sum_{i=0}^{L+2} p_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{r.c}(L) = 1 - p_{L+2} = 1 - \frac{\theta_{L+2}}{(1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+1} + \theta_{L+2})}; \quad \theta_{L+2} = \frac{kr}{n^2} \frac{(np)^{L+2}}{(L+2)!},$$

где $\theta_i, i = 0 \dots L$, и θ_{L+1} определяют по формулам (9.117) и (9.119). В частности, имеем:

$$K_{r.c}(1) = 1 - \frac{km^2\rho^4}{(6 + 6np + 3knp^2 + km\rho^3)};$$

$$K_{r.c}(2) = 1 - \frac{km^2\rho^4}{(24 + 24np + 12n^2\rho^2 + 4kn^2\rho^3 + kmn^2\rho^4)}.$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{o.r.c}(\tau, L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2})e^{-\lambda\tau}(2 - e^{-\lambda\tau}) + p_{L+1}e^{-\lambda\tau};$$

$$p_i = \theta_i p_0, \quad p_0 = \frac{1}{(1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+1} + \theta_{L+2})}.$$

Мажорированная система (модель МНЗ). Составляя систему уравнений по графу состояний (см. рис. 9.3, в) и решая ее, получим:

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(L) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_i}{\theta_i} + \frac{n}{3} \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_L}{\theta_L} + \frac{n}{2} \frac{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+1}}{\theta_{L+1}}; \quad (9.120)$$

$$\theta_i = \frac{(np)^i}{i!}, \quad i = 0 \dots L; \quad \theta_{L+1} = \frac{3}{n} \frac{(np)^{L+1}}{(L+1)!}.$$

В частности, имеем:

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(1) = 1 + \frac{5n}{6} + \frac{n}{k} + \frac{1}{3\rho}(n+1) + \frac{1}{3\rho^2};$$

$$P_c(t, 1) = \exp\left(-C/\left(1 + \frac{5C}{2A} + \frac{a+C}{3\rho A} + \frac{1}{3\rho^2}\right)\right);$$

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(2) = 2 + \frac{5n}{6} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{3} + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(1 + \frac{2}{3n}\right) + \frac{1}{n\rho^3} \quad (9.121)$$

$$P_c(t, 2) = \exp\left(-C\left/ \left(2 + \frac{5C}{2A} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{a}{C} + \frac{2a}{A} + \frac{C}{2a}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(1 + \frac{2a}{3C}\right) + \frac{a}{C\rho^3}\right)\right.\right), \quad A = 3a.$$

При $n = 3$ и $A = C$ отсюда получим формулы для однофункциональной системы. Коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности находят по формулам

$$K_{г.с}(L) = 1 - p_{L+2} = 1 - \theta_{L+2}p_0, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+2}}; \quad \theta_{L+2} = \frac{6}{n^2} \frac{(n\rho)^{L+2}}{(L+2)!},$$

$$K_{о.г.с}(L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2})e^{-2\lambda\tau}(3 - 2e^{-\lambda\tau}) + p_{L+1}e^{-2\lambda\tau}, \quad p_i = \theta_i p_0,$$

где $\theta_i, i = 0 \dots L$, и θ_{L+1} определяют по формулам (9.120).

Последовательное соединение дублированной и резервированной подсистем (модель МН4). Система уравнений для определения средней наработки до отказа, составленная по графу состояний (см. рис. 9.3, з), имеет вид

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + i\mu\bar{T}_{i-1} + n\lambda\bar{T}_{i+1}}{i\mu + n\lambda}, \quad i = 1 \dots L-1; \quad (9.122)$$

$$\bar{T}_L = \frac{1 + L\mu\bar{T}_{L-1} + 2r\lambda\bar{T}_{L+1}}{L\mu + k\lambda}; \quad \bar{T}_{L+1} = \frac{1 + (L+1)\mu\bar{T}_L}{(L+1)\mu + (k-r)\lambda}.$$

При $L = 1$ и 2 система (9.122) имеет следующее решение:

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(1) = 1 + \frac{(1+n\rho)(2+(k-r)\rho) + 2nr\rho^2}{\rho(2(k-2r) + k(k-r)\rho)};$$

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(2) = 1 + \frac{n\rho(3+(k+r)\rho) + \left(1 + \frac{1}{n\rho}\right)(6 + (5k-8r)\rho + k(k-r)\rho^2)}{\rho(3(k-2r) + k(k-r)\rho)}.$$

Коэффициент готовности находят из системы уравнений

$$nr\rho p_0 = p_1; \quad nr\rho p_{i-1} = ip_i, \quad i = 1 \dots L; \quad k\rho p_L = (L+1)p_{L+1};$$

$$2r\rho p_L - (L+1+(k-r)\rho)p_{L+1} + (L+2)p_{L+2} = 0; \quad (9.123)$$

$$(k-2r)\rho p_L + (k-r)\rho p_{L+1} = (L+2)p_{L+2}; \quad \sum_{i=0}^{L+2} p_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{г.с}(L) = 1 - p_{L+2} = 1 - \theta_{L+2}p_0, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+2}};$$

$$\theta_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad i = 0 \dots L; \quad \theta_{L+1} = \frac{k(n\rho)^{L+1}}{n(L+1)!}; \quad \theta_{L+2} = \frac{\rho}{L+2} \left(k - 2r + \frac{k(k-r)\rho}{L+1} \right) \theta_L.$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{\text{о.г.с}}(\tau, L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2})e^{-(k-r)\lambda\tau} (2 - e^{-r\lambda\tau}) + p_{L+1}e^{-(k-r)\lambda\tau}.$$

Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МН5). Система уравнений для средней наработки до отказа, согласно графу состояний (см. рис. 9.3, д), имеет вид

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + i\mu\bar{T}_{i-1} + n\lambda\bar{T}_{i+1}}{i\mu + n\lambda}, \quad i = 1 \dots L-1; \quad (9.124)$$

$$\bar{T}_L = \frac{1 + L\mu\bar{T}_{L-1} + 3\lambda\bar{T}_{L+1}}{L\mu + k\lambda}; \quad \bar{T}_{L+1} = \frac{1 + (L+1)\mu\bar{T}_L}{(L+1)\mu + (k-1)\lambda}.$$

Решая систему (9.124) при $L = 1$ и 2 , получим:

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(1) = 1 + \frac{2 + (2n + k - 1)\rho + n(k+2)\rho^2}{\rho(2(k-3) + k(k-1)\rho)}; \quad (9.125)$$

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(2) = 1 + \frac{n \left(3 + (k+2)\rho + \left(\frac{1}{(n\rho)^2} \right) \right) (1 + n\rho)(6 + (5k-11)\rho + k(k-1)\rho^2)}{3(k-3) + k(k-1)\rho}.$$

При $k = 3$ формулы (9.125) совпадают с (9.121).

Система уравнений для определения коэффициента готовности отличается от (9.123) только последними двумя уравнениями:

$$3\rho p_L - (L+1 + (k-1)\rho)p_{L+1} + (L+2)p_{L+2} = 0;$$

$$(k-3)\rho p_L + (k-1)\rho p_{L+1} = (L+2)p_{L+2}; \quad \sum_{i=0}^{L+2} p_i = 1.$$

Решая систему уравнений, получим расчетную формулу:

$$K_{\text{г.с}}(L) = 1 - p_{L+2} = 1 - \theta_{L+2} p_0, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+2}};$$

$$\theta_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad i = 0 \dots L; \quad \theta_{L+1} = \frac{k(n\rho)^{L+1}}{n(L+1)!}; \quad \theta_{L+2} = \frac{\rho}{L+2} \left(k - 3 + \frac{k(k-1)\rho}{L+1} \right) \theta_L.$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{\text{о.г.с}}(\tau, L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2})e^{-(k-1)\lambda\tau} (3 - 2e^{-\lambda\tau}) + p_{L+1}e^{-(k-1)\lambda\tau}, \quad p_i = \theta_i p_0.$$

Последовательное соединение двух дублированных элементов (модель МН6). Система уравнений для средней наработки до отказа, составленная по графу состояний (см. рис. 9.3, е), имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{T}_0 &= \frac{1}{n\lambda} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + i\mu\bar{T}_{i-1} + n\lambda\bar{T}_{i+1}}{i\mu + n\lambda}, \quad i = 1 \dots L-1; \quad \bar{T}_L = \frac{1 + L\mu\bar{T}_{L-1} + 4\lambda\bar{T}_{L+1}}{L\mu + 4\lambda}; \\ \bar{T}_{L+1} &= \frac{1 + (L+1)\mu\bar{T}_L + 2\lambda\bar{T}_{L+2}}{(L+1)\mu + 3\lambda}; \quad \bar{T}_{L+2} = \frac{1 + (L+2)\mu\bar{T}_{L+1}}{(L+2)\mu + 2\lambda}.\end{aligned}\quad (9.126)$$

Решение (9.126) при $L = 1$ и 2 приводит к расчетной формуле:

$$\begin{aligned}n\lambda\bar{T}_{0c}(1) &= \frac{6 + 31\rho + 2\rho^2(23 + 6n) + 16\rho^3(3 + n)}{12n\rho^2(1 + 2\rho)}; \\ n\lambda\bar{T}_{0c}(2) &= 1 + \frac{6 + 5\rho + 3\rho^2}{2\rho^2(2 + 3\rho)} \left(\frac{1 + n\rho}{n\rho} + \frac{n\rho(6 + 21\rho + 19\rho^2)}{2(6 + 5\rho + 7\rho^2 + 6\rho^3)} \right).\end{aligned}$$

Система уравнений для определения коэффициента готовности имеет вид

$$\begin{aligned}n\rho p_0 &= p_1, n\rho p_{i-1} = ip_i, \quad i = 1 \dots L; \quad 4\rho p_L = (L+1)p_{L+1}; \\ 4\rho p_L - (L+1+3\rho)p_{L+1} + (L+2)p_{L+2} &= 0; \\ 2\rho p_{L+1} - (L+2+2\rho)p_{L+2} + (L+3)p_{L+3} &= 0; \\ \rho(p_{L+1} + 2p_{L+2}) &= (L+3)p_{L+3}; \quad \sum_{i=0}^{L+2} p_i = 1.\end{aligned}\quad (9.127)$$

Решение этой системы дает расчетную формулу

$$\begin{aligned}K_{г.с}(L) &= 1 - p_{L+3} = 1 - \theta_{L+3}p_0, \quad p_0 = \frac{1}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+3}}, \quad \theta_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad i = 0 \dots L; \\ \theta_{L+1} &= \frac{4(n\rho)^{L+1}}{n(L+1)!}; \quad \theta_{L+2} = \frac{3\rho}{L+2}\theta_{L+1}; \quad \theta_{L+3} = \frac{\rho}{L+3} \left(1 + \frac{6\rho}{L+2} \right) \theta_{L+1}.\end{aligned}$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{о.г.с}(\tau, L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2} - p_{L+3})e^{-2\lambda\tau}(2 - e^{-\lambda\tau})^2 + p_{L+1}e^{-2\lambda\tau}(2 - e^{-\lambda\tau}) + p_{L+2}e^{-2\lambda\tau}.$$

Последовательное соединение двух мажорированных групп (модель МН7). Система уравнений для средней наработки до отказа, составленная по графу состояний (см. рис. 9.3, ж), отличается от (9.126) последними тремя уравнениями

$$\begin{aligned}\bar{T}_L &= \frac{1 + L\mu\bar{T}_{L-1} + 6\lambda\bar{T}_{L+1}}{L\mu + 6\lambda}; \quad \bar{T}_{L+1} = \frac{1 + (L+1)\mu\bar{T}_L + 3\lambda\bar{T}_{L+2}}{(L+1)\mu + 5\lambda}; \\ \bar{T}_{L+2} &= \frac{1 + (L+2)\mu\bar{T}_{L+1}}{(L+2)\mu + 4\lambda}.\end{aligned}\quad (9.128)$$

Решение (9.126) и (9.128) при $L = 1$ и 2 имеет вид

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(1) = 1 + \frac{n}{6(1+2\rho)} \left(3 + 7\rho + \frac{1+n\rho}{3n\rho^2} (3 + 7\rho + 6\rho^2) \right);$$

$$n\lambda\bar{T}_{0c}(2) = 1 + n \frac{6 + 13\rho + 31\rho^2}{12\rho(2 + 5\rho)} + \frac{1 + n\rho}{3n\rho^3} \frac{3 + 5\rho + 11\rho^2 + 15\rho^3}{2 + 5\rho}.$$

Система уравнений для определения коэффициента готовности отличается от (9.127) последними четырьмя уравнениями

$$6\rho p_L = (L + 1)p_{L+1}; \quad 6\rho p_L - (L + 1 + 3\rho)p_{L+1} + (L + 2)p_{L+2} = 0; \quad (9.129)$$

$$3\rho p_{L+1} - (L + 2 + 4\rho)p_{L+2} + (L + 3)p_{L+3} = 0; \quad 2\rho(p_{L+1} + 2p_{L+2}) = (L + 3)p_{L+3}.$$

Решение (9.129) и (9.127) дает:

$$K_{г.с.}(L) = 1 - p_{L+3} = 1 - \theta_{L+3}p_0,$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \theta_1 + \dots + \theta_{L+3}}, \quad \theta_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad i = 0 \dots L;$$

$$\theta_{L+1} = \frac{6}{n} \frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!}; \quad \theta_{L+2} = \frac{5\rho}{L+2} \theta_{L+1}; \quad \theta_{L+3} = \frac{2\rho}{L+3} \left(1 + \frac{10\rho}{L+2} \right) \theta_{L+1}.$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{о.г.с.}(\tau, L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2} - p_{L+3})e^{-4\lambda\tau}(3 - 2e^{-\lambda\tau})^2 + \\ + p_{L+1}e^{-4\lambda\tau}(3 - 2e^{-\lambda\tau}) + p_{L+2}e^{-4\lambda\tau}. \quad (9.130)$$

Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МН8). Согласно графу состояний (см. рис. 9.3, з) система уравнений для средней наработки до отказа имеет вид

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \bar{T}_1; \quad \bar{T}_i = \frac{1 + i\mu\bar{T}_{i-1} + n\lambda\bar{T}_{i+1}}{i\mu + n\lambda}, \quad i = 1 \dots L-1; \quad (9.131)$$

$$\bar{T}_L = \frac{1 + L\mu\bar{T}_{L-1} + 3\lambda\bar{T}_{L+1} + 2\lambda\bar{T}_{L+2}}{L\mu + k\lambda}; \quad \bar{T}_{L+1} = \frac{1 + (L+1)\mu\bar{T}_L + 2\lambda\bar{T}_{L+3}}{(L+1)\mu + (k-1)\lambda};$$

$$\bar{T}_{L+2} = \frac{1 + (L+2)\mu\bar{T}_{L+1}}{(L+1)\mu + (k-1)\lambda}; \quad \bar{T}_{L+3} = \frac{1 + (L+2)\mu\bar{T}_{L+1}}{(L+2)\mu + (k-2)\lambda}.$$

Аналитическое решение (9.131) даже при $L = 1$ имеет громоздкий вид. Поэтому следует использовать численную процедуру.

Система уравнений для определения коэффициента готовности

$$p_i = (n\rho)^i / i! p_0, \quad i = 0 \dots L; \quad n\rho p_{L-1} - (L + k\rho)p_L + (L + 1)(p_{L+1} + p_{L+2}) = 0; \\ 2\rho p_L - (L + 1 + (k-1)\rho)p_{L+1} + (L + 2)p_{L+3} = 0; \quad 3\rho p_L - (L + 1 + (k-1)\rho)p_{L+2} = 0; \\ \rho(3p_{L+1} + 2p_{L+2}) - (L + 2 + (k-2)\rho)p_{L+3} + (L + 3)p_{L+4} = 0; \\ \rho((k-5)p_L + (k-4)p_{L+1} + (k-3)p_{L+2} + (k-2)p_{L+3}) = (L + 3)p_{L+4}.$$

Отсюда

$$K_{г.с.}(L) = 1 - p_{L+4} = 1 - A_4 p_L; \quad p_{L+i} = A_i p_L, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$A_1 = \frac{\rho}{L+1} \frac{(k-3)(L+1) + k(k-1)\rho}{L+1 + (k-1)\rho}; \quad A_2 = \frac{3\rho}{L+1 + (k-1)\rho};$$

$$A_3 = \frac{\rho}{L+2} \left(k-5 + \frac{\rho}{L+1} k(k-1) \right);$$

$$A_4 = \frac{\rho}{L+3} (k-5 + (k-4)A_1 + (k-3)A_2 + (k-2)A_3).$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{\text{о.г.с}}(\tau, L) = (1 - p_{L+1} - p_{L+2} - p_{L+3} - p_{L+4})e^{-(k-2)\lambda\tau}(2 - e^{-\lambda\tau})(3 - 2e^{-\lambda\tau}) +$$

$$+ p_{L+1}e^{-(k-2)\lambda\tau}(3 - 2e^{-\lambda\tau}) + p_{L+2}e^{-(k-2)\lambda\tau}(2 - e^{-\lambda\tau}) + p_{L+3}e^{-(k-2)\lambda\tau}.$$

В схемах, где затруднительно получить точные формулы для расчета вероятности безотказной работы, можно использовать приближенные оценки. Основная идея получения таких оценок состоит в замене резервированной или смешанной структуры последовательным соединением элементов с эквивалентными параметрами k^* и L^* .

Для резервированной структуры (модели МН2, МН3, МН6, МН7 и др.) эквивалентные параметры принимают значения

$$k^* = k - m_p; \quad L^* = L + m_p,$$

где m_p — количество резервных элементов в схеме внутреннего структурного резервирования (например, в модели МН7 $m_p = 2$). Для смешанной структуры (МН4, МН5, МН8 и др.)

$$k^* = k - m; \quad L^* = L, \quad (9.132)$$

где m — общее количество элементов в нерезервированной части системы. При эквивалентировании в резервированной структуре нагруженные резервные элементы переводятся в модели в ненагруженный режим и объявляются полнодоступными. Поэтому в однофункциональных системах расчет по формулам (9.117)–(9.119) дает оценку сверху. В смешанной структуре при эквивалентных параметрах (9.132) в оценках игнорируется резервированная часть системы. Поскольку она все же дает определенный вклад в отказ системы, расчеты по формулам (9.117)–(9.119) также дают оценку сверху. В многофункциональных системах резервные элементы, переведенные в модели (но не в действительности) в запасные части, становятся доступными для той части системы, которая не участвует в выполнении данной ФСО. И это приводит к снижению надежности при выполнении ФСО. Поэтому эквивалентирование может привести к оценке снизу.

9.6. Оптимизация комплекта ЗИП

При наличии многих типов запасов, предусмотренных в комплекте ЗИП, существует много вариантов выполнения требований к показателю достаточности или показателю надежности. Выбрать один из них можно путем решения задачи оптимизации по заданному критерию (целевой функции). Наиболее естественно использовать

в качестве критерия суммарные затраты на создание начальных запасов в комплекте ЗИП. Тогда прямая задача оптимизации формулируется следующим образом. Необходимо обеспечить минимум критериальной функции

$$C_{\Sigma \text{ЗИП}}^0 = \sum_{i=1}^N C_i L_i^0 = \min_{(L_1, \dots, L_N)} \sum_{i=1}^N C_i L_i$$

при ограничении

$$\text{ПД}(L_1, \dots, L_N) \geq \text{ПД}^0, \tag{9.133}$$

где $(C_1, \dots, C_N)$ — вектор стоимостей запасных частей; $(L_1, \dots, L_N)$ — оптимальный комплект ЗИП; ПД^0 — нормативное значение показателя достаточности. При нормировании показателя надежности (ПН) в однофункциональной системе вместо (9.133) используют условие

$$\text{ПН}(L_1, \dots, L_N) \geq \text{ПН}^0. \tag{9.134}$$

В многофункциональной системе ограничение имеет векторный характер. Если система выполняет m различных ФСО и для каждого ФСО нормируется показатель надежности, то вместо (9.134) используют неравенства

$$\text{ПН}_i(L_1, \dots, L_N) \geq \text{ПН}_i^0, \quad i = 1 \dots m.$$

Здесь должны быть выполнены все m неравенств.

В обратной задаче оптимизации максимизируется ПД или ПН, а суммарные затраты играют роль ограничения, задающего область поиска оптимального комплекта. Поэтому задача формулируется так.

Необходимо обеспечить максимум критериальной функции

$$\text{ПД}^0 = \text{ПД}(L_1^0, \dots, L_N^0) = \max_{(L_1, \dots, L_N)} \text{ПД}(L_1, \dots, L_N)$$

или

$$\text{ПН}^0 = \text{ПН}(L_1^0, \dots, L_N^0) = \max_{(L_1, \dots, L_N)} \text{ПН}(L_1, \dots, L_N)$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^N C_i L_i \leq C_{\Sigma \text{ЗИП}}^0.$$

Область оптимизации может быть расширена за счет вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ индикаторов способа пополнения запасов. При этом часть типов запасов может быть исключена из вектора α . Тогда соответствующему номеру присваивается значение $\alpha_i = 0$. Рассмотрим далее несколько вариантов алгоритмов и процедур оптимизации.

9.6.1. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям достаточности

Алгоритм состоит из трех укрупненных составных частей:

- расчет базового комплекта;
- оптимизация комплекта;
- оценка запасов в комплекте ЗИП.

Расчет базового комплекта. Для расчета базового комплекта выполняют следующие действия.

Исходные данные подготавливают в форме таблицы формуляров (табл. 9.7), в которой заполняют первые семь граф.

Таблица 9.7. Таблица формуляров

i	n_i	λ_i	C_i	α_i	T_i	β_i	L_i	A_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	n_1	λ_1	C_1	α_1	T_1	β_1	L_1	A_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
N	nN	λN	CN	α_N	TN	βN	LN	AN

В графах таблицы указывают порядковый номер типа запасов i , количество модулей i -го типа в основной аппаратуре n_i , интенсивность отказов одного модуля λ_i , стоимость одной ЗЧ i -го типа C_i , способ пополнения запасов α_i ($\alpha_i = 1, 2, 3$ или 4), первый основной параметр T_i способа пополнения (период пополнения или среднее время доставки ЗЧ), второй параметр способа пополнения β_i (среднее время экстренной доставки при способе ПЭД ($\alpha = 2$) или уровень пополнения запасов при способе ПУ, $\alpha = 2$).

Задают нормативное значение ПД R^0 ($P_{\text{ЗИП}}^0$, $K_{\text{гЗИП}}^0$ или $\Delta t_{\text{ЗИП}}^0$) и вычисляют

$$D = -\ln R^0; \quad (9.135)$$

$$R^0 = P_{\text{ЗИП}}^0; \quad R^0 = K_{\text{гЗИП}}^0; \quad R^0 = \exp\left(-\sum_{i=1}^N n_i \lambda_i \Delta t_{\text{ЗИП}}^0\right).$$

Вычисляют $A_i = n_i \lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.

Дополняют таблицу формуляров графами 10, 11 и 12.

Для каждого i находят минимальное значение L_i^0 , удовлетворяющее условию

$$-\ln R_i(L_i^0, A_i) \leq D, \quad (9.136)$$

где в качестве R_i используют показатель достаточности комплекта: вероятность достаточности (для $\alpha_i = 1$, $T_i = T$) или коэффициент готовности комплекта $K_{\text{гЗИП}}$:

$$-\ln R_i = n_i \lambda_i T; \quad -\ln R_i = -\ln K_{\text{гЗИП}}(L_i, T_i, \alpha_i, \beta_i). \quad (9.137)$$

Значения L_i^0 записывают в графу 8, а $-\ln R_i$ — в графу 10 таблицы формуляров.

Определяют сумму чисел в графе 10:

$$-\ln R = -\sum_{i=1}^N \ln R_i$$

и убеждаются, что не выполняется неравенство

$$-\ln R \leq D. \quad (9.138)$$

Оптимизация комплекта ЗИП. В многошаговой процедуре оптимизации выполняют следующие действия.

Для каждого i вычисляют $-\ln R_i(L_i + 1, A_i)$ и записывают в графу 11 таблицы формуляров.

Вычисляют $\Delta_i = (\ln R_i(L_i + 1, A_i) - \ln R_i(L_i, A_i))/C_i$ и записывают в графу 12.

Выбирают максимальное число Δ_i в графе 12 и определяют номер строки i^* , в которой оно стоит.

В строке с номером i^* меняют числа в графах 8, 10–12: в графе 8 увеличивают число ЗЧ на единицу, в графу 10 переносят число из графы 11, в графах 11 и 12 записывают значения, соответствующие новым значениям в графах 8 и 10.

Вычисляют сумму значений в графе 10. При этом можно избежать суммирования всех N чисел в графе 10, а из предыдущего значения суммы вычесть $C_i \Delta_i^*$, где Δ_i^* — значение в графе 12 на предыдущем шаге. Иначе говоря,

$$-\ln R^{(l)} = -\ln R^{(l-1)} - C_i \Delta_i^{(l-1)},$$

где l — номер шага оптимизации.

Если не выполняется условие (9.138), то следует вернуться к п. 9. Если, напротив, условие (9.138) выполняется, то требование к показателю достаточности удовлетворено и комплект ЗИП, представленный в графе 8 таблицы формуляров, является оптимальным.

Вычисляют суммарные затраты на оптимальный комплект по формуле

$$C_{\Sigma \text{ЗИП}} = \sum_{i=1}^N C_i L_i. \quad (9.139)$$

Оценка запасов в комплекте ЗИП-О. Назначение оценки состоит в определении фактических характеристик комплекта при известных исходных данных, записанных в графах 1–8 таблицы формуляров. Для этого выполняют следующие действия.

Вычисляют $A_i = n_i \lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.

Вычисляют $-\ln R_i(L_i, A_i)$ по формулам (9.137) и записывают в графу 10 таблицы формуляров.

Суммируют значения в графе 10 и находят показатель достаточности по одной из формул

$$P_{\text{ЗИП}} = e^{\ln R}; \quad K_{\text{гЗИП}} = e^{\ln R}; \quad \Delta t_{\text{ЗИП}} = -\ln R / \sum_{i=1}^N n_i \lambda_i. \quad (9.140)$$

Определяют суммарные затраты по формуле (9.139).

Если оценка проводится сразу же после оптимизации, то все действия, кроме п. 16, уже выполнены. Поэтому остается лишь найти показатель достаточности. Из-за дискретности процесса оптимизации после последнего шага в цикле пп. 9–12 может образоваться некоторый запас по ПД: $\Delta_{\text{ПД}} = D + \ln R$. Это дает возможность уменьшить комплект ЗИП, не нарушая условие (9.138), выполнив следующие действия.

Таблицу формуляров дополняют графой 13, в неё записывают значения $\delta_i = C_i \Delta_i = \ln R_i(L_i + 1, A_i) - \ln R_i(L_i, A_i)$.

Выделяют множество индексов i , для которых $\delta_i \leq \Delta_{\text{пд}}$. Если это множество пусто, то уменьшение комплекта невозможно.

Если множество не пусто, то в нем определяют строку, в которой находится минимальное число Δ_i , и соответствующий ему номер i^{**} . Удаление одной ЗЧ этого типа приводит к минимальному снижению ПД при максимальном уменьшении стоимости комплекта.

Уменьшают на единицу значение L_i в графе 8 и изменяют значения в графах 10–12 строки с номером i^{**} .

Суммируют значения в графе 10 и проверяют условие (9.138). Если условие выполняется, то возвращаются к п. 20. Если же не выполняется, то результаты последнего цикла аннулируются и полученный комплект объявляется окончательным.

Рассчитывают суммарные затраты по формуле (9.139).

Вместо процедуры оптимизации может использоваться упрощенная одношаговая процедура расчета комплекта ЗИП, основанная на идее пропорционального вклада всех типов запасов в сумму $-\ln R$.

Расчет запасов в комплекте ЗИП. В качестве исходных данных используют таблицу формуляров с заполненными графами 1–7. При расчете выполняют следующие действия.

Вычисляют $A_i = n_i \lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.

Определяют вклад i -го типа запасов в значение ПД по формуле

$$d_i = A_i C_i D / \sum_{j=1}^N A_j C_j, \quad i = 1 \dots N.$$

Вычисляют минимальное число L_i^* , удовлетворяющее условию

$$-\ln R_i(L_i^*, A_i) \leq d_i,$$

и записывают его в графу 8 таблицы формуляров.

Вычисляют $-\ln R_i(L_i^*, A_i)$ по формулам (9.137) и записывают в графу 10 таблицы формуляров.

Суммируют значения в графе 10 и проводят контрольную проверку значения ПД по одной из формул (9.140). Если контрольное значение не соответствует заданному, то проверяют расчет с целью устранения ошибки в вычислениях. Если же контрольное значение соответствует заданному, то найденный комплект $(L_i^*, i = 1 \dots N)$ объявляется окончательным.

Рассчитывают суммарные затраты по формуле (9.139).

Комплект $(L_i^*, i = 1 \dots N)$ является избыточным по сравнению с оптимальным. Поэтому может быть предпринята попытка уменьшить его с помощью процедуры пп. 18–23.

Пример 9.2. Автоматизированная система управления радиационным контролем блока АЭС имеет в своем составе подсистему, состоящую из группы процессорных плат с процессором РП, видеоадаптером и сетевым адаптером (ПП РП), процессорных плат СРСІ (ППСРСІ), жестких дисков (ЖД) SCSI, оперативной

памяти (ОП) SO-DIMM, флоппи-дисков (ФД) CPCI, мониторов 19"CRT, интерфейсных плат для связи с магистралью типа RS (PRS), сетевых адаптеров для связи с магистралью Ethernet (CE), сетевых адаптеров CPCI для связи с магистралью Ethernet (DCE) и кросс-плат (КП) CPCI. Исходные данные о составе подсистемы и показателях надежности модулей приведены в графах 1–7 табл. 9.8. Для повышения надежности информационно-вычислительного комплекса (ИВК) используется комплект одиночного ЗИП с периодическим пополнением запасов (период $T = 1 \text{ год} = 8760 \text{ ч}$). В качестве показателя достаточности принят коэффициент готовности комплекта с нормативным значением $K_{г\text{ЗИП}}^0 = 0,9$. Необходимо найти оптимальный комплект ЗИП-О по критерию минимума суммарных затрат.

Решение. По формуле (9.135) находим $D = -\ln K_{г\text{ЗИП}}^0 = 0,1054$. Используя процедуру пп. 1–6, находим базовый комплект и записываем в графу 8 табл. 9.8.

Таблица 9.8. Исходные данные к примеру 9.2 ($K_{г\text{ЗИП}}(L_0) = 0,6777$, $C\Sigma = 121,1 \text{ тыс. р.}$)

<i>i</i>	<i>n</i>	$\lambda \cdot 10^6, \text{ ч}^{-1}$	<i>C</i> , тыс. р	α	<i>T</i> , лет	β	<i>L</i> 0
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	10,0	23,000	1	1	–	1
2	7	10,0	30,000	1	1	–	1
3	7	22,7	9,000	1	1	–	2
4	16	5,0	1,000	1	1	–	1
5	11	5,0	0,800	1	1	–	1
6	5	40,0	15,000	1	1	–	2
7	8	10,0	14,000	1	1	–	1
8	8	4,0	0,900	1	1	–	1
9	4	4,0	1,400	1	1	–	1
10	7	6,0	2,000	1	1	–	1
11	77	116,7	97,100	–	–	–	12

В базовый комплект входит 12 запасных частей общей стоимостью $C_{\Sigma\text{ЗИП}} = 121,1 \text{ тыс. р.}$ Он имеет коэффициент готовности $K_{г\text{ЗИП}}(L^0) = 0,6777$, что существенно меньше нормативного значения. Поэтому далее проводится многошаговая процедура оптимизации пп. 7–13. Результаты оптимизации приведены в табл. 9.9.

Таблица 9.9. Шаги оптимизации (к примеру 9.2)

<i>i</i>	<i>L</i>	<i>A</i>	$-\ln R(L, A)$	$-\ln R(L + 1, A)$	Δ	<i>C</i> Σ	$K_{г\text{ЗИП}}$
1	8	9	10	11	12	13	14
4	1	0,7008	0,06014	0,00956	0,05058	122,1	0,71284
5	1	0,4818	0,03106	0,00351	0,03443	122,9	0,73275
8	1	0,2800	0,01145	0,00077	0,01186	123,8	0,74061

продолжение ➤

Таблица 9.9 (продолжение)

i	L	A	$-\ln R(L, A)$	$-\ln R(L + 1, A)$	Δ	$C\Sigma$	$K_{гЗИП}$
10	1	0,3682	0,01904	0,00167	0,00868	125,8	0,75359
4	2	0,7008	0,00956	0,00127	0,00829	126,8	0,75986
3	2	1,39196	0,05205	0,01285	0,00436	135,8	0,79024
7	1	0,3504	0,06014	0,00127	0,00421	149,8	0,83124
6	2	1,7520	0,0871	0,02603	0,00407	164,8	0,88358
5	2	0,4818	0,00351	0,00033	0,00398	165,6	0,8864
9	1	0,1400	0,00305	0,00011	0,00210	167,0	0,88902
2	1	0,6132	0,04767	0,00672	0,00137	197,0	0,92618
9	2	0,1400	0,00011	$2,9^{-6}$	$7,3^{-5}$	195,6	0,92304
5	3	0,4818	0,00033	$2,6^{-5}$	0,00038	194,8	0,92052

На 11-м шаге оптимизации впервые выполняется условие (9.136) и коэффициент g готовности превышает нормативное значение. Далее с целью сокращения состава комплекта согласно пп. 18–23 выполняются еще два шага оптимизации, в результате которых из комплекта удаляются две ЗЧ: ФД и DCE.

Оптимальный комплект (табл. 9.10) содержит 21 запасную часть, имеет $K_{гЗИП}(L) = 0,9205$ и суммарную стоимость $C_{\Sigma \text{ЗИП}} = 194,8$ тыс. р., что составляет 32% от стоимости основной аппаратуры.

Таблица 9.10. Оптимальный комплект ЗИП-О (к примеру 9.2)

№	Наименование	n	C	T , лет	L	C_{Σ}	$K_{гЗИП}$
1	ПП РПН	4	23,000	1	1	23,000	0,98277
2	ПП CPCI	7	30,000	1	2	60,000	0,99330
3	ЖД SCSI	7	9,000	1	3	27,000	0,98723
4	ОП	16	1,000	1	3	3,000	0,99873
5	ФД CPCI	11	0,800	1	2	1,600	0,99649
6	Mon19»C	5	15,000	1	3	45,00	0,97431
7	PRSCPCI	8	14,000	1	2	28,000	0,99049
8	CE	8	0,900	1	2	1,800	0,99923
9	DCE	4	1,400	1	1	1,400	0,99695
10	КрП CPCI	7	2,000	1	2	4,000	0,99833
11	Всего	77	97,100		21	194,800	0,92052

Для уменьшения относительной стоимости комплекта можно либо уменьшить период пополнения, либо использовать другую стратегию пополнения для некоторых типов запасов. Так если принять $T = 0,5$ года, то уже базовый комплект имеет $K_{гЗИП}(L^0) = 0,9076$ при относительной стоимости 20%.

9.6.2. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при заданных способах пополнения запасов

Процедура оптимизации комплекта ЗИП-О по показателям надежности практически полностью совпадает с процедурой, приведенной в 9.6.1. Отличие от нее состоит лишь в том, что в качестве функций $R_i(L_i, A_i)$ здесь используют функции, входящие в виде сомножителей в показатели надежности типа (9.21) и учитывающие структуру внутреннего резервирования S_i . При расчете значения D в формуле (9.135) используют нормативное значение показателя надежности $ПН^0$. В случае однофункциональных систем для расчета $R_i(L_i, A_i)$ необходимы результаты, приведенные в 9.3 и 9.5. В случае многофункциональных систем оптимизация комплекта ЗИП проводится по всей совокупности ФСО. При этом требования к надежности типа (9.21) должны быть выполнены для всех ФСО одновременно и поэтому имеют векторный характер. Выбор очередной ЗЧ для добавления в комплект происходит с учетом только тех ФСО, в выполнении которых участвуют модули данного типа и для которых требования к надежности не выполняются.

Пример 9.3. Для ИВК из примера 9.2 необходимо рассчитать оптимальный комплект ЗИП-О по критерию минимума суммарных затрат при заданном требовании к ВБР системы $P_c(t) \geq 0,9, t = 1$ год. При этом следует учесть, что для 8 типов модулей из 10 используется внутреннее структурное дублирование с количеством r модулей в одной ветви, указанным в графе 9 табл. 9.11. Для сведения необходимо рассчитать $K_{ЗИП}(L)$.

Решение. Исходные данные для расчета приведены в графах 1–7 и 9 табл. 9.11. С учетом структурных схем резервирования определяем, что для $i = 9$ и 10 следует использовать формулы модели П1, для $i = 1, 7$ и 8 — модели П2, для $i = 2...6$ — модели П4 (см. 9.3).

Для сокращения процедуры оптимизации при выборе базового комплекта будем использовать $D = -\ln 0,95 = 0,05129$ вместо $D = -\ln P^0 = -\ln 0,90 = 0,1054$, рекомендованного формулой (9.135). Результаты расчетов базового комплекта приведены в графе 8 табл. 9.11.

Таблица 9.11. Исходные данные к примеру 9.3 ($P_c(t, L^0) = 0,8387, K_{ЗИП}(L^0) = 0,8018$)

i	N	$\lambda \cdot 10^6, ч^{-1}$	$C, \text{ тыс. р}$	α	$T, \text{ лет}$	β	L^0	r
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	10,0	23,000	1	1	—	1	2
2	7	10,0	30,000	1	1	—	1	3
3	7	22,7	9,000	1	1	—	3	2
4	16	5,0	1,000	1	1	—	2	3
5	11	5,0	0,800	1	1	—	1	3
6	5	40,0	15,000	1	1	—	3	2
7	8	10,0	14,000	1	1	—	1	4
8	8	4,0	0,900	1	1	—	1	4

продолжение ↗

Таблица 9.11 (продолжение)

<i>i</i>	<i>N</i>	$\lambda \cdot 10^6, \text{ч}^{-1}$	<i>C</i> , тыс. р	α	<i>T</i> , лет	β	L^0	<i>r</i>
9	4	4,0	1,400	1	1	–	1	–
10	7	6,0	2,000	1	1	–	2	–
11	77	116,7	97,100	–	–	–	16	–

В базовый комплект входит 16 запасных частей общей стоимостью $C_{\Sigma\text{ЗИП}} = 148,1$ тыс. р. Он имеет коэффициент готовности $K_{\text{рЗИП}}(L^0) = 0,8018$ и обеспечивает ВБР системы $P_c(t, L0) = 0,8387$, что меньше нормативного значения. Поэтому далее проводится многошаговая процедура оптимизации пп. 7–13. Результаты оптимизации приведены в табл. 9.12. На шестом шаге вероятность $P_c(t, L)$ впервые превысила установленное значение 0,9.

Таблица 9.12. Шаги оптимизации (к примеру 9.3)

<i>i</i>	<i>L</i>	<i>A</i>	$-\ln R(L, A)$	$-\ln R(L + 1, A)$	Δ	$P_c(t, L)$	C_Σ	$K_{\text{рЗИП}}$
1	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	0,7008	0,00386	0,00052	0,01962	0,85531	149,1	0,80850
5	2	0,4818	0,00198	0,00093	0,01582	0,86620	149,9	0,83108
9	2	0,1400	0,00041	0,00001	0,00611	0,87365	151,3	0,83353
4	4	0,7008	0,00052	0,00011	0,00334	0,87657	152,3	0,83447
10	3	0,3682	0,00057	0,00004	0,00289	0,88165	154,3	0,83577
3	4	1,392	0,00735	0,00159	0,00242	0,90107	163,3	0,84425

Оптимальный комплект (табл. 9.13) содержит 22 запасные части, имеет $K_{\text{рЗИП}}(L) = 0,844$ и суммарную стоимость $C_{\Sigma\text{ЗИП}} = 163,3$ тыс. рублей, что составляет 26,8% от стоимости основной аппаратуры.

Таблица 9.13. Оптимальный комплект ЗИП-О (к примеру 9.3)

№	Наименование	<i>n</i>	<i>C</i>	<i>T</i> , лет	<i>L</i>	C_Σ	$P_c(t, L)$	$K_{\text{рЗИП}}$
1	ПП РИИ	4	23,000	1	1	23,000	0,99711	0,98277
2	ПП SCSI	7	30,000	1	1	30,000	0,96919	0,95344
3	ЖД SCSI	7	9,000	1	4	36,000	0,99268	0,99724
4	ОП	16	1,000	1	4	4,000	0,99948	0,99986
5	ФД SCSI	11	0,800	1	2	1,600	0,99802	0,99649
6	Mon19»C	5	15,000	1	3	45,000	0,96197	0,97431
7	PRSCPCI	8	14,000	1	1	14,000	0,98133	0,94163
8	CE	8	0,900	1	1	0,900	0,99846	0,98862
9	DCE	4	1,400	1	2	2,800	0,99959	0,99990
10	КрП SCSI	7	2,000	1	3	6,000	0,99943	0,99988
11	Всего	77	97,100		22	163,300	0,90107	0,84425

При уменьшении периода пополнения вдвое ($T = 0,5$ года) и том же комплекте ЗИП-О ВБР системы увеличивается от 0,901 до 0,97, а коэффициент готовности $K_{\text{ЗИП}}(L) = 0,959$.

9.6.3. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при варьировании стратегии пополнения запасов

Потребность в изменении способа пополнения для одного или нескольких типов запасов может возникнуть тогда, когда имеется ограничение на суммарную стоимость комплекта ЗИП и не удастся соблюсти это ограничение, не меняя способа пополнения. Это значит, что задача оптимизации в постановке, изложенной в 9.6.2, не имеет решения.

Чтобы в этих условиях сформировать оптимальный комплект ЗИП-О, надо для всех или нескольких типов запасов выбрать другой способ пополнения, заведомо лучше используемого тем, что при неизменном комплекте ЗИП-О он обеспечивает более высокие показатели надежности (или достаточности). В этом смысле, например, пополнение по уровню лучше периодического пополнения, а непрерывное лучше периодического и пополнения по уровню при прочих равных условиях.

Процедура оптимизации предусматривает следующие действия.

Выполняют пошаговую оптимизацию, рассмотренную в 9.6.2. На каждом шаге проверяют условие

$$C_{\Sigma \text{ЗИП}}(L^{(i)}) \leq C_{\Sigma \text{ЗИП}}^0. \quad (9.141)$$

Если неравенство (9.141) нарушается еще до того, как выполнено требование к надежности, то переходят к следующему шагу.

Из множества типов запасов в комплекте ЗИП-О, полученном на предыдущем шаге, выделяют подмножество типов, для которых допустимо изменение способа пополнения.

Таблицу формуляров дополняют графами 13 и 14.

Вычисляют $-\ln R_i(L, \alpha_i = j)$ для всех i из выделенного подмножества и заносят результаты в графу 13.

Вычисляют $\delta_i = -\ln R_i(L, \alpha_i = j) + \ln R_i(L, \alpha_i = 1)$ и записывают результаты в графу 14.

Находят максимальное число в графе 14 и определяют соответствующий ему номер i .

В графе 5 строки i изменяют значение α_i и переносят значение $-\ln R_i$ из графы 13 в графу 10, а значения в графах 13 и 14 обнуляют.

Суммируют значения в графе 10 и проверяют условие (9.138). Если условие не выполнено, то возвращаются к п. 6. Если выполнено, то найден оптимальный комплект

Для уменьшения комплекта выполняют действия, аналогичные пп. 18–23 алгоритма оптимизации комплекта ЗИП-О по показателям достаточности (см. 9.6.1).

Процедура практически не меняется, если вместо показателя надежности в качестве R_i используют показатель достаточности.

Пример 9.4. К условиям примера 9.3 добавляется еще одно: суммарные затраты на комплект ЗИП не должны превышать 25% от стоимости основной аппаратуры. Необходимо найти оптимальный комплект ЗИП-О, используя возможность непрерывного пополнения запасов по модулям 1-, 2 и 7 типов со средним временем доставки $T_d = 0,25$ года (1 квартал).

Решение. Условие (9.141) нарушается на пятом шаге оптимизации по схеме из 9.6.2 (см. табл. 9.12). Поэтому базовым комплектом для оптимизации с помощью действий пп. 2–9 (см. 9.6.3) является результат четвертого шага оптимизации по схеме из 9.6.2 (табл. 9.14)

Таблица 9.14. Оптимальный комплект ЗИП-О после четвертого шага (к примеру 9.4)

№	Наименование	n	C	T , лет	L	C_Σ	$P_c(t, L)$	$K_{\text{ЗИП}}$
1	ПП РП	4	23,000	1	1	23,000	0,99711	0,98277
2	ПП CPCI	7	30,000	1	1	30,000	0,96919	0,95344
3	ЖД SCSI	7	9,000	1	3	27,000	0,97129	0,98723
4	ОП	16	1,000	1	4	4,000	0,99948	0,99986
5	ФД CPCI	11	0,800	1	2	1,600	0,99802	0,99649
6	Mon19»C	5	15,000	1	3	45,00	0,96197	0,97431
7	PRSCPCI	8	14,000	1	1	14,000	0,98133	0,94163
8	СЕ	8	0,900	1	1	0,900	0,99846	0,98862
9	DCE	4	1,400	1	2	2,800	0,99959	0,99990
10	КрП CPCI	7	2,000	1	2	4,000	0,99367	0,99833
11	Всего	77	97,100	–	20	152,300	0,87657	0,83447

Суммарные затраты на комплект ЗИП-О составляют 152,4 тыс. р., то есть 25% от стоимости основной аппаратуры (609,2 тыс. р.). Поскольку при этом ВБР системы $P_c(t, L) = 0,8766 < 0,9$, выполняем действия пп. 2–9 (см. 9.6.3). Дополняя таблицу формуляров двумя графами ($R(\alpha = 4)$ и $\Delta = R(\alpha = 4) - R(\alpha = 1)$), устанавливаем приоритеты типов запасов, где будет изменяться способ пополнения запасов (табл. 9.15): сначала ПП CPCI, затем PRS CPCI и ПП РП.

Таблица 9.15. Шаги оптимизации по способу пополнения (к примеру 9.4)

i	n	r	rq	C	$R(\alpha = 1)$	$R(\alpha = 4)$	Δ	$P_c(t, L)$
1	4	2	0,1752	0,3504	0,99711	0,99940	0,00228***	–
2	7	3	0,2628	0,6132	0,96919	0,98598	0,01679*	0,89176
7	8	4	0,3504	0,7008	0,98133	0,99571	0,01437**	0,90482

Порядок изменения отмечен в табл. 9.15 звездочками. Из данных, приведенных в табл. 9.15, видно, что уже после второго шага оптимизации изменение способа

пополнения запасов увеличивает ВБР системы от 0,8755 до 0,9048. Данные об оптимальном комплекте ЗИП-О и его характеристиках приведены в табл. 9.16.

Таблица 9.16. Оптимальный комплект ЗИП-О (к примеру 9.4)

№	Наименование	<i>n</i>	α	<i>T, T_д</i> , лет	<i>L</i>	<i>C_Σ</i>	<i>P_c(t, L)</i>	<i>K_{гЗИП}</i>
1	ПП РПП	4	1	1	1	23,000	0,99711	0,982773
2	ПП СРСІ	7	4	0,25	1	30,000	0,98598	0,953444
3	ЖД SCSI	7	1	1	3	27,000	0,97129	0,987231
4	ОП	16	1	1	4	4,000	0,99948	0,99986
5	ФД СРСІ	11	1	1	2	1,600	0,99802	0,996493
6	Мон19»С	5	1	1	3	45,00	0,96197	0,974307
7	ІІRSCPCI	8	4	0,25	1	14,000	0,99571	0,941631
8	СЕ	8	1	1	1	0,900	0,99846	0,988618
9	DCE	4	1	1	2	2,800	0,99959	0,999895
10	КрП СРСІ	7	1	1	2	4,000	0,99367	0,998328
11	Всего	77	–	–	20	152,30	0,90482	0,83447

Оптимальный комплект имеет $K_{гЗИП} = 0,834$ и обеспечивает ВБР системы не менее нормативного значения.

Список литературы

Аппаратура радиоэлектронная. Методики оценки и расчета запасов в комплектах ЗИП: Руководящий документ РД В50-503-84. — М.: Изд-во стандартов, 1985. — 144 с.

Шура-Бура А. Э. Надежность технических систем: Справ. — М.: Радио и связь, 1985. — 606 с. — Гл. 14.

Барзилович Е. Ю., Воскобойников В. Ф. Надежность и эффективность в технике: Справ.: В 10 т. Т. 8. Эксплуатация и ремонт. — М.: Машиностроение, 1990. — 320 с. — Гл. 8.

Сафаров Б. Е. Задачи управления запасами в централизованной системе технического обслуживания СВТ. — М.: Знание, 1986. — 126 с. — Гл. 3.

Шура-Бура А. Э., Топольский М. В. Методы организации, расчета и оптимизации комплектов запасных элементов сложных технических систем. — М.: Знание, 1981. — 114 с — Гл. 2.

Черкесов Г. Н. О расчете надежности обслуживаемых систем при ограниченном ЗИП с периодическим пополнением запасов // Надежность. — 2003. — № 2 (5). — С. 16–34.

Антонов А. В., Пляскин А. В. Определение оптимального количества запасных элементов системы с учетом ограничений на стоимость // Надежность. — 2003. — № 4 (7). — С. 9–16.

Новиков О. А., Петухов С. И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. — М.: Сов. радио, 1969. — 400 с.

Черкесов Г. Н. Методы и модели оценки живучести сложных систем. — М.: Знание, 1987. — 116 с.

Вопросы для самоконтроля

Каковы структура системы ЗИП и способы пополнения запасов?

Назовите показатели достаточности комплекта ЗИП. В чем заключается их выбор?

Как нормируются показатели достаточности комплекта ЗИП в резервированных системах?

Каков порядок расчета показателей достаточности при различных способах пополнения?

Каковы способы расчета показателей надежности однофункциональной системы при ограниченном ЗИП? В чем заключаются приближенный расчет и оценка погрешности?

Каков порядок расчета вероятности безотказной работы однофункциональной системы при ограниченном ЗИП и известных схемах резервирования?

Каков порядок расчета вероятности безотказной работы многофункциональной системы при ограниченном ЗИП и известных схемах резервирования?

В чем заключается постановка задачи оптимизации комплекта ЗИП и способ ее решения?

Глава 10

Оценка надежности АПК с учетом характеристик программного и информационного обеспечения

10.1. Постановка задачи

При оценке надежности АПК исходят из того, что надежность «мягкого оборудования» (математического, программного и информационного обеспечения) не является самостоятельным свойством, так как может проявиться только в процессе его функционирования в составе АПК. Поэтому правильным является подход, при котором надежность «мягкого оборудования» оценивается по степени влияния на комплексные показатели надежности системы, имеющей в своем составе техническое (ТО), математическое (МО), программное (ПО) и информационное (ИО) обеспечение. Это важно еще и потому, что отказы технического (ТК) и программного (ПК) комплексов являются, вообще говоря, взаимозависимыми событиями. Взаимозависимость может возникать по многим причинам, в том числе из-за влияния режимов применения, влияния отказов друг на друга.

Вместе с тем с целью декомпозиции задачи возможно получение отдельных оценок показателей надежности для ТК и ПК с последующим их объединением по схеме независимых событий. Игнорирование взаимозависимости отказов приводит к оценке снизу для показателей надежности АПК. И это надо иметь в виду, чтобы контролировать уровень возникающей при этом методической погрешности. Как объект анализа и как часть АПК программное обеспечение имеет следующие особенности:

- ПО не подвержено износу, и в нем практически отсутствуют ошибки производства;

- ❑ если обнаруженные в процессе отладки и опытной эксплуатации дефекты устраняются, а новые не вносятся, то интенсивность отказов ПК уменьшается, то есть он является «молодеющей» системой;
- ❑ надежность программ в значительной степени зависит от используемой входной информации, так как от значения входного набора зависит траектория исполнения программы; если при этом ИО само содержит дефекты, то программа выдаст неправильный результат даже при отсутствии программных ошибок;
- ❑ если при возникновении ошибок дефекты не диагностировать и не устранять, то ошибки ПО будут носить систематический характер;
- ❑ надежность ПО зависит от области применения; при расширении или изменении области применения показатели надежности могут существенно изменяться без изменения самого ПО.

Исходная информация о надежности технических устройств — структурных элементов системы — может быть получена путем обработки статистических данных о результатах эксплуатации некоторого количества однотипных образцов таких устройств. Возможности использования такого пути для программного изделия ограничены, так как копии программного изделия идентичны и вместе с тиражированием изделия тиражируются и дефекты — проектные ошибки. Вместе с тем есть другая возможность использования предыдущего опыта. Характеристики числа допущенных проектных ошибок являются довольно устойчивым показателем качества работы сложившегося коллектива программистов и используемых ими средств САПР ПО. Если регистрировать сведения о проектных ошибках во всех ранее разработанных проектах, то после соответствующей обработки можно получить заслуживающие доверия исходные данные для оценки надежности ПО в новом проекте. Если же такие данные отсутствуют, то используют более общие сведения о процессе проектирования ПО или данные о результатах отладки ПО разрабатываемого проекта. Чтобы по этим данным оценить показатели надежности, разрабатывают соответствующие модели надежности в зависимости от этапа жизненного цикла программы.

На ранних стадиях проектирования используют описание алгоритмов по входам и выходам (описание «черного ящика») или структуру алгоритма как совокупность структурных элементов и описание каждого структурного элемента по входам и выходам (описание «белого ящика»). Когда разработаны тексты программ, можно использовать параметры программ: словарь языка программирования, количество операций, операндов, используемых подпрограмм, локальных меток и пр.

В процессе отладки и эксплуатации, когда появляются статистические данные об обнаруженных дефектах, исходное число дефектов как одну из важных характеристик качества программирования можно оценить с помощью методов математической статистики.

Далее в данной главе модели надежности и методы оценки показателей надежности ПК разделены на две группы:

- ❑ модели и методы проектной оценки надежности, основанные на исходных данных, которые можно получить до начала отладки и эксплуатации программ;
- ❑ модели и методы статистической оценки надежности, основанные на результатах отладки и опытной или нормальной эксплуатации ПК.

10.2. Общая схема проектной оценки надежности программного комплекса

В качестве исходных данных используются структурная схема функционального программного обеспечения (ФПО) по каждой функционально самостоятельной операции (ФСО), а также описание входов и выходов каждого структурного элемента, межмодульных и внешних связей комплекса алгоритмов и программ. Типовая структура ФПО имеет в своем составе ФПО верхнего (ФПО ВУ) и нижнего (ФПО НУ) уровней. В свою очередь типовая структура ФПО НУ включает в себя совокупность алгоритмов обработки данных, совокупность секций ввода и вывода, соединяющих АПК с объектом управления (рис. 10.1).

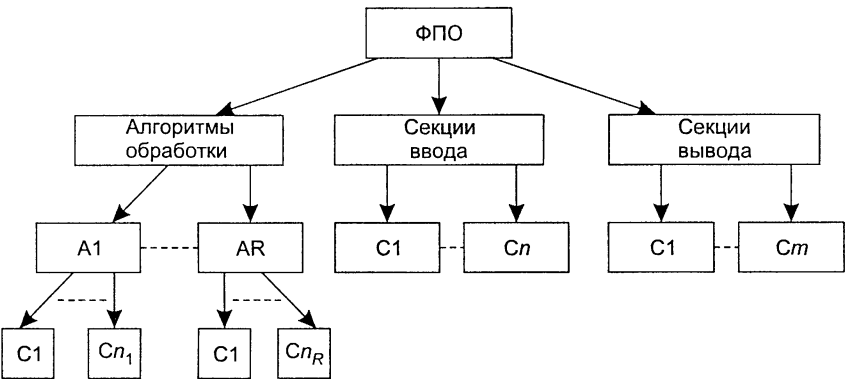


Рис. 10.1. Типовая структура ФПО нижнего уровня

Каждый алгоритм может быть разбит на секции (модули) определенного размера в соответствии с рекомендациями технологии программирования. На ранних этапах проектирования в условиях значительной неопределенности к структурным характеристикам добавляют еще уровень используемых языков программирования [1], [2]. На более поздних этапах проектирования, когда разработаны тексты программ, могут быть использованы параметры программных модулей. Методика проектной оценки и прогнозирования надежности с учетом планируемых результатов отладки содержит несколько этапов.

10.2.1. Расчет исходного числа дефектов

При расчете исходного числа дефектов (ИЧД) сначала рассчитывают ожидаемое ИЧД в секциях алгоритмов и секциях ввода и вывода по одной из следующих формул:

$$N_{ci}^{(1)} = N_{ci}^{(1)}(n_{\text{вх}}, n_{\text{вых}}, l); \tag{10.1}$$

$$N_{ci}^{(2)} = N_{ci}^{(2)}(n_{1i}, n_{2i}, N_{1i}, N_{2i}), \tag{10.2}$$

где $n_{\text{вх}}, n_{\text{вых}}$ — число входов и выходов в i -й секции; l — уровень языка программирования; n_{1i}, n_{2i} — число различных операций и операндов; N_{1i}, N_{2i} — всего

операций и операндов в i -й секции. Формула (10.1) используется на ранних стадиях проектирования, когда еще нет текстов программ, формула (10.2) — после программирования секций на принятом языке программирования.

Суммарное количество дефектов в отдельных алгоритмах и совокупности алгоритмов и секций ввода и вывода находят по следующим формулам:

$$N_{ai} = \sum_{j=1}^{m_i} N_{cj} + N_{cwi}(n_{cwi}); \quad (10.3)$$

$$N_a = \sum_{i=1}^R N_{ai} + N_{c.a}(M_a); \quad (10.4)$$

$$N_{vv} = \sum_{i \in E_{vv}} N_{ci} + N_{c.vv}(M_{vv}); \quad N_{vvv} = \sum_{i \in E_{vvv}} N_{ci} + N_{c.vvv}(M_{vvv}), \quad (10.5)$$

где m_i — количество секций в i -м алгоритме ФПО; R — количество алгоритмов; E_{vv}, E_{vvv} — множество секций ввода и вывода; n_{cwi} — количество межсекционных связей в i -м алгоритме; M_a, M_{vv}, M_{vvv} — количество связей между алгоритмами, межсекционных связей ввода и вывода.

В АСОИУ часто применяют группы однотипных датчиков и исполнительных механизмов, для управления которыми используют копии программных секций ввода и вывода. Тогда в (10.5) включают только один экземпляр секции, но все межсекционные связи.

Если при выполнении ФСО используют одну или несколько баз данных (БД), содержащих постоянные и условно-постоянные данные, вносимые на этапе проектирования, то рассчитывают суммарное количество дефектов по всем БД:

$$N_{БД} = \sum_{i=1}^{R_0} (N_{1i}(V_i, V_{0i}, S_i, l_i) + N_{2i}(V_i, \lambda_{ci}, \tau_i) + N_{3i}), \quad (10.6)$$

где N_{1i}, N_{2i}, N_{3i} — количество дефектов подготовки данных, дефектов данных вследствие сбоев аппаратуры, дефектов после неумышленных ошибок вследствие несанкционированного доступа к данным; V_{0i}, V_i — общий объем и объем, используемый при выполнении данной ФСО в i -й БД; l_i — уровень языка; λ_{ci} — интенсивность сбоев; τ_i — время функционирования БД при выполнении ФСО; S_i — характеристики структуры данных.

Наконец рассчитывают исходное число дефектов по всему ФПО и ИО при выполнении данной ФСО в виде суммы:

$$N_{ФСО} = N_a + N_{vv} + N_{vvv} + N_{БД}. \quad (10.7)$$

10.2.2. Расчет остаточного числа дефектов после автономной отладки

После разработки алгоритмов и программных модулей (секций) проводят автономную отладку (АО). Остаточное число дефектов (ОЧД) оценивают с помощью модели АО, позволяющей установить зависимость

$$N_{ci}^{(AO)} = N_{ci}^{(AO)}(N_{ci}, n_i, \tau_{ai}, \Theta_{ai}), \quad (10.8)$$

где N_{ci} — исходное число дефектов в i -й секции; n_i — размерность входного вектора; τ_{ii} — длительность отладки; $\mathcal{A}_{ai}$ — коэффициент эффективности отладки. Расчет по формуле (10.8) может дать дробное число и трактуется как математическое ожидание случайного числа дефектов.

Разработка секций является в основном результатом индивидуального творчества программиста, но проводится в некоторой среде САПР ПО с помощью инструментальных средств. Поэтому эффективность АО зависит также и от возможностей и характеристик САПР ПО. Эта зависимость учитывается при оценке коэффициента $\mathcal{A}_{ai}$. После коррекции числа дефектов в секциях по результатам АО проводят перерасчет числа дефектов в укрупненных составных частях с помощью формул (10.3)–(10.7).

10.2.3. Расчет остаточного числа дефектов после комплексной отладки

Комплексная отладка (КО) предусматривает статическую отладку отдельных алгоритмов, совокупности алгоритмов и секций ввода/вывода, всех средств ФПО и ИО, используемых при выполнении конкретной ФСО, а затем динамическую отладку. В этой процедуре можно выделить три этапа:

1. Отладка путем имитации реальных алгоритмов в инструментальной среде САПР ПО при имитации окружающей среды, в том числе объекта управления. Этот этап является, по существу, отладкой математического обеспечения.
2. Отладка реальных алгоритмов при имитации окружающей среды. Этап позволяет провести статическую отладку и в ограниченной степени — динамическую отладку.
3. Отладка реальных алгоритмов, сопряженных с реальным объектом управления. Этап позволяет провести в полном объеме динамическую отладку.

Модели КО разрабатывают применительно к этапам 1 и 2, они призваны оценить еще на стадии разработки программ эффективность отладки и остаточное число дефектов (ОЧД) после КО в укрупненных составных частях ФПО и ИО с помощью зависимостей типа

$$\begin{aligned} N_a^{(KO)} &= N_a^{(KO)}(N_a^{(AO)}, n_k, \tau_k, \mathcal{A}_k); \\ N_{вв/выв}^{(KO)} &= N_{вв/выв}^{(KO)}(N_{вв}^{(AO)}, N_{выв}^{(AO)}, n_{1k}, \tau_{1k}, \mathcal{A}_{1k}); \\ N_{БД}^{(KO)} &= N_{БД}^{(KO)}(N_{БД}^{(AO)}, \tau_{2k}, \mathcal{A}_{2k}), \end{aligned}$$

где n_k, n_{1k} — размерности входного вектора; $\tau_k, \tau_{1k}, \tau_{2k}$ — длительности отладки; $\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{1k}, \mathcal{A}_{2k}$ — коэффициенты эффективности отладки. Перерасчет остаточного числа дефектов для ФПО и ИО проводится по формуле (10.7).

10.2.4. Оценка вероятности проявления дефекта при однократном выполнении ФСО

Дефекты, не обнаруженные при автономной и комплексной отладках, не являются случайными событиями, так как, в отличие от дефектов производства аппаратуры, они не развиваются во времени, а программное изделие не подвержено процессу

физического старения. Дефекты программ могут проявляться только при работе АПК и только на вполне определенных значениях наборов входных переменных или их последовательностей и при вполне определенных состояниях системы, отраженных в условно-постоянной информации. Сочетаний входных наборов и состояний очень много, а появление определенных сочетаний трудно предсказуемо. Поэтому появление именно таких из них, при которых дефект проявляется и превращается в ошибку, становится уже случайным событием, а момент появления — случайной величиной. К их анализу можно применять вероятностные методы. Если известно распределение дефектов по полю программ и данных, то можно найти вероятность проявления дефектов при однократном выполнении ФСО в режиме МКЦП:

$$Q_1 = Q_{11}(N_a, m, B, F_n, F_1) + Q_{12}(N_{БД}, V, V_0, v, F_d, F_2), \quad (10.9)$$

где N_a , $N_{БД}$ — остаточное число дефектов в алгоритмах и базах данных; F_n , F_d — распределения дефектов по полю программ и данных; F_1 , F_2 — распределения входных наборов и запросов по полю данных при однократном выполнении ФСО; B — вектор параметров ПО; m — количество входных наборов, поступающих в сист ему при однократном выполнении ФСО; v — объем фрагмента данных, используемых при однократном выполнении ФСО.

В режиме НППД в качестве цикла однократного выполнения ФСО может быть принят фрагмент определенной длительности, в котором начинается и завершается обработка информации. Например, при выполнении функции сбора, обработки и отображения информации от пассивных датчиков в качестве фрагмента можно выбрать цикл полного опроса датчиков, анализа данных и корректировки БД.

10.2.5. Оценка вероятности проявления дефектов при многократном выполнении ФСО

Вероятность проявления остаточных дефектов при M прогонах программ Q_M зависит от вероятности Q_1 и степени независимости различных прогонов. Если прогоны осуществляются на одних и тех же входных наборах, то зависимость максимальна, и тогда $Q_M = Q_1$. Если же прогоны независимы, то

$$Q_M = 1 - (1 - Q_1)^M \approx MQ_1. \quad (10.10)$$

Все остальные случаи находятся между этими двумя крайними. Очевидно, что в сложном ПК даже при большом числе дефектов вероятность их проявления может быть очень мала, поскольку велико множество возможных сочетаний значений входных векторов и внутренних состояний программ. Верно и обратное: длительное безошибочное функционирование ПК вовсе не гарантирует того, что в нем нет дефектов, которые могут проявиться в самый неблагоприятный момент, несмотря на самую тщательную отладку. Об этом свидетельствует и практика эксплуатации больших ПК, например в информационно-вычислительных системах космических аппаратов.

10.2.6. Оценка характеристик потоков иницирующих событий

Иницирующим является любой сигнал, требующий выполнения в полном объеме или частично одной из ФСО. Основным источником иницирующих событий (ИС) является объект управления, в котором изменение состояния может сопровождаться формированием индикатора ИС. К другим источникам ИС относятся оперативный персонал, отказы технических средств, смежные системы. Суммарный поток ИС характеризуется интенсивностью $\nu(t)$, зависящей в общем случае от времени функционирования.

10.2.7. Оценка показателей надежности системы с учетом случайного потока иницирующих событий

В режиме МКЦП в качестве показателей надежности могут использоваться вероятность безотказной работы, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности. Для безотказной работы системы требуется успешное выполнение всех циклов, иницированных в течение установленного календарного времени. Поскольку число ИС является случайной величиной, модель надежности учитывает интенсивность потока ИС и вероятность проявления дефектов при однократном выполнении ФСО:

$$P_c(t) = P_c(t, Q_1, \nu(t)). \quad (10.11)$$

Коэффициент готовности K_g с определяется средним значением интервала между соседними проявлениями дефектов и средним временем устранения обнаруженного дефекта. Коэффициент оперативной готовности $K_{o.r.c}$ зависит от коэффициента готовности и вероятности успешного однократного выполнения ФСО и вычисляется по формуле $K_{o.r.c} = K_g(1 - Q_1)$.

10.3. Факторные модели

При проектной оценке надежности факторные модели являются вспомогательными, предназначенными для вычисления параметров, необходимых при формировании модели надежности и определения вида зависимостей (10.9)–(10.11). К факторным относят модели распределения исходного числа дефектов по полю программ и данных, модели эффективности автономной и комплексной отладки, модели режимов применения, характеризующие потоки входных наборов данных, модели потоков иницирующих событий.

10.3.1. Модели распределения числа дефектов в алгоритмах и базах данных

На ранних стадиях проектирования в качестве исходных данных при оценке числа дефектов используют количество входов и выходов в структурной единице

ПО и уровень языка программирования. По этим данным рассчитывают потенциальный объем программы [1], [2]:

$$V_{\Pi} = (n_2^* + 2) \log_2 (n_2^* + 2) = 1,443(n_2^* + 2) \ln(n_2^* + 2), \quad n_2^* = n_{\text{вх}} + n_{\text{вых}}, \quad (10.12)$$

где n_2^* — суммарное количество независимых входов и выходов. Зависимость (10.1) имеет вид

$$N_{\Pi} = V_{\Pi}^2 / (l V_y), \quad V_y = 24^3 / l^2. \quad (10.13)$$

Здесь V_y — удельный объем программы, равный среднему объему программы, приходящемуся на один дефект; l — уровень языка. Для естественного языка и близких к нему объектно-ориентированных языков программирования $l = 2,16$, для языка типа ассемблера $l = 0,88$.

По разработанным текстам программ можно найти параметры программ, и тогда исходное число дефектов находят по формуле

$$N_{\Pi} = V / V_y; \quad V = A \log_2 n, \quad n = n_1 + n_2, \quad A = n_1 \log_2 n_1 + n_2 \log_2 n_2, \quad (10.14)$$

$$n_1 = n_{\text{с.к}} + n_{\text{пп}}, \quad n_2 = n_{\text{м.п}} + n_{\text{мет}} + n_{\text{к}},$$

где V — наблюдаемый объем программы; A — теоретическая длина программы; n — словарь языка; n_1 — число операций; n_2 — число операндов; $n_{\text{с.к}}$ — количество используемых словарных конструкций; $n_{\text{пп}}$ — количество подпрограмм, $n_{\text{м.п}}$ — количество массивов переменных; $n_{\text{мет}}$ — количество локальных меток; $n_{\text{к}}$ — количество констант; $V_y = 3000$. Формулу (10.14) используют и для расчета ИЧД в базах данных. В этом случае V — объем в байтах, $V_y = 17\,850$.

10.3.2. Модели распределения дефектов в базах данных

При отсутствии специальных знаний о возможном распределении дефектов в базах данных естественной является модель равномерного распределения числа дефектов n по полю данных объемом V_0 . Если для выполнения конкретной ФСО используется только часть этого объема, а именно данные объема $V < V_0$, то в объеме V оказывается случайное число дефектов, задаваемое некоторым распределением. При построении распределения можно использовать дискретную или непрерывную модели. Если база данных структурирована и в ней выделены структурные единицы (кластеры, теги и др.) примерно одинакового объема v , причем V_0/v много больше, чем n , то с высокой вероятностью в каждой структурной единице будет не более одного дефекта. Тогда число дефектов в объеме V имеет гипергеометрическое распределение

$$P_m(V, V_0, n) = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, \quad M = \frac{V}{v}, \quad N = \frac{V_0}{v}; \quad (10.15)$$

$$\max(0, n + M - N) \leq m \leq \min(n, M).$$

Если база данных не структурирована, то используется биномиальная модель

$$P_m(V, V_0, n) = C_n^m q^m p^{n-m}, \quad p \neq 1 - q, \quad q = V / V_0. \quad (10.16)$$

Эта модель допускает наличие в одном фрагменте данных объема v более одного дефекта. При больших V_0 и малых v распределения (10.15) и (10.16) близки друг к другу.

10.3.3. Модели эффективности отладки

Для прогнозирования момента обнаружения (проявления) дефекта можно использовать экспоненциальную, вейбулловскую или степенную модели. Тогда зависимости (3.41)–(3.43) можно трактовать как функции распределения времени обнаружения дефекта. Однако они не учитывают такой важный параметр, как исходное число дефектов. Используя главную идею моделей (3.41)–(3.43) о нелинейной зависимости числа обнаруженных дефектов от времени отладки, можно рассчитывать ОЧД с помощью формул

$$N_0(\tau) = N \exp(-a\tau / \tau_n), \quad a > 0; \quad (10.17)$$

$$N_0(\tau) = N(1 - (\tau / \tau_n)^{1/m}), \quad m > 1; \quad (10.18)$$

$$N_0(\tau) = N \exp(-(\tau / \tau_n)^m), \quad 0,8 \leq m \leq 1,2, \quad (10.19)$$

где τ_n , m , a — параметры моделей. Значения параметров определяют на основании опыта отладки других программных изделий и уточняют по результатам отладки после обнаружения первого и второго дефектов в данном программном изделии.

Рассмотрим еще одну модель отладки ПО, основанную на понятии конгруэнтного множества (КМ). Пусть имеется комбинационная логическая структура со входным вектором $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и выходным вектором $Y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$. В комбинационной схеме каждому набору X соответствует определенный набор Y , не зависящий от внутреннего состояния системы при правильной ее работе. Обнаружение дефекта происходит по несовпадению фактического значения вектора Y с правильным значением. Назовем *конгруэнтным множеством* подмножество E_i множества E значений вектора X , обладающее следующим свойством: предъявление любого значения из E_i способно обнаружить дефект определенного типа. Логическим индикатором КМ является минимальная дизъюнктивная нормальная форма, содержащая все элементарные конъюнкции r логических переменных без отрицания. Число r называют рангом КМ. Например, логический индикатор КМ первого ранга имеет вид $F(X) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$. Размером КМ называют количество конstituент единицы в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) логической функции, соответствующей одной тестовой комбинации. Так, для $\varphi(X) = x_1$ количество конstituент единицы равно 2^{n-1} . Элементарной конъюнкции $x_1 x_2$ соответствует СДНФ, содержащая 2^{n-2} конstituент единицы. В общем случае КМ r -го ранга имеет размер 2^{n-r} , а относительный размер равен 2^{-r} . Количество КМ такого размера равно C_n^r .

Для полного тестирования КМ r -го ранга надо предъявить 2^r входных наборов. Предъявляя входные наборы сериями по C_n^m входных наборов ($m = 0 \dots n$), так что в каждой серии набор содержит ровно m единиц, проводим тестирование одновременно нескольких КМ. После серии с номером m полностью проверенными оказываются КМ ранга $r \leq m$ и частично проверенными — КМ ранга $r > m$. Если в КМ r -го ранга есть хотя бы один дефект, то после завершения m -й серии условная вероятность его обнаружения равна

$$Q_r(m) = \sum_{i=0}^m C_r^i 2^{-r}, \quad r > m; \quad Q_r(m) = 1, \quad r \leq m. \quad (10.20)$$

Если известно распределение вероятностей дефекта $\{\beta_r, r = 1 \dots n\}$ по конгруэнтным множествам, то после завершения m -й серии шагов отладки безусловная вероятность обнаружения дефекта

$$Q_1(m, \beta) = \sum_{r=1}^n \beta_r Q_r(m) = \sum_{r=1}^m \beta_r + \sum_{r=m+1}^n \beta_r \sum_{i=0}^m C_r^i 2^{-r}. \quad (10.21)$$

Общая длина тестовой последовательности

$$L_m = \sum_{i=0}^m C_n^i. \quad (10.22)$$

Вероятность необнаружения дефекта после завершения m -й серии

$$P_1(m, \beta) = 1 - Q_1(m, \beta) = \sum_{r=m+1}^n \beta_{1r}, \quad \beta_{1r} = \beta_r P_r(m), \quad P_r(m) = \sum_{i=m+1}^n C_r^i 2^{-r}. \quad (10.23)$$

Здесь β_{1k} имеет смысл вероятности того, что после m -й серии отладочных наборов дефект в КМ r -го ранга не проявится. Вероятность проявления дефекта после m -й серии равна $\alpha_r = \beta_r - \beta_{1r} = \beta_r Q_r(m)$. Согласно другой трактовке, β_{1r} есть безусловная вероятность того, что в КМ после отладки останется дефект, а α_r — вероятность отсутствия дефекта после отладки.

Пусть теперь m -я тестовая серия длиной C_n^m выполнена не полностью, а проверен результат только по l наборам ($l < C_n^m$). Представим (10.20) в виде

$$Q_r(m) = \sum_{i=0}^m \Delta Q_r(i), \quad \Delta Q_r(i) = C_r^i 2^{-r}. \quad (10.24)$$

Тогда вероятность проявления дефекта в КМ r -го ранга при неполной m -й серии

$$\Delta Q_r(m, l) = l \Delta Q_r(m) / C_n^m = \frac{l}{2^r} (C_r^m / C_n^m).$$

После $(m-1)$ полных и m -й неполной серии условная вероятность проявления дефекта в КМ r -го ранга

$$Q_r(m-1, l) = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta Q_r(i) + \Delta Q_r(m, l).$$

Безусловная вероятность проявления дефекта

$$Q_1(m-1, l, \beta) = \sum_{r=1}^{m-1} \beta_r + \sum_{r=m}^n \beta_r \left(\sum_{i=0}^{m-1} C_r^i 2^{-r} + \Delta Q_r(m, l) \right).$$

Вероятность того, что дефект не будет обнаружен после неполной m -й серии,

$$\begin{aligned} P_1(m-1, l, \beta) &= \sum_{r=m+1}^n \beta_{1r} + \sum_{r=m}^n \beta_r \Delta Q_r(m) (1 - l / C_n^m) = \\ &= P_1(m, \beta) + \Delta P_1(m, \beta) (1 - l / C_n^m), \quad \Delta P_1(m, \beta) = P_1(m, \beta) - P_1(m-1, \beta). \end{aligned}$$

Вероятность $Q_1(m, \beta)$ можно трактовать как математическое ожидание количества обнаруженных дефектов при наличии в программе не более одного дефекта. Если в ней есть N дефектов, то математическое ожидание числа обнаруженных дефектов после m -й серии

$$\bar{N}_1 = MN_1 = M(X_1 + \dots + X_N) = NQ_1(m, \beta).$$

Среднее остаточное количество дефектов

$$\bar{N}_0 = N - \bar{N}_1 = NP_1(m, \beta) = NP_1(m, \beta) = \sum_{r=m+1}^n \beta_r. \quad (10.25)$$

При неполной m -й серии

$$\bar{N}_0 = NP_1(m-1, l, \beta). \quad (10.26)$$

Вероятность того, что после m -й серии в программе не останется ни одного дефекта

$$P_0 = Q_1^N(m, \beta) > \left(\sum_{r=1}^m \beta_r \right)^N. \quad (10.27)$$

Вероятность P_0 является гарантированной нижней оценкой вероятности безотказной работы.

Правило завершения отладки может быть составлено либо путем нормирования длительности отладки, либо путем нормирования коэффициента эффективности отладки. В первом случае отладка завершается по достижении длиной тестовой последовательности нормативного значения L^0 . Исходя из этого рассчитывают коэффициент эффективности отладки по одной из следующих формул:

$$\mathfrak{E}_0^{(1)} = \bar{N}_1 / N = Q_1(m-1, l, \beta); \quad \mathfrak{E}_0^{(2)} = P_0(L^0) = Q_1^N(m-1, l, \beta); \quad L^0 = L_{m-1} + l.$$

Во втором случае отладка завершается по выполнению одного из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_0^{(1)}(L) &= Q_1(m-1, l, \beta) \geq \mathfrak{E}_{00}^{(1)}; \\ \mathfrak{E}_0^{(2)}(L) &= Q_1^N(m-1, l, \beta) \geq \mathfrak{E}_{00}^{(2)}; \quad L = L_{m-1} + l. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Если в (10.28) принято первое правило, то нормируется остаточное число дефектов. Из уравнения находят сначала m и l , а затем L . Если принято второе правило, то нормируется вероятность полного отсутствия дефектов. Второе требование более жесткое и требует знания исходного числа дефектов N . Оба правила дают одинаковые длительности отладки, если $\mathfrak{E}_{00}^{(1)} = (\mathfrak{E}_{00}^{(2)})^{1/N}$.

Пример 10.1. Пусть на вход программы комбинационного типа подается набор данных из пяти бинарных переменных. Известно, что после программирования ожидаемое число дефектов равно 2 и они распределены по КМ равномерно. Необходимо оценить эффективность отладки после m -й серии отладочных наборов ($m = 1 \dots 5$) и найти гарантированную нижнюю оценку вероятности безотказной работы программы для $L = 6, 16, 26$ и 31 .

Решение. Результаты расчетов по формуле (10.20) приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1. Условная вероятность обнаружения дефекта в КМ *r*-го ранга

<i>r</i>	<i>Qr(m)</i>					
	<i>m</i> = 0	<i>m</i> = 1	<i>m</i> = 2	<i>m</i> = 3	<i>m</i> = 4	<i>m</i> = 5
1	0,5	1	1	1	1	1
2	0,25	0,75	1	1	1	1
3	0,125	0,50	0,875	1	1	1
4	0,0625	0,3125	0,6875	0,9325	1	1
5	0,03125	0,1875	0,5000	0,8175	0,96875	1

Из данных, приведенных в табл.10.1, видно, что труднее всего обнаруживаются дефекты в КМ более высокого ранга. При длительности теста, составляющей 50% от длительности полного теста (*m* = 2, *L* = 16), в первых двух КМ дефекты обнаруживаются гарантированно, а в КМ 5-го ранга — лишь с вероятностью 0,5. Расчет безусловной вероятности обнаружения дефекта, которая является показателем эффективности отладки, проводится по формуле (10.21). Результаты расчетов приведены в первой строке табл. 10.2.

Таблица 10.2. Безусловная вероятность обнаружения дефекта

Модель	<i>Q₁(m, β)</i>					
	<i>m</i> = 0	<i>m</i> = 1	<i>m</i> = 2	<i>m</i> = 3	<i>m</i> = 4	<i>m</i> = 5
КМ	0,194	0,55	0,813	0,950	0,994	1
Экспонента	0,125	0,55	0,881	0,969	0,984	0,986
Степенная	0,290	0,55	0,781	0,929	0,989	1
Средняя	0,207	0,55	0,831	0,949	0,986	0,993

Эффективность отладки достигает значения 0,95 при длительности отладки, достигающей значения 81,25% от длительности полного теста. Зависимость вероятности *Q₁* от *L*, как и в моделях (10.17)—(10.19), нелинейная. Для сравнения в табл. 10.2 приведены результаты расчетов для экспоненциальной и степенной моделей. Для определения параметров *a* и *m* используется точка *L* = 6:

$$1 - \exp(-6a / 32) = 0,55, (6 / 32)^{1/m} = 0,55.$$

Отсюда *a* = 4,26, *m* = 2,8. Из табл. 10.2 видно, что почти всюду экспоненциальная и степенная модели дают двустороннюю оценку значения, полученного по модели КМ. Поэтому среднее арифметическое этих значений довольно близко к значениям модели КМ. Максимальное относительное отклонение (при *m* = 2) не превышает 10%.

Среднее остаточное число дефектов, рассчитанное по формуле (10.25), уменьшается более чем вдвое уже при коэффициенте полноты тестирования *K_n* = *L*/*L_n* = = 6/32 = 0,19 и в 20 раз при *K_n* = 0,8 (табл. 10.3).

Таблица 10.3. Среднее остаточное число дефектов

Модель	$\bar{N}_0(m)$			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
КМ	0,9	0,375	0,100	0,0075
Средняя	0,9	0,278	0,102	0,027

Нижняя гарантированная оценка вероятности безотказной работы, рассчитанная по формуле (10.27), составляет 0,66 при $m = 2$ и 0,9 при $m = 3$.

Для баз данных можно рассмотреть две стратегии отладки.

1. Отладка всего объема V_0 проводится автономно и независимо от ФСО. Если на каждом шаге тестирования проверяется объем v , а исходное число дефектов $N_{\text{и}}$ известно, то количество дефектов в объеме v имеет биномиальное распределение с параметрами $N_{\text{и}}$ и $q = v/V_0$. При отладке происходит «просеивание» дефектов с вероятностью, равной коэффициенту эффективности отладки α . Значение α оценивается по статистическим данным предыдущих опытов отладки. Остаточное число дефектов определяют по формуле $N_0 = \beta N_{\text{и}}$, $\beta = 1 - \alpha$. Если отладка разделена на автономную и комплексную, то остаточное число дефектов после автономной и комплексной отладки

$$N_0^{\text{АО}} = \beta_{\text{АО}} N_{\text{и}}, \quad N_0^{\text{КО}} = \beta_{\text{КО}} N_0^{\text{АО}} = \beta N_{\text{и}}, \quad \beta = 1 - \alpha = \beta_{\text{АО}} \beta_{\text{КО}}. \tag{10.29}$$

2. Отладка проводится только в той части V общего объема V_0 , которая используется при выполнении конкретной ФСО. Дефекты обнаруживаются в процессе многократного выполнения ФСО на тестовых задачах или в процессе эксплуатации. Эффективность отладки для этой стратегии будет рассмотрена далее (см. 10.4).

10.3.4. Модели потоков инициирующих событий

Запуск ФСО в режиме МКЦП происходит либо по расписанию, либо при появлении случайных событий определенного типа. Первый способ возникает при опросе пассивных дискретных датчиков (ДД), при появлении регулярных сигналов от смежных систем или команд от оперативного персонала. Случайные инициирующие события (ИС) возникают по сигналам инициативных ДД, логических схем сравнения показаний аналоговых датчиков (АД) с уставками. Иницилирующим событием является любое изменение состояния ДД, достижение аналоговым параметром уровня уставки, изменение состояния любого исполнительного механизма (самопроизвольное или по командам дистанционного управления). В реальных условиях потоки инициирующих событий определяются динамикой изменения физико-химических и технологических процессов в объекте управления, надежностью средств автоматики, контроля и управления, стратегией дистанционного автоматизированного управления.

Потоки ИС первого типа, получаемые на регулярной основе, близки по своим характеристикам к стационарным рекуррентным потокам с постоянной интенсивностью. Потоки ИС второго типа близки к стационарным пуассоновским потокам.

Потоки обоих типов являются суммами некоторого количества независимых слагаемых потоков. Поэтому интенсивность суммарного потока находят как сумму интенсивностей слагаемых потоков:

$$\Lambda_c = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4,$$

где Λ_1 — интенсивность потока ИС, обусловленного изменениями технологических процессов в объекте управления; Λ_2 — интенсивность суммарного потока отказов технических средств управления; Λ_3 — интенсивность потока заявок от подсистемы дистанционного управления; Λ_4 — интенсивность потока регулярных ИС.

10.4. Проектная оценка надежности программного комплекса при выполнении ФСО

Если программы не используются, то они и не отказывают. Если же они используются и в них есть дефекты, то проявление дефекта зависит от случая, состоящего в том, что на вход поступит как раз тот набор значений переменных, при котором дефект проявляется и превращается в ошибку. В этом смысле ошибки носят случайный характер, и можно говорить о вероятности проявления дефекта.

10.4.1. Вероятность проявления дефекта при однократном выполнении ФСО

При построении модели вероятности проявления дефекта при однократном выполнении ФСО принимают следующие допущения:

1. Во входном векторе можно выделить подвектор переменных, которые можно считать независимыми. В этом смысле не все бинарные сигналы или значения аналоговых переменных, поступающие в систему управления от дискретных или аналоговых датчиков, можно считать независимыми. Например, сигналы от мажорированных датчиков функционально зависимы, и при безотказной работе техники они должны быть одинаковыми.
2. Среди значений входного набора переменных не все комбинации фактически могут появляться на входе программы. Поэтому в множестве значений выделяют область допустимых значений.
3. В режиме МКЦП за один цикл выполняется один прогон программы и в течение одного прогона обнаруживается не более одного дефекта.

Вероятность проявления дефекта оценивают в такой последовательности. По формуле (10.25) или (10.26) находят остаточное количество дефектов после автономной отладки для всех структурных единиц ФПО, а затем суммарное количество дефектов. К нему добавляют исходное число дефектов межсекционных

и внешних связей (МВС), рассчитанное по формулам (10.12) и (10.13), поскольку МВС не участвуют в автономной отладке:

$$N_0^{AO} = \sum_{(i)} N_{ci}^{AO} + N_{MBC}.$$

Если размерность входного вектора ФСО равна n , а длина тестовой последовательности, согласно (10.22), равна L_m , то по формуле (10.24) находят распределение вероятностей β_{1r} , $r = m + 1 \dots n$, а по формуле (10.25) при $N = N_0^{AO}$ — остаточное число дефектов ФПО после комплексной отладки N_0^{KO} . Заметим, что β_{1r} есть безусловная вероятность того, что дефект окажется в КМ r -го ранга, а в КМ осталось N_{1r} непроверенных комбинаций. Это число рассчитывают по формуле

$$N_{1r} = \sum_{i=m+1}^r C_r^i.$$

При равномерном распределении вероятность того, что дефект проявится при предъявлении конкретной комбинации из N_{1r} , равна $\alpha_{1r} = \beta_{1r}/N_{1r}$. Вероятность проявления одного дефекта при предъявлении одного входного набора,

$$Q_1(1, 1) = \sum_{r=m+1}^n \gamma_r \alpha_{1r} = \sum_{r=m+1}^n \gamma_r \beta_{1r} / N_{1r}, \quad (10.30)$$

где γ_r — вероятность того, что предъявленный входной набор принадлежит подмножеству непроверенных комбинаций КМ r -го ранга. При равномерном распределении предъявляемых наборов

$$\gamma_r = \frac{C_n^r}{2^n} \frac{N_{1r}}{2^r}, \quad r = m + 1 \dots n. \quad (10.31)$$

Подставляя (10.31) в (10.30), получим:

$$Q_1(1, 1) = \sum_{r=m+1}^n Q_{1r}(1, 1) = \sum_{r=m+1}^n C_n^r \beta_{1r} 2^{-n-r}. \quad (10.32)$$

Если остаточное число дефектов равно N_0 , а при однократном выполнении ФСО предъявляется k входных наборов, то вероятность проявления хотя бы одного дефекта

$$Q_1(N_0, k) = 1 - (1 - Q_1(1, 1))^{N_0 k} \approx N_0 k Q_1(1, 1). \quad (10.33)$$

Рассмотрим теперь модель проявления дефектов в базах данных. Пусть до проведения отладки ожидаемое число дефектов $N_n = n$ в базе данных объемом V_0 рассчитывается по формуле (10.13), а при выполнении ФСО используется часть БД объемом V . Тогда при равномерном распределении вероятностей каждого дефекта по полю V_0 число дефектов в объеме V имеет биномиальное распределение с параметрами n и $q = 1 - p = V/V_0$. Вероятность того, что в объеме V будет хотя бы один дефект, равна $1 - p^n$. Если во время однократного выполнения ФСО запрашивается фрагмент объемом v и находящийся в нем дефект гарантированно обнаруживается, то вероятность проявления дефекта при однократном выполнении ФСО до отладки

$$Q_{БД}(v, V, V_0, N_n) = \frac{1 - (1 - q q_1)^n}{1 - p^n} = \frac{1 - (1 - v/V_0)^n}{1 - (1 - V/V_0)^n}, \quad q_1 = \frac{v}{V}.$$

При отладке только в объеме V дефекты подвергаются «просеиванию» только в этом объеме. Их количество N_v имеет биномиальное распределение с параметрами N_n и $q = V/V_0$. Если $N_v = n_1$, то отладка уменьшает среднее число дефектов до $n_2 = n_1\beta$, где $1 - \beta$ — эффективность отладки. Вероятность проявления дефекта после отладки есть вероятность наличия в объеме v хотя бы одного дефекта при условии, что в объеме V есть дефекты

$$Q_1(n_2) = \frac{1 - p_1^{n_2}}{1 - p^{N_n}}, \quad p = 1 - \frac{V}{V_0}, \quad p_1 = 1 - \frac{v}{V}.$$

Поскольку n_2 — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами N_n и $q_0 = \beta q$, постольку безусловная вероятность

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{N_n} Q_1(i) C_{N_n}^i q_0^i \frac{(1 - q_0)^{N_n - i}}{(1 - p^{N_n})} = (1 - (1 - q_0 q_1)^{N_n}) / (1 - p^{N_n}).$$

Если прогон программы осуществляется после автономной отладки, то $\beta = \beta_{AO}$, если же после комплексной отладки, то $\beta = \beta_{AO} \beta_{KO}$.

10.4.2. Вероятность проявления дефекта при многократном выполнении ФСО

Если при многократном прогоне программы на вход поступают независимые наборы значений переменных, то вероятность проявления дефектов

$$\begin{aligned} Q_M(N_0, k) &= 1 - (1 - Q_1(N_0, k))^M = \\ &= 1 - (1 - Q_1(1, 1))^{MN_0 k} = 1 - (P_1(1, 1))^{MN_0 k}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Дефект в БД не проявится при M -кратном прогоне, если он не находится в объеме V (с вероятностью $p = 1 - V/V_0$) или находится в объеме V , но не окажется в выбранных фрагментах объема v (с вероятностью p_1^M). Если всего в объеме V_0 находится n дефектов, то условная вероятность проявления дефектов при M -кратном выполнении ФСО до начала отладки

$$Q_{y\text{БД}}(M, v, V, V_0, n) = \frac{(1 - (1 - q(1 - p_1^M))^n)}{(1 - p^n)}, \quad n = N_n. \quad (10.35)$$

После отладки с параметром разрежения β условная вероятность проявления дефектов

$$Q_{y\text{БД}}(M, v, V, V_0, n, \beta) = \frac{(1 - (1 - q_0(1 - p_1^M))^n)}{(1 - p^n)}, \quad n = N_n, \quad q_0 = \beta q, \quad (10.36)$$

где $\beta = \beta_{AO}$ или $\beta = \beta_{AO} \beta_{KO}$.

Безусловные вероятности проявления дефектов

$$\begin{aligned} Q_{\text{БД}}(M) &= 1 - (1 - q(1 - p_1^M))^n; \\ Q_{\text{БД}}(M, \beta) &= 1 - (1 - q_0(1 - p_1^M))^n, \quad q_0 = \beta q. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Отсюда следует, что при увеличении M вероятность проявления дефектов асимптотически стремится к величине $1 - p_n$.

10.4.3. Вероятность безотказной работы ПК в режиме МКЦП при случайном потоке иницирующих событий

При простейшем потоке ИС с параметром Λ вероятность безотказной работы находит как безусловную вероятность того, что все циклы выполнения ФСО в интервале $(0, t)$ будут безошибочными:

$$P_c(t) = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(\rho(1 - Q_1(N_0, k)))^M}{M!} e^{-\rho} P_{\text{БД}}(M), \quad \rho = \Lambda t.$$

Подставляя сюда выражение для $P_{\text{БД}}(M)$ из (10.37), получим:

$$P_c(t) = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(\rho P_1(N_0, k))^M}{M!} e^{-\rho} (p_0 + q_0 p_1^M)^n. \quad (10.38)$$

Если q_0 мало, то можно использовать приближенное выражение

$$P_{\text{БД}}(M) \approx 1 - nq_0(1 - p_1^M).$$

Тогда

$$P_c(t) = \exp(-\rho Q_1(N_0, k))(1 - nq_0 + nq_0 \exp(-\rho q_1 P_1(N_0, k))). \quad (10.39)$$

Если использовать схему независимых событий, то можно получить нижнюю оценку вероятности безотказной работы системы как произведение вероятностей безотказной работы ФПО и ИО:

$$P_c(t) \approx \exp(-\rho Q_1(N_0, k))(1 - nq_0 + nq_0 \exp(-\rho q_1)). \quad (10.40)$$

Отсюда следует, что интенсивность отказов и средняя наработка на отказ ПК равны

$$\lambda_{\text{ПК}} = \lambda_{\text{ФПО}} + \lambda_{\text{БД}}; \quad \lambda_{\text{ФПО}} = \Lambda Q_1(N_0, k); \quad \lambda_{\text{БД}} = \Lambda Q_{\text{БД}}(1, \beta) = nq q_1 \beta \Lambda; \quad (10.41)$$

$$T_{\text{ПК}} = \frac{1 - nq_0}{\Lambda Q_1(N_0, k)} + \frac{nq_0}{\Lambda(Q_1(N_0, k) + q_1 P_1(N_0, k))} \approx \frac{1}{\lambda_{\text{ПК}}}.$$

Приближенную формулу для $T_{\text{ПК}}$ можно использовать только при малых q_0 и Q_1 .

10.4.4. Учет процедур парирования ошибок

Процедура парирования ошибок обеспечивает разрежение потока отказов, не допуская перехода обнаруженного дефекта в программы или данных в отказ системы. Зная структуру потока ошибок по типам парируемых ошибок

$$\Lambda Q_1(N_0, k) = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{\text{ПО}, i}; \quad \Lambda q_1 = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{\text{ИО}, i},$$

получим интенсивности разреженных потоков ошибок:

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{\Pi O, i} q_{\Pi O, i}; \quad v_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{\Pi O, i} q_{\Pi O, i}.$$

Подставляя v_1 и v_2 в (10.39) вместо ΛQ_1 и Λq_1 , находим:

$$P_c(t) = e^{-v_1 t} (1 - nq_0 + nq_0 e^{-v_2 t P_{1,p}(N_0, k)}); \quad P_{1,p}(N_0, k) = \sum_{i=1}^{n_1} q_{\Pi i} Q_{1i}, \quad Q_{1i} = \frac{\lambda_{\Pi O, i}}{\Lambda},$$

где Q_{1i} — вероятность того, что будет обнаружен дефект i -го типа.

10.5. Пример проектной оценки надежности программного комплекса

10.5.1. Краткое описание аппаратно-программного комплекса¹

Аппаратно-программный комплекс предназначен для выполнения трех основных функций:

- автоматического управления (АУ) без участия ФПО верхнего уровня системы управления;
- дистанционного управления (ДУ) исполнительными механизмами (ИМ) и режимами работы подсистем нижнего уровня с помощью ФПО верхнего уровня;
- отображения на мониторах верхнего уровня параметров (ОП), измеряемых на объекте управления, и параметров, отражающих состояние средств самой системы управления, а также регистрации и архивирования информации в базах данных.

АПК построена как двухканальная система с нагруженным дублированием ФПО нижнего (НУ) и верхнего (ВУ) уровней и баз данных (рис. 10.2).

Информация в АПК поступает из системы сбора данных (ССД) от измерительных каналов, содержащих дискретные (ДД) и аналоговые (АД) датчики. Управляющие воздействия поступают из АПК в систему вывода данных (СВД), содержащую некоторое количество ИМ. ССД и СВД не входят в рассматриваемую систему и являются буфером между АПК и объектом управления. Подсистема АПК верхнего уровня обменивается информацией со смежными системами.

На нижнем уровне структурными единицами ФПО НУ являются алгоритмы А1...А8, секции ввода (СВв) и вывода (СВыв) данных. Секции ввода данных могут принимать информацию от ССД или ФПО ВУ. Секции вывода данных выполняют функции контроллеров для управления ИМ и для передачи служебной информации в адрес ФПО ВУ и ФПО НУ. База данных используется не только для выполнения указанных функций, поэтому объем данных БД превышает объем, необходимый для выполнения функций АУ, ДУ и ОП.

¹ Пример составлен по материалам реального проекта.

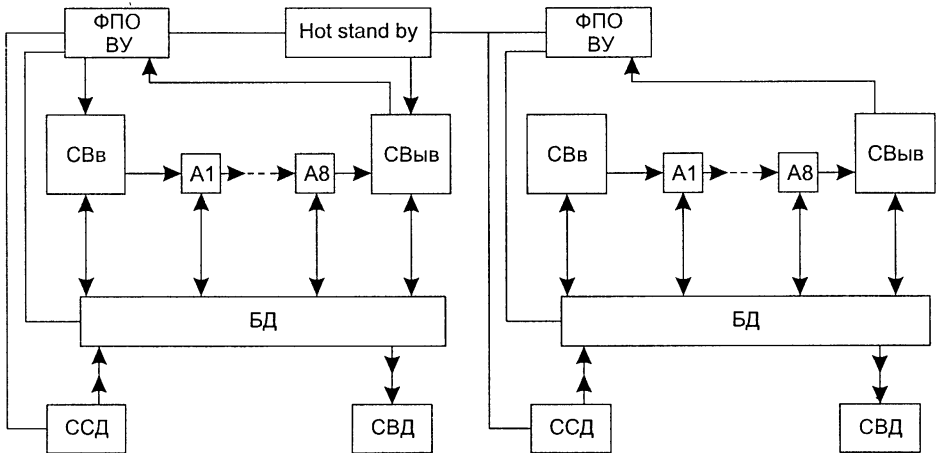


Рис. 10.2. Структурная схема ФПО и ИО АПК

10.5.2. Оценка исходного числа дефектов

Надежность ПК оценивается на стадии проектирования, когда известны структура ФПО и описание каждой структурной единицы по входам и выходам. Поэтому для оценки ИЧД используются формулы (10.12) и (10.13). Чтобы оценить влияние структурирования на ожидаемое число дефектов, каждый алгоритм разбивается на секции, размеры которых определяются требованиями технологии программирования, принятой в САПР ПО, и соображениями повышения эффективности работы отдельного программиста с учетом рекомендаций психологии программирования и соображений удобства дальнейшей отладки. Исходные данные для расчетов и результаты расчетов ИЧД по секциям и алгоритмам приведены в табл. 10.4.

Таблица 10.4. Исходное число дефектов по секциям и алгоритмам

Наименование	Исходные данные				V_{ii}		ИЧД	
	Входы		n_2^*					
	1	2	1	2	1	2	1	2
Алгоритм А1ц	11	9	17	15	80,71	69,49	1,01	0,745
Алгоритм А1с	16	10	28	20	—	—	1,264	0,609
Секция А11	7	4	14	12	64,0	53,3	0,632	0,439
Секция А12	9	6	14	8	64,0	33,2	0,632	0,170
Алгоритм А2ц	—	—	48	36	282,2	199,4	12,29	6,137
Алгоритм А2с	41	32	68	48	—	—	3,71	1,763
Секция А21	14	10	23	16	116,1	75,06	2,08	0,869
Секция А22	10	10	15	14	69,5	64,0	0,745	0,632

продолжение ➤

Таблица 10.4 (продолжение)

Наименование	Исходные данные				V_{Π}		ИЧД	
	Входы		n_2^*					
	1	2	1	2	1	2	1	2
Секция А23	6	2	12	4	53,3	15,51	0,439	0,002
Секция А24	6	6	9	8	38,1	33,22	0,223	0,170
Секция А25	5	4	9	6	38,1	24,00	0,223	0,089
Алгоритм А3	17	13	30	21	160,0	104,0	3,95	1,67
Алгоритм А4ц	9	6	15	8	69,5	33,22	0,745	0,170
Алгоритм А4с	12	8	22	12	—	—	0,714	0,178
Секции А41,А42	6	4	11	6	48,1	24,0	0,357	0,089
Алгоритм А5ц	—	—	19	19	92,2	92,2	1,313	1,313
Алгоритм А5с	20	20	32	32	—	—	0,681	0,681
Секции А51...А54	5	5	8	8	33,22	33,22	1,170	0,170
Алгоритм А6ц	—	—	28	20	147,2	98,1	3,344	1,485
Алгоритм А6с	28	20	48	32	—	—	1,754	0,681
Секции А61...А64	7	5	12	8	53,3	33,22	0,439	0,170
Алгоритм А7	20	20	21	21	104,0	104,0	1,67	1,67
Алгоритм А8	12	8	24	20	122,2	98,1	2,305	1,485
А1...А8ц	—	—	202	160	—	—	26,63	14,68
А1...А8с	166	141	273	206	—	—	16,05	10,34

Примечание. 1 — учитываются все обрабатываемые входы; 2 — учитываются все независимые входы; A_{Π} — алгоритм без разбиения на секции; A_c — алгоритм с разбиением на секции.

Расчеты проведены для двух вариантов исходных данных. В первом варианте учтены все обрабатываемые входы и все ветвящиеся выходы. Во втором варианте учтены только независимые входы и выходы. Расчеты показывают, что разбиение алгоритмов на секции приводит к увеличению суммарного количества входов и выходов: в первом варианте на 35%, а по отдельным алгоритмам до 70%; во втором варианте на 29%, а по отдельным алгоритмам до 60%. Однако суммарное количество дефектов при разбиении на секции сократилось: на 40% в варианте 1 и на 30% в варианте 2. Разбиение на секции отдельных алгоритмов не всегда приводит к снижению ИЧД. Так произошло для А1 в варианте 1 и для А4 в варианте 2. Однако разбиение все-таки проводят по другим причинам. Например, разбиение А1 полезно для облегчения автономной отладки. В этом случае при разбиении на две секции для полной отладки надо просмотреть $2^7 + 2^9 = 640$ комбинаций значений бинарных входов, а без разбиения — $2^{11} = 2048$ комбинаций, то есть в 3,2 раза больше. Варианты 1 и 2 могут рассматриваться как крайние для получения двусторонней оценки ИЧД, так как при функцио-

нально зависимых входах и выходах независимыми остаются операции адресации, при программировании которых также могут возникать ошибки. Именно поэтому может быть использовано среднее арифметическое оценок.

В качестве секций ввода в состав ФПО НУ входят модули сравнения результатов измерения аналоговых параметров с уставками с последующей индикацией нарушения уставки. В качестве секций вывода используют два типа контроллеров, БУ1 и БУ2, для управления ИМ двух различных типов. Исходные данные о секциях ввода и вывода и результаты расчетов ИЧД приведены в табл. 10.5.

Таблица 10.5. Исходное число дефектов в секциях ввода и вывода

Наименование	n_2	V_{II}	ИЧД
СВв	4	16	0,04
БУ1	42	240	8,90
БУ2	28	147	3,34

Совокупность секций ввода и вывода сравнима по количеству дефектов со множеством алгоритмов.

10.5.3. Оценка числа дефектов ФПО по подсистемам до автономной отладки

Для выполнения отдельной ФСО привлекают некоторое подмножество структурных единиц ФПО, образующих подсистему. В нее включают также совокупность межсекционных и внешних связей структурных единиц подсистемы. Сведения о составе подсистем приведены в табл. 10.6.

Таблица 10.6. Состав подсистем ФПО

ФСО	Количество модулей				Количество связей	
	A1...A8	СВв	БУ1	БУ2	МС	ВС
АУ	1	54	20	2	15	3
ДУ	1	0	20	2	15	21
ОП	1	54	0	0	15	9

В структуре ФПО (см. табл. 10.2) предусмотрено два канала обработки. Однако в них используют идентичные копии алгоритмов, модулей БУ1 и БУ2, секций ввода. Поэтому количество дефектов от появления копий в параллельных каналах не возрастает, лишь увеличивается вдвое количество связей. В каждом канале используется несколько секций БУ1 и БУ2 в виде идентичных копий, поэтому в расчете ИЧД представлен только один экземпляр каждой секции. В составе секций ввода в основном только адресные операции. Поскольку они различны для различных копий, в расчетах ИЧД присутствуют все экземпляры СВв. Результаты расчетов для одного и двух каналов представлены в табл. 10.7.

Таблица 10.7. Исходное число дефектов в подсистемах до автономной отладки

ПС	N_{ii}		БУ1	БУ2	СВ	Связи		Всего		Вариант 1		Вариант 2	
	A1...A8					Ка- нал 1	Ка- нал 2	Ка- нал 1	Ка- нал 2	Ка- нал 1	Ка- нал 2		
	B1	B2										$n = 17$	$n = 11$
АУ	16,1	10,34	8,9	3,34	2,2	1,21	2,42	31,66	32,9	25,96	27,45		
ДУ	16,1	10,34	8,9	3,34	0	6,44	12,87	34,72	41,16	29,01	35,45		
ОП	16,1	10,34	0	0	2,2	2,42	4,85	20,63	23,06	14,92	17,35		
Все	16,1	10,34	8,9	3,34	2,2	10,07	20,14	40,54	49,61	34,83	43,90		

Примечание. Здесь n — число входов; В1 — вариант 1; В2 — вариант 2. Из данных, приведенных в табл. 10.7, видно, что наибольшее количество дефектов ожидается в подсистеме дистанционного управления и возникать они будут в основном из-за большего количества внешних связей. Наименьшее количество дефектов — в подсистеме ОП, в которую не входят секции ввода и вывода. Количество дефектов во всем ФПО примерно на 20% превышает ожидаемое число дефектов в наиболее сложной подсистеме.

- При оценке ИЧД в базе данных используются следующие исходные данные:
- общий объем БД $V_0 = 6$ Мбайт;
 - объем данных, используемых при выполнении ФСО: $V = 0,55$ Мбайт для всех ФСО, $V = 0,5$ Мбайт для ОП и ДУ, $V = 0,25$ Мбайт для подсистемы АУ;
 - уровень языка программирования $l = 0,88$.

Согласно (10.13), ожидаемое число дефектов по всей БД $N_{ii} = 352$, в подсистемах ДУ и ОП $N_{ii} = 29$, в подсистеме АУ $N_{ii} = 14,5$.

10.5.4. Оценка остаточного числа дефектов после автономной отладки

Автономная отладка проводится по секциям. Функционирование секций проверяется путем предъявления входных наборов сериями, соответствующими конгруэнтным множествам m -го ранга, начиная с $m = 1$. Для расчета ОЧД используется формула (10.25) или (10.26). Как следует из табл. 10.4, при $m = 9$ полностью проверяются секции A11, A12, A23, A24, A41, A42, A51...A54, A61...A64. Для A21, A22, A3, A7 и A8 число входов более 9. Поэтому эти секции и алгоритмы проверяются лишь частично. При $m = 10$ полностью проверяется также секция A22. Результаты расчетов ОЧД приведены в табл. 10.8.

Таблица 10.8. Среднее остаточное число дефектов в секциях после АО

m	A21	A22	A3	A7	A8	A1...A8	БУ1	БУ2
9	0,0023	0,00007	0,199	0,1965	0,005	0,424	0,4495	0,00208
10	0,0065	0	0,087	0,113	0,00007	0,207	0,196	0,00015

При расчете ОЧД в секциях БУ1 и БУ2 учитываем, что в них число входов $n = 17$ и $n = 11$ соответственно. Результаты расчетов приведены в табл. 10.9.

Таблица 10.9. Результаты автономной отладки (вариант 1)

ПС	m	Среднее остаточное число дефектов						Э _{АО}		
		Алгоритм	БУ	БД	МВС		Всего		Ка-нал 1	Ка-нал 2
					Ка-нал 1	Ка-нал 2	Ка-нал 1	Ка-нал 2		
АУ	9	0,424	0,452	0,73	1,21	2,42	2,82	4,03	0,911	0,876
АУ	10	0,207	0,196	0,73	1,21	2,42	2,34	3,55	0,926	0,892
ДУ	9	0,424	0,452	1,45	6,44	12,87	8,77	15,23	0,747	0,630
ДУ	10	0,207	0,196	1,45	6,44	12,87	8,29	14,65	0,761	0,644
ОП	9	0,424	0	1,45	2,42	4,85	4,30	6,72	0,792	0,709
ОП	10	0,207	0	1,45	2,42	4,85	4,08	6,51	0,802	0,718
Всё	9	0,424	0,452	1,60	10,07	20,14	12,55	22,62	0,690	0,544
Всё	10	0,207	0,196	1,60	10,07	20,14	12,08	22,14	0,702	0,553

ПРИМЕЧАНИЕ

Здесь МВС — межсекционные и внешние связи; Э_{АО} — коэффициент эффективности АО.

Расчет ОЧД в МВС проведен для $n = 18, 36$ и 24 (подсистемы АУ, ДУ и ОП соответственно). При расчете ОЧД в БД по формуле (10.29) коэффициент полноты проверки принят равным 0,95. Значения N_{ii} взяты из 10.5.3.

Из данных, приведенных в табл. 10.9, видно, что автономная отладка существенно сокращает ожидаемое число дефектов в секциях: по всем подсистемам ФПО (А1...А8 и БУ) от 30,45 до 0,88 при $m = 9$ и до 0,4 при $m = 10$. В БД число дефектов уменьшается от 32 до 1,6. Эффективность АЛ по таким компонентам ФПО и ИО, как отношение числа устраненных дефектов к исходному числу, составляет 0,96 при $m = 9$ и 0,97 при $m = 10$. Однако в целом по всем компонентам эффективность существенно меньше: от 0,544 в двухканальной системе при $m = 9$ до 0,7 в одноканальной системе при $m = 10$. Снижение эффективности объясняется тем, что при АО не проверяют МВС. Остаточное количество дефектов колеблется от 12,1 до 22,6. Это довольно много, поэтому необходима комплексная отладка.

Для дальнейших расчетов выбираем вариант с глубиной автономной отладки, соответствующей $m = 9$, по следующим причинам. С ростом m быстро возрастает трудоемкость отладки, измеряемая суммарной длиной тестовой последовательности. На все секции, проверенные полностью, при $m = 9$ затрачивается $L = 1568$ входных наборов. Значения длины тестовой последовательности для остальных секций, рассчитанные по формуле (10.21), приведены в табл. 10.10.

В строке 8 указана сумма значений строк 1...5, в строке 9 к ним добавлено число комбинаций для полностью проверенных секций алгоритмов.

Таблица 10.10. Длина тестовой последовательности после m -й серии

Наименование	n	L		
		$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
Секция А21	14	12 911	14 913	15 914
Секция А22	10	1013	1023	1024
Алгоритм А3	17	65 536	89 846	109 294
Алгоритм А7	20	263 950	431 910	616 666
Алгоритм А8	12	3797	4017	4083
Секция БУ1	17	65 536	89 846	109 294
Секция БУ2	11	1981	2036	2047
Секции А21...А8	—	347 207	541 709	746 981
Алгоритмы А1...А8	—	348 774	543 277	748 549
БУ1, БУ2	—	67 517	91 882	111 341
А1...А8, БУ1, БУ2	—	416 291	635 159	859 890

Для алгоритма А7 переход от $m = 8$ к $m = 9$ означает увеличение трудоемкости отладки на 63,6%, а переход от $m = 9$ к $m = 10$ — увеличение на 42,8%. Переход от $m = 9$ к $m = 10$ приводит к увеличению L : для А3 и БУ на 21,6%, для всех алгоритмов А1...А8 на 37,8%, по секциям БУ на 21,1%, по ФПО в целом на 35,4%.

Степень снижения остаточного числа дефектов и рост эффективности отладки можно проследить по данным, приводимым в табл. 10.11.

Таблица 10.11. Зависимость эффективности АО от трудоемкости

ФСО	m	L	$N_{АО}$	$\Xi_{АО}$	$\Delta L/L$
АУ, ДУ	9	635 159	0,876	0,969	—
АУ, ДУ	10	859 890	0,403	0,986	0,354
ОП	9	543 277	0,424	0,974	—
ОП	10	748 277	0,6207	0,987	0,377

Для АУ и ДУ увеличение эффективности отладки на 1,7% требует увеличения трудоемкости на 35,4%. Для ОП рост эффективности на 1,3% требует увеличения трудоемкости на 37,7%.

10.5.5. Оценка остаточного числа дефектов после комплексной отладки

Комплексная отладка проводится по подсистемам в целом и имеет целью функциональное тестирование и тестирование межсекционных и внешних связей. Остаточное число дефектов и эффективность отладки прогнозируются с помощью модели КМ.

Результаты расчетов вероятности необнаружения дефекта $P_1(m, \beta)$ и среднего остаточного числа дефектов по формулам (10.23) и (10.25) для двухканальной системы при $m = 8$ и $\beta_k = 1 / n$ приведены в табл. 10.12. Данные для $N_{АО}$ взяты из табл. 10.9.

Таблица 10.12. Результаты комплексной отладки

ФСО	n	$P_1(m, \beta)$	$N_{АО}, m = 9$			$N_{КО}, m = 8$			$\mathcal{E}_{КО}$	
			ФПО	ИО	ФПО ИО	ФПО	ИО	ФПО ИО	ФПО	ИО
АУ	20	0,1843	3,30	0,73	4,03	0,608	0,073	0,681	0,831	
ДУ	17	0,0982	13,78	1,45	15,23	1,353	0,145	1,498	0,901	
ОП	20	0,1843	5,27	1,45	6,72	0,971	0,145	1,116	0,834	
Все	—	—	21,02	1,60	22,62	2,93	0,16	3,09	0,863	

Для оценки остаточного числа дефектов в БД принят коэффициент эффективности тестирования $\alpha_{КО} = 0,9$. Трудоемкость КО равна сумме длительностей тестовых последовательностей при отладке подсистем:

$$L = 2 \sum_{i=0}^8 C_{20}^i + \sum_{i=0}^8 C_{17}^i = 2 \cdot 263\,950 + 65\,536 = 593\,436.$$

Полученное значение сравнимо с трудоемкостью автономной отладки ($L_{АО} = 635\,159$).

После КО не полностью проверенными оказались КМ ранга r от 9 до 17 для подсистемы ДУ и ранга r от 9 до 20 для АУ и ОП. Проанализируем связь эффективности и полноты отладки.

- 1. Поскольку в пределах КМ наблюдается равномерное распределение вероятности появления дефекта по различным комбинациям, значения полноты отладки как доли числа R_{0r} проверенных комбинаций и эффективности отладки как доли обнаруженных дефектов совпадают. Это значит, что между ними есть линейная зависимость.
- 2. Коэффициент полноты отладки для КМ n -го ранга и для всей логической структуры в соответствии с (10.20) и (10.22) совпадают. Однако при $m < r < n$ коэффициент полноты отладки δ_r существенно больше, чем при $r = n$ (табл. 10.13), и соответственно больше коэффициента эффективности отладки. Поскольку при увеличении длины тестовой последовательности одновременно тестируются в определенной степени все КМ, это порождает нелинейную зависимость числа обнаруженных дефектов и эффективности отладки от полноты отладки логической структуры.

Таблица 10.13. Коэффициент полноты отладки КМ различных рангов

r	$2r$	R_{0r}	δr
9	512	511	0,998
10	1024	1013	0,989

Таблица 10.13 (продолжение)

r	$2r$	R_0r	δr
11	2048	1981	0,972
12	4096	3797	0,927
13	8192	7099	0,867
14	16 384	12 911	0,788
15	32 768	22 819	0,696
16	65 536	39 203	0,598
17	131 072	65 536	0,500
18	262 144	106 762	0,407
19	524 288	169 826	0,324
20	1 048 576	260 950	0,249

3. Сравнивая данные, приведенные в табл. 10.12 и 10.13, видим, что для подсистем АУ и ОП ($n = 20$) при полноте отладки 0,249 коэффициент эффективности отладки достигает значения 0,83 и лежит между значениями коэффициента эффективности для КМ 13-го и 14-го рангов. Для подсистемы ДУ ($n = 17$) при полноте отладки 0,5 коэффициент эффективности отладки $\Theta_{\text{КО}} = 0,9$ и лежит между значениями $\Theta_{\text{КО}}$ для КМ 12-го и 13-го рангов.
4. Для всей совокупности подсистем полнота отладки

$$\delta = \frac{(L_8(17) + 2L_8(20))}{(2^{17} + 2 \cdot 2^{20})} = \frac{587\,436}{2\,228\,224} = 0,267.$$

При этом коэффициент эффективности отладки равен 0,863, зависимость — существенно нелинейная.

При довольно высокой эффективности комплексной отладки и небольшом среднем остаточном числе дефектов доля непроверенных комбинаций велика. Поэтому при нормальной эксплуатации дефекты могут проявляться в течение очень длительного времени.

10.5.6. Оценка вероятности проявления дефекта при однократном и многократном выполнении ФСО после КО

Каждая подсистема ФПО характеризуется следующими показателями: $N_{\text{КО}}$ — среднее остаточное число дефектов после КО; k — среднее число значений входного вектора, предъявляемых при однократном выполнении ФСО; $\beta_{1r}(n)$ — распределение вероятностей наличия дефекта по КМ различных рангов; $r = m + 1 \dots n$. Исходные данные для расчета вероятностей проявления дефектов $Q_1(1, 1)$ и $Q_1(N_0, k)$ по формулам (10.32) и (10.33) приведены в табл. 10.14, а результаты расчетов — в табл. 10.15.

Таблица 10.14. Распределение вероятностей проявления дефекта по КМ

<i>r</i>	$P_r(m) \times$ $\times 2^{-m-1}$	$\beta_{1k}(17)$	$\beta_{1k}(20)$	$C_n' 2^{-n-r}$		$Q_{1r}(1, 1)$	
				<i>n</i> = 17	<i>n</i> = 20	<i>n</i> = 17	<i>n</i> = 20
9	1	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$9,77 \cdot 10^{-5}$	$3,62 \cdot 10^{-4}$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$4,17 \cdot 10^{-8}$	$3,06 \cdot 10^{-8}$
10	5,5	$6,32 \cdot 10^{-4}$	$5,37 \cdot 10^{-4}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$9,16 \cdot 10^{-8}$	$9,24 \cdot 10^{-8}$
11	16,75	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$1,64 \cdot 10^{-3}$	$4,61 \cdot 10^{-5}$	$7,82 \cdot 10^{-5}$	$8,90 \cdot 10^{-8}$	$1,28 \cdot 10^{-7}$
12	37,38	$4,29 \cdot 10^{-3}$	$3,65 \cdot 10^{-3}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$	$2,93 \cdot 10^{-5}$	$4,95 \cdot 10^{-8}$	$1,07 \cdot 10^{-7}$
13	68,31	$7,85 \cdot 10^{-3}$	$6,67 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-6}$	$9,03 \cdot 10^{-6}$	$1,74 \cdot 10^{-8}$	$6,02 \cdot 10^{-8}$
14	108,53	0,0125	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$3,17 \cdot 10^{-7}$	$2,26 \cdot 10^{-6}$	$3,96 \cdot 10^{-10}$	$2,39 \cdot 10^{-8}$
15	155,45	0,01786	0,01518	$3,17 \cdot 10^{-8}$	$4,51 \cdot 10^{-7}$	$5,7 \cdot 10^{-10}$	$6,85 \cdot 10^{-9}$
16	205,73	0,02365	0,0201	$1,98 \cdot 10^{-9}$	$7,05 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-11}$	$1,42 \cdot 10^{-9}$
17	256,00	0,02941	0,0250	$5,8 \cdot 10^{-10}$	$8,30 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-11}$	$2,1 \cdot 10^{-10}$
18	303,48	—	9,0296	—	$6,9 \cdot 10^{-10}$	—	$2,1 \cdot 10^{-11}$
19	346,15	—	0,0338	—	$3,6 \cdot 10^{-11}$	—	$1,2 \cdot 10^{-12}$
20	384,58	—	0,0376	—	$9,1 \cdot 10^{-12}$	—	$3,4 \cdot 10^{-13}$
9—17	854,65	0,0982	—	—	—	$2,94 \cdot 10^{-7}$	—
9—20	1888,9	—	0,1845	—	—	—	$4,51 \cdot 10^{-7}$

Таблица 10.15. Вероятность проявления дефекта при однократном выполнении ФСО

ФСО	<i>n</i>	<i>k</i>	$N_{КО}$	$Q_i(1, 1)$	$Q_i(N_{КО}, k)$
АУ	20	10	0,608	$4,51 \cdot 10^{-7}$	$2,74 \cdot 10^{-6}$
ДУ	17	15	1,353	$2,94 \cdot 10^{-7}$	$5,96 \cdot 10^{-6}$
ОП	20	20	0,971	$4,51 \cdot 10^{-7}$	$8,76 \cdot 10^{-6}$

Вероятность проявления дефектов при многократном выполнении ФСО рассчитывают по формуле (10.34) с учетом данных, приведенных в табл. 10.15. Результаты расчетов приведены в табл. 10.16.

Таблица 10.16. Вероятность проявления дефектов при многократном выполнении ФСО

ФСО	$Q_i(N_{КО}, k)$	<i>M</i>	$QM(N_{КО}, k)$
АУ	$2,74 \cdot 10^{-6}$	10	$2,74 \cdot 10^{-5}$
		100	$2,76 \cdot 10^{-4}$
		1000	0,00276
ДУ	$5,96 \cdot 10^{-6}$	10	$6,21 \cdot 10^{-5}$
		100	$6,21 \cdot 10^{-4}$
		1000	0,00619
ОП	$8,76 \cdot 10^{-6}$	10	$8,98 \cdot 10^{-5}$
		100	$8,98 \cdot 10^{-4}$
		1000	0,00894

Условную и безусловную вероятности проявления дефектов БД при однократном и многократном обращении к ней до проведения отладки находят по формулам (10.35) и (10.37), а при обращении после отладки — по формулам (10.36) и (10.37). Расчеты проводят при следующих исходных данных: $V_0 = 6$ Мбайт, $V = 0,5$ Мбайт для подсистем ДУ и ОП, $V = 0,25$ Мбайт для подсистемы АУ, $\beta_r = 1/n$, $N_{ii} = 352$, $\beta_{AO} = 0,05$, $\beta_{KO} = 0,1$. Результаты расчетов приведены в табл. 10.17–10.21. До отладки условная и безусловная вероятности практически совпадают, так как $p^n = 5 \cdot 10^{-14}$. Из-за одинаковых объемов используемых данных V характеристики подсистем ДУ и ОП совпадают.

Таблица 10.17. Вероятность проявления дефектов БД до отладки

M	$Q_{БД}(M, v)$							
	$v = 2$		$v = 4$		$v = 8$		$v = 16$	
	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ
1	0,1107	0,1107	0,2093	0,2093	0,3748	0,3748	0,6094	0,6094
5	0,4389	0,5585	0,6796	0,6855	0,8901	0,8977	0,9843	0,9881
10	0,6782	0,6848	0,8883	0,8968	0,9834	0,9877	1	1
100	0,9997	0,9999	1	1	1	1	1	1

Таблица 10.18. Условная вероятность проявления де фектов БД после автономной отладки

M	$Q_{БДy}(M, v)$							
	$v = 2$		$v = 4$		$v = 8$		$v = 16$	
	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ
1	0,0113	0,0077	0,0225	0,0152	0,0446	0,0301	0,0881	0,0595
5	0,0548	0,0374	0,1063	0,0730	0,2005	0,1396	0,3590	0,2568
10	0,1059	0,0727	0,1990	0,1391	0,3544	0,2551	0,5447	0,4347
100	0,6405	0,4988	0,8545	0,7214	0,9733	0,8982	0,9990	0,9825
1000	0,9998	0,9919	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Таблица 10.19. Безусловная вероятность проявления дефектов БД после автономной отладки

M	$Q_{БД}(M, v)$							
	$v = 2$		$v = 4$		$v = 8$		$v = 16$	
	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ
1	0,0059	0,0059	0,0117	0,0117	0,0232	0,0232	0,0458	0,0458
5	0,0285	0,0287	0,0553	0,0562	0,1043	0,1075	0,1867	0,1977
10	0,0551	0,0560	0,1035	0,1071	0,1843	0,1964	0,2989	0,3347
100	0,3331	0,3841	0,4444	0,5555	0,5062	0,6916	0,5196	0,7565
1000	0,5200	0,7638	0,5201	0,7700	0,5201	0,7700	0,5201	0,7700

Таблица 10.20. Условная вероятность проявления дефектов БД после комплексной отладки

M	$Q_{\text{БД}}(M, v)$							
	$v = 2$		$v = 1$		$v = 0,5$		$v = 0,25$	
	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ
1	0,0083	0,0042	0,0041	0,0022	0,0021	0,0232	0,0010	0,0005
5	0,0411	0,0220	0,0206	0,0107	0,0115	0,0059	0,0057	0,0030
10	0,0800	0,0425	0,0411	0,0219	0,0206	0,0107	0,0115	0,0059
100	0,5613	0,5465	0,3379	0,1926	0,1878	0,1020	0,0983	0,0527
1000	0,9996	0,9830	0,9826	0,8731	0,8695	0,6490	0,6419	0,4117

Таблица 10.21. Безусловная вероятность проявления дефектов БД после комплексной отладки

M	$Q_{\text{БД}}(M, v)$							
	$v = 2$		$v = 1$		$v = 0,5$		$v = 0,25$	
	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ	АУ	ДУ
1	0,0006	0,0006	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$
10	0,0057	0,0058	$2,9 \cdot 10^{-3}$	0,0030	0,0015	0,0015	0,0008	0,0008
100	0,0397	0,0473	0,0239	0,0263	0,0133	0,0139	0,0070	0,0072
1000	0,0707	0,1342	0,0695	0,1192	0,0615	0,0886	0,0454	0,0562

Из данных, приведенных в табл. 10.17, видно, что в начале АО первый дефект уверенно обнаруживается уже после первых 10–15 тестов БД. После АО вероятность проявления дефекта снижается, но остается довольно высокой (см. табл. 10.19). Вероятность того, что после АО в БД не останется ни одного дефекта, оценивается величиной $p'' = 0,48$ при выполнении АУ и $p_n = 0,23$ при выполнении ДУ или ОП.

После комплексной отладки, то есть в начале эксплуатации, вероятность отказа ИО при однократном выполнении ФСО оказывается существенно больше (см. табл. 10.21), чем вероятность отказа ФПО (см. табл. 10.15), — почти на два порядка. При многократном выполнении ФСО в число обращений M включают только независимые обращения. Фактически могут наблюдаться многократные обращения к одному и тому же фрагменту данных, и тогда вероятность проявления дефектов не меняется при увеличении числа обращений. Чтобы учесть этот фактор, введем поправочный коэффициент δ , равный доле независимых обращений. Для данной системы принимается $\delta = 0,1$.

Суммарная вероятность отказа ФПО и ИО при однократном выполнении ФСО после комплексной отладки, рассчитанная по схеме независимых событий, приведена в табл. 10.22.

Вероятность отказа существенно зависит от объема v , используемого при однократном обращении фрагмента БД.

Таблица 10.22. Вероятность отказа ФПО и ИО при однократном выполнении ФСО

	ФПО	ИО		ФПО + ИО	
		$v = 0,25$	$v = 2$	$v = 0,25$	$v = 2$
АУ	$2,74 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$5,87 \cdot 10^{-4}$	$7,57 \cdot 10^{-5}$	$5,90 \cdot 10^{-4}$
ДУ	$5/96 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$5,87 \cdot 10^{-4}$	$7,90 \cdot 10^{-5}$	$5,93 \cdot 10^{-4}$
ОП	$8,76 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$5,87 \cdot 10^{-4}$	$8,18 \cdot 10^{-5}$	$5,96 \cdot 10^{-4}$

10.5.7. Поток иницирующих событий

В систему поступает несколько потоков иницирующих событий ИС. Поток технологических событий, иницирующих работу ФПО с участием алгоритмов А1...А8, включает в себя только те события, которые требуют взаимосвязанного управления группой технологических параметров. Средний интервал между событиями $T_1 = 8$ ч.

Поток заявок на групповое отображение параметров состоит из заявок, поступающих в среднем один раз в смену, поэтому $T_2 = 8$ ч.

Поток команд с пультов управления и рабочих мест оператора для прямого дистанционного управления исполнительными механизмами и управления режимами работы устройств нижнего уровня имеет средний интервал между событиями $T_3 = 72$ ч.

Поток отказов средств автоматики состоит в основном из отказов 200 дискретных и аналоговых датчиков, имеющих среднюю наработку на отказ 200 тыс. ч, поэтому средний интервал между событиями этого потока $T_4 = 100\,000/200 = 500$ ч. Часть этих отказов (их доля 20%) требует вмешательства оперативного персонала с участием подсистемы ДУ. Средний интервал между этими событиями $T_5 = T_4/0,2 = 2500$ ч.

Интенсивность потоков заявок на выполнение ФСО равна сумме интенсивностей слагаемых потоков

$$\lambda_{\text{АУ}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2500} = 0,1254 \text{ ч}^{-1}; \quad T_{\text{АУ}} = \frac{1}{\lambda_{\text{АУ}}} = 7,97 \text{ ч.}$$

Для других подсистем

$$\lambda_{\text{АУ}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2500} = 0,1254 \text{ ч}^{-1}; \quad T_{\text{АУ}} = \frac{1}{\lambda_{\text{АУ}}} = 7,97 \text{ ч};$$

$$\lambda_{\text{ОП}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{72} + \frac{1}{500} = 0,266 \text{ ч}^{-1}; \quad T_{\text{ОП}} = \frac{1}{\lambda_{\text{ОП}}} = 3,76 \text{ ч.}$$

10.5.8. Вероятность безотказной работы ПК

Система в режиме МКЦП работает со случайными интервалами между циклами. Для безотказной работы системы необходимо безотказное выполнение всех

циклов в течение установленного календарного времени. Расчеты проводятся по формуле (10.38) или по приближенным формулам (10.39) или (10.40). Результаты расчетов приведены в табл. 10.23 и 10.24 для времени функционирования $t = 1 \text{ год} = 8760 \text{ ч}$ и среднего объема фрагмента данных $v = 0,25 \text{ Кбайт}$.

Таблица 10.23. Интенсивность отказов подсистем

ФСО	$\Lambda_{\text{ФПО}}$	$\Lambda_{\text{БД}}$	$Q_{1.\text{ПО}}$	$Q_{1.\text{БД}}$	$\lambda_{\text{ПК}} \cdot 10^6$		
					ФПО	ИО	ФПО + ИО
АУ	0,1254	0,01254	$2,74 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	0,3440	0,9150	1,259
ДУ	0,01429	0,00143	$5,96 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	0,0852	0,1043	0,1895
ОП	0,2660	0,0266	$8,76 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	2,330	1,942	4,272

Таблица 10.24. Показатели надежности подсистем

ФСО	$T_{\text{ср}}$, тыс. ч		$P_c(t)$			
	ФПО	ИО		ФПО	ИО	ФПО + ИО
АУ	2900	1090	794	0,997	0,992	0,989
ДУ	11700	9586	5277	0,9993	0,9991	0,9983
ОП	429	515	234	0,9798	0,9831	0,9632

В подсистемах АУ и ДУ определяющим фактором ненадежности ПК является вклад информационного обеспечения. Не увеличивая длительности отладки базы данных, можно уменьшить влияние ИО путем введения средств парирования ошибок с вероятностью парирования $p_{\text{ИО}} = 1 - q_{\text{ИО}}$. Результаты расчетов по формуле (10.41) при $q_{\text{ИИ}} = 1$, $q_{\text{ИО}} = 0,1$ приведены в табл. 10.25.

Таблица 10.25. Показатели надежности подсистем с учетом парирования ошибок в ИО

ФСО	$T_{\text{ср}}$, тыс. ч		$P_c(t)$			
	ФПО	ИО		ФПО	ИО	ФПО + ИО
АУ	2900	10900	2291	0,997	0,992	0,9962
ДУ	11700	95860	5277	0,99925	0,99991	0,99916
ОП	429	5150	396	0,9798	0,9983	0,9781

Более высокая вероятность безотказной работы подсистемы ДУ достигнута в основном за счет существенно меньшей интенсивности потока инициирующих событий. Подсистема ОП имеет худшие показатели, уступая по средней наработке подсистеме АУ более чем в 5 раз. Это допустимо, так как функция отображения параметров не связана непосредственно с управлением технологическим объектом, и поэтому «цена отказа» здесь меньше, чем в подсистемах АУ и ДУ.

10.6. Оценка надежности программного комплекса по результатам отладки и нормальной эксплуатации

В процессе отладки и опытной или нормальной эксплуатации программного комплекса появляется возможность использовать статистические данные об обнаруженных и исправленных ошибках и уточнить проектные оценки надежности. Для этой цели разработаны модели надежности, содержащие параметры, точечные оценки которых получают путем обработки результатов отладки и эксплуатации ПК. Модели отличаются друг от друга допущениями о характере зависимости интенсивности появления ошибок от длительности отладки и эксплуатации. Некоторые модели содержат определенные требования к внутренней структуре программных модулей.

Экспоненциальная модель Шумана [3]–[7].

Модель основана на следующих допущениях:

- общее число команд в программе на машинном языке постоянно;
- в начале испытаний число ошибок равно некоторой постоянной величине и по мере исправления ошибок становится меньше; в ходе исправлений программы новые ошибки не вносятся;
- интенсивность отказов программы пропорциональна числу остаточных ошибок.

О структуре программного модуля сделаны дополнительные допущения:

- модуль содержит только один оператор цикла, в котором есть операторы ввода информации, операторы присваивания и операторы условной передачи управления вперед;
- отсутствуют вложенные циклы, но может быть k параллельных путей, если имеется $k - 1$ оператор условной передачи управления.

При выполнении этих допущений вероятность безотказной работы находят по формуле

$$P(t, \tau) = \exp(-C\varepsilon_r(\tau)t) = e^{-t/T}; \quad \varepsilon_r(\tau) = \frac{E_0}{I} - \varepsilon_n(\tau); \quad T = 1 / \left(C \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_n(\tau) \right) \right), \quad (10.42)$$

где E_0 — число ошибок в начале отладки; I — число машинных команд в модуле; $\varepsilon_n(\tau)$ и $\varepsilon_r(\tau)$ — число исправленных и оставшихся ошибок в расчете на одну команду; T — средняя наработка на отказ; τ — время отладки; C — коэффициент пропорциональности.

Для оценки E_0 и C используют результаты отладки. Пусть из общего числа прогонов системных тестовых программ r — число успешных прогонов, $n - r$ — число прогонов, прерванных ошибками. Тогда общее время n прогонов, интенсивность ошибок и наработку на ошибку находят по формулам

$$H = \sum_{i=1}^r T_i + \sum_{i=1}^{n-r} t_i; \quad \lambda = \frac{n-r}{H}; \quad T = \frac{1}{\lambda} = \frac{H}{n-r}. \quad (10.43)$$

Полагая $H = \tau_1$ и $H = \tau_2$, найдем:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n_1 - r_1}{H_1}; \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{n_2 - r_2}{H_2}; \quad \hat{T}_1 = \frac{1}{\hat{\lambda}_1}; \quad \hat{T}_2 = \frac{1}{\hat{\lambda}_2}, \quad (10.44)$$

где $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ — время тестирования на одну ошибку. Подставляя сюда (10.42) и решая систему уравнений, получим оценки параметров модели:

$$\hat{E}_0 = \frac{I}{\gamma - 1} (\gamma \varepsilon_{\text{н}}(\tau_1) - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_2)); \quad \hat{C} = 1 / \left(\hat{T}_1 \left(\frac{\hat{E}_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_1) \right) \right); \quad \gamma = \frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}. \quad (10.45)$$

Для вычисления оценок необходимо по результатам отладки знать $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \varepsilon_{\text{н}}(\tau_1), \varepsilon_{\text{н}}(\tau_2)$.

Некоторое обобщение результатов (10.43)–(10.45) состоит в следующем. Пусть T_1 и T_2 — время работы системы, соответствующее времени отладки τ_1 и τ_2 , n_1 и n_2 — число ошибок, обнаруженных в периодах τ_1 и τ_2 . Тогда

$$\frac{T_1}{n_1} = 1 / \left(C \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_1) \right) \right); \quad \frac{T_2}{n_2} = 1 / \left(C \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_2) \right) \right).$$

Отсюда

$$\hat{E}_0 = \frac{I}{\gamma - 1} (\gamma \varepsilon_{\text{н}}(\tau_1) - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_2)); \quad \hat{C} = \frac{n_1}{T_1} / \left(\frac{\hat{E}_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_1) \right); \quad \gamma = \frac{T_1}{n_1} / \frac{T_2}{n_2}. \quad (10.46)$$

Если T_1 и T_2 — только суммарное время отладки, то $\hat{T}_1 = T_1/n_1, \hat{T}_2 = T_2/n_2$, и формула (10.46) совпадает с (10.45).

Если в ходе отладки прогоняется k тестов в интервалах $(0, \tau_1), (0, \tau_2), \dots, (0, \tau_k)$, где $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$, то для определения оценок максимального правдоподобия используют уравнения [3]

$$\hat{C} = \sum_{j=1}^k n_j / \left(\frac{\hat{E}_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_j) \right) H_j; \quad \hat{C} = \left\{ \sum_{j=1}^k n_j / \left(\frac{\hat{E}_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_j) \right) \right\} \sum_{j=1}^k H_j, \quad (10.47)$$

где n_j — число прогонов j -го теста, заканчивающихся отказами; H_j — время, затраченное на выполнение успешных и безуспешных прогонов j -го теста. При $k = 2$ (10.47) сводится к предыдущему случаю и решение дает результат (10.46).

Асимптотическое значение дисперсий оценок (для больших значений n_j) определяются выражениями [8]

$$D\hat{C} \cong 1 / \left\{ \sum_{j=1}^k n_j / C^2 - \left(\sum_{j=1}^k H_j \right)^2 / \sum_{j=1}^k \left(n_j / \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_j) \right)^2 \right) \right\};$$

$$DE_0 \cong I^2 / \left\{ \sum_{j=1}^k \left(n_j / \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_{\text{н}}(\tau_j) \right)^2 \right) - C^2 \left(\sum_{j=1}^k H_j \right)^2 / \sum_{j=1}^k n_j \right\},$$

где $C \cong \hat{C}, E \cong \hat{E}_0$.

Коэффициент корреляции оценок

$$\rho(\hat{C}, \hat{E}_0) \cong \left\{ \sum_{j=1}^k n_j / \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_n(\tau_j) \right) \right\} / \left\{ \sum_{j=1}^k n_j \sum_{j=1}^k \left(n_j / \left(\frac{E_0}{I} - \varepsilon_n(\tau_j) \right)^2 \right) \right\}^{0.5}.$$

Асимптотические значения дисперсии и коэффициента корреляции используются для определения доверительных интервалов значений E_0 и C на основе нормального распределения.

В работе [9] отмечается, что наиболее адекватной для модели Шумана является экспоненциальная модель изменения количества ошибок при изменении длительности отладки

$$\varepsilon_n(\tau) = \frac{E_0}{I} (1 - e^{-\tau/\tau_0}),$$

где E_0 и τ_0 определяются из эксперимента. Тогда

$$P(t, \tau) = \exp(-CE_0 / I e^{-\tau/\tau_0} t).$$

Средняя наработка до отказа возрастает экспоненциально с увеличением длительности отладки:

$$T = I / CE_0 e^{\tau/\tau_0}.$$

Экспоненциальная модель Джелинского—Моранды [10]—[12].

Данная модель является частным случаем модели Шумана. Согласно этой модели, интенсивность появления ошибок пропорциональна числу остаточных ошибок:

$$\lambda(\Delta t_i) = K_{JM}(E_0 - i + 1),$$

где K_{JM} — коэффициент пропорциональности; Δt_i — интервал между i -й и $(i - 1)$ -й обнаруженными ошибками. Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \exp(-\lambda(\Delta t_i)) = K_{JM}((E_0 - i + 1)t), \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (10.48)$$

При $K_{JM} = C/I$ и $\varepsilon_n(\tau) = (i - 1)/I$ формула (10.48) совпадает с (10.42). В работе [14] показано, что при последовательном наблюдении k ошибок в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k$ можно получить оценки максимального правдоподобия для параметров E_0 и K_{JM} . Для этого надо решить систему уравнений

$$\sum_{i=1}^k (\hat{E}_0 - i + 1)^{-1} = k / (\hat{E}_0 - \theta k + 1); \quad \hat{K}_{JM} = \frac{k}{A} / (\hat{E}_0 - \theta k + 1); \quad (10.49)$$

$$\theta = \frac{B}{AK}; \quad A = \sum_{i=1}^k t_i; \quad B = \sum_{i=1}^k i t_i.$$

Асимптотические оценки дисперсии и коэффициента корреляции (при больших k) определяются с помощью формул

$$D\hat{E}_0 \cong \frac{k}{kS_2 - A^2 C^2}; \quad D\hat{K}_{JM} \cong \frac{S_2 K_{JM}^2}{kS_2 - A^2 K_{JM}^2};$$

$$\rho(\hat{K}_{JM}, \hat{E}_0) \cong -\frac{AK_{JM}}{(kS_2)^{0.5}}; \quad S_2 = \sum_{i=1}^k (E_0 - i + 1)^{-2}.$$

Чтобы получить численные значения этих величин, надо всюду заменить E_0 и K_{JM} их оценками.

Геометрическая модель Моранды [13].

Интенсивность появления ошибок принимает форму геометрической прогрессии:

$$\lambda(t) = DK^{i-1}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad K < 1,$$

где D и K — константы; i — число обнаруженных ошибок. Эту модель рекомендуется применять в случае небольшой длительности отладки. Другие показатели надежности находят по формулам

$$P(t) = \exp(-DK^n t); \quad T = 1 / DK^n,$$

где n — число полных временных интервалов между ошибками. Модификация геометрической модели предполагает, что в каждом интервале тестирования обнаруживается несколько ошибок. Тогда

$$\lambda(t) = DK^{n_{j-1}}; \quad T = 1 / DK^{n_m}; \quad P(t) = \exp(-DK^{n_m} t), \quad t_{j-1} < t < t_j,$$

где n_{j-1} — накопленное к началу j -го интервала число ошибок; m — число полных временных интервалов.

Модель Шика—Волвертона [15], [16].

Эта модель является модификацией экспоненциальной модели Джелинского—Моранды. Модель основана на допущении того, что интенсивность обнаружения ошибок пропорциональна числу остаточных ошибок и длительности i -го интервала отладки:

$$\lambda(t) = K_{JM}(E_0 - i + 1)t, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (10.50)$$

то есть с течением времени возрастает линейно. Это соответствует рэлеевскому распределению времени между соседними обнаруженными ошибками. Поэтому модель называют также рэлеевской моделью Шумана или рэлеевской моделью Джелинского—Моранды. Параметр рэлеевского распределения

$$\sigma_0 = 1/\sqrt{K_{JM}(E_0 - n)},$$

где n — число полных временных интервалов. Тогда вероятность безотказной работы и средняя наработка между обнаруженными ошибками

$$P(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_0^2}\right) = \exp\left(\frac{-K_{JM}(E_0 - n)t^2}{2}\right), \quad t_n < t < t_{n+1}; \quad (10.51)$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2K_{JM}(E_0 - n)}}.$$

Сравнительный анализ моделей [20] показывает, что геометрическая модель Моранды и модель Шика—Волвертона дают устойчиво завышенные оценки

числа остаточных ошибок, то есть оценки консервативные или пессимистические. Для крупномасштабных разработок программ или проектов с продолжительным периодом отладки наилучший прогноз числа остаточных ошибок дает модель Шика—Волвертона.

Модель Липова [17] (обобщение моделей Джелинского—Моранды и Шика—Волвертона).

Эта модель является смешанной экспоненциально-рэлеевской, то есть содержит в себе допущения и экспоненциальной модели Джелинского—Моранды, и рэлеевской модели Шика—Волвертона. Интенсивность обнаружения ошибок пропорциональна числу ошибок, остающихся по истечении $(i - 1)$ -го интервала времени, суммарному времени, уже затраченному на тестирование к началу текущего интервала, и среднему времени поиска ошибок в текущем интервале времени:

$$\lambda(T_{i-1}, t_i) = K_L(E_0 - i + 1)(T_{i-1} + t_i / 2); \quad T_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} t_j; \quad T_0 = 0, \quad (10.51)$$

где t_i — интервал времени между i -й и $(i - 1)$ -й обнаруженными ошибками.

Здесь имеется и еще одно обобщение: допускается возможность возникновения на рассматриваемом интервале более одной ошибки. Причем исправление ошибок производится лишь по истечении интервала времени, на котором они возникли:

$$n_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} M_j, \quad n_0 = 0,$$

где M_j — число ошибок, возникших на j -м интервале. Из (10.51) находим вероятность безотказной работы и среднее время между отказами:

$$P(t) = \exp(-K_L(E_0 - n_{i-1})(T_{i-1}t + t^2 / 4)), \quad 0 \leq t \leq t_i;$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{K_L(E_0 - n_{i-1})}} (1 - 2\Phi(T_{i-1}\sqrt{2K_L(E_0 - n_{i-1})})),$$

где $\Phi(x)$ — интеграл Лапласа; K_L и E_0 — параметры модели.

Параметры модифицированных рэлеевской и смешанной моделей оцениваются с помощью метода максимального правдоподобия. Однако в этом случае функция правдоподобия несколько отличается от рассмотренной при выводе уравнений (10.49), так как теперь наблюдаемой величиной является число ошибок, обнаруживаемых в заданном интервале времени, а не время ожидания каждой ошибки. Предполагается, что обнаруженные на определенном интервале времени ошибки устраняются перед результирующим прогоном. Тогда уравнения максимального правдоподобия имеют вид

$$\hat{C} = \frac{K / A}{\hat{E}_0 + 1 - K\theta}; \quad \frac{K}{\hat{E}_0 + 1 - K\theta} = \sum_{i=1}^M \frac{M_i}{\hat{E}_0 - n_{i-1}}; \quad (10.52)$$

$$K = \sum_{i=1}^M M_i; \quad \theta = \frac{B}{AK},$$

где $C = K_{\text{ЛМ}}$ для модели (10.50) и $C = K_L$ для модели (10.51); M — общее число временных интервалов. Коэффициенты A и B находят с помощью формул

$$A = \sum_{i=1}^M t_i; \quad B_i = \sum_{i=1}^M (n_{i-1} + 1)t_i$$

для рэлеевской модели и с помощью формул

$$A = \sum_{i=1}^M t_i(T_{i-1} + t_i / 2); \quad B_i = \sum_{i=1}^M (n_{i-1} + 1)t_i(T_{i-1} + t_i / 2)$$

для смешанной модели. Здесь t_i — продолжительность временного интервала, в котором наблюдается M_i ошибок. Заметим, что при $M_i = 1$ уравнения (10.52) приобретают вид (10.49), тогда $M = K$, что соответствует k в (10.49), $n_{i-1} = i - 1$.

Модель Мусы—Гамильтона [18], [19].

Модель использует так называемую теорию длительности обработки. Надежность оценивается в процессе эксплуатации, в котором выделяют время τ реальной работы процессора (наработку) и календарное время τ' с учетом простоя и ремонта. Для числа отказов (обнаруженных ошибок) выводится формула

$$m(\tau) = E_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{C\tau}{E_0 T_0} \right) \right), \quad (10.53)$$

где T_0 — наработка между отказами перед началом отладки или эксплуатации; E_0 — начальное число ошибок; C — коэффициент пропорциональности. Из (10.53) находят:

$$\lambda(\tau) = \frac{dm(\tau)}{d\tau} = \frac{C}{T_0} \exp \left(-\frac{C\tau}{E_0 T_0} \right);$$

$$P(t, \tau) = \exp(-\lambda(\tau)t) = \exp \left(-\frac{C}{T_0} \exp \left(-\frac{C\tau}{E_0 T_0} \right) t \right).$$

В работе [20] сравниваются экспоненциальная, рэлеевская и смешанная модели. Сравнение проведено на одинаковых наборах данных для предсказания числа ошибок в проекте, состоящем из 4519 небольших программных задач. Результаты предсказания сравниваются с апостериорными данными. Сравнение проводилось и на крупной управляющей программе, содержащей 249 процедур и 115 000 инструкций языка JOVIAL. Было выявлено от 2000 до 4000 ошибок на четырех последовательностях наборов данных. По результатам испытаний определены зависимости числа оставшихся ошибок от времени как для эмпирических данных, так и для предсказанных по рассмотренным моделям. По результатам анализа сделаны следующие выводы:

1. Экспоненциальная и рэлеевская модели дают более точное предсказание числа ошибок, чем смешанная модель.
2. Экспоненциальная и рэлеевская модели более пригодны для небольших программ или для небольших длительностей отладки.
3. Для больших программ или при длительных испытаниях лучшие результаты дают модификации экспоненциальной и рэлеевской моделей.

4. Геометрическая модель дает удовлетворительные оценки при любой длине программ, но лучше ее использовать для коротких программ и небольшой длительности испытаний.
5. Экспоненциальная и рэлеевская модели завышают число оставшихся ошибок, а смешанная модель занижает эту величину по сравнению с действительным значением.
6. Если для большого числа равных интервалов число ошибок на каждом интервале меняется в значительных пределах, то экспоненциальная и рэлеевская модели могут оказаться неудовлетворительными.

Вейбулловская модель (модель Сукерта) [20].

Модель задается совокупностью соотношений

$$\lambda(t) = m\lambda^m t^{m-1}; \quad P(t) = e^{-(\lambda t)^m}; \quad T = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Достоинство этой модели в том, что она содержит дополнительный по сравнению с экспоненциальной моделью параметр m . Подбирая m и λ , можно получить лучшее соответствие опытным данным. Значение m подбирают из диапазона $0 < m < 1$. Оценки параметров получают с помощью метода моментов. Для параметра формы значение находят как решение уравнения

$$\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) / \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{s^2}{\bar{t}^2}; \quad \bar{t} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i; \quad s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{t})^2,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Для параметра масштаба оценка

$$\hat{\lambda} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{m}}\right) / \bar{t}.$$

Модель Уолла—Фергюссона (степенная модель) [21]

Число обнаруженных и исправленных ошибок определяется с помощью степенной зависимости

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^\alpha,$$

где M — степень отлаженности программ; M_0 и ε_0 — эмпирические константы. Отсюда интенсивность отказов

$$\lambda(M) = \frac{d\varepsilon_n(M)}{M d\tau} = R_0 (M / M_0)^{\alpha-1}, \quad R_0 = \alpha \varepsilon_0, \quad \alpha < 1. \quad (10.54)$$

Величина M выражается в человеко-месяцах испытаний, единицах календарного времени и т. д. Адекватность модели проверена на экспериментальных данных, полученных для систем реального времени и программ на алгоритмическом языке FORTRAN. Для грубого предсказания надежности авторы рекомендуют значение $\alpha = 0,5$.

Во всех рассмотренных моделях программа представлена как «черный ящик», без учета ее внутренней структуры. Кроме того, всюду принято допущение, что при исправлении ошибок новые ошибки не вносятся. Следующие две модели рассматривают программы в виде «белого ящика» — с учетом внутренней структуры. Поэтому они называются структурными.

Структурная модель Нельсона [22], [23].

В качестве показателя надежности принимается вероятность $P(n)$ безотказного выполнения n прогонов программы. Для j -го прогона вероятность отказа представляется в виде

$$Q_j = \sum_{i=1}^N p_{ji} y_i,$$

где y_i — индикатор отказа на i -м наборе данных; p_{ji} — вероятность появления i -го набора в j -м прогоне. Тогда

$$P(n) = \prod_{j=1}^n (1 - Q_j) = \exp \left(\sum_{j=1}^n \ln(1 - Q_j) \right).$$

Если Δt_j — время выполнения j -го прогона, то интенсивность отказов

$$\lambda(t_j) = \frac{-\ln(1 - Q_j)}{\Delta t_j}; \quad P(n) = \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda(t_j) \Delta t_j \right); \quad t_j = \sum_{i=1}^j \Delta t_i. \quad (10.55)$$

Практическое использование формул (10.54) и (10.55) затруднено из-за множества входов и большого количества трудно оцениваемых параметров модели. На практике надежность программ оценивается по результатам тестовых испытаний, охватывающих относительно небольшую область пространства исходных данных.

Для упрощенной оценки в [24] предлагается формула

$$P(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i(n_i) W_i; \quad \sum_{i=1}^N W_i = N,$$

где N — число прогонов; n_i — число обнаруженных при прогоне i -го теста ошибок; E_i — индикатор отсутствия ошибок при прогоне i -го теста.

Для уменьшения размерности задачи множество значений входных наборов разбивают на пересекающиеся подмножества G_j , каждому из которых соответствует определенный путь $L_j, j = 1 \dots n$. Если L_j содержит ошибки, то при выполнении теста на поднаборе G_j будет отказ. Тогда вероятность правильного выполнения одного теста

$$P(1) = 1 - \sum_{j=1}^n p_j \varepsilon_j, \quad p_j = \sum_{i \in G_j} p_{ij}, \quad \varepsilon_j < 1.$$

При таком подходе оценка надежности по структурной модели затруднена, так как ошибка в L_j проявляется не при любом наборе из G_j , а только при некоторых. Кроме того, отсутствует методика оценки ε_j по результатам испытаний программ.

Структурная модель роста надежности (модель Иббуда) [25].

Модель является развитием модели Нельсона. В ней делают следующие допущения:

- исходные данные входного набора выбираются случайно в соответствии с распределением β_i , $i = 1 \dots n$;
- все элементы программ образуют s классов, вероятность правильного исполнения элемента l -го класса равна p_l , $l = 1 \dots s$;
- ошибки в элементах программ независимы.

Вероятность правильного исполнения программы по i -му пути

$$P_i = \prod_{l=1}^s p_l^{m_{li}}, \quad (10.56)$$

где m_{li} — количество элементов l -го класса в i -м пути. Безусловная вероятность безотказной работы при однократном исполнении программы в период времени до первой обнаруженной ошибки

$$P_{c0} = \sum_{i=1}^n \beta_i P_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \quad (10.57)$$

где n — количество путей исполнения программы.

При корректировании программы после обнаружения ошибки учитывается возможность внесения новой ошибки с помощью коэффициента эффективности корректирования q_l . Вместо p_l в (10.56) следует использовать

$$p_{lj} = 1 - (1 - p_{l0}) q_l^{j-1}, \quad j \geq 1,$$

где j — номер интервала времени между соседними ошибками. При $q_l = 1$ вероятность p_{lj} не меняется, при $q_l < 1$ вероятность увеличивается, а при $q_l > 1$, напротив, падает. Для j -го интервала вероятность успешного исполнения программы по i -му пути

$$P_{ij} = \prod_{l=1}^s (1 - (1 - p_{l0}) q_l^{j-1})^{m_{li}} \cong 1 - \sum_{l=1}^s m_{li} (1 - p_{l0}) q_l^{j-1}.$$

При $q_l = q$ выражение (10.57) можно представить в виде

$$P_{ij} \cong 1 - (1 - P_{i0}) q^{j-1}, \quad P_{i0} = \sum_{l=1}^s m_{li} (1 - p_{l0}). \quad (10.58)$$

Подставляя (10.58) в (10.57), получим:

$$P_{cj} = 1 - (1 - P_{c0}) q^{j-1}, \quad P_{c0} = \sum_{i=1}^n \beta_i P_{i0}. \quad (10.59)$$

Если наиболее вероятные пути проверены, то

$$P_{c0} = \sum_{i: \beta_i \geq c} \beta_i + \sum_{i: \beta_i < c} \beta_i \prod_{l=1}^s p_{l0}^{m_{li}}.$$

В формуле (10.59) параметры P_{c0} и q можно оценить по экспериментальным данным. Для плана испытаний $[NBr]$, в котором определяются значения n_j — числа

прогонов между j -м и $(j - 1)$ -м отказами, $j = 1...r$, с помощью метода максимального правдоподобия найдем уравнения относительно искомых оценок:

$$\sum_{j=1}^r \frac{(n_j - 1)q^{j-1}}{1 - Q_{c0}q^{j-1}} - \frac{r}{Q_{c0}} = 0, \quad Q_{c0} = 1 - P_{c0}, \quad r \geq 2;$$

$$\sum_{j=1}^r \frac{(n_j - 1)Q_{c0}}{1 - Q_{c0}q^{j-1}} - \frac{r(r-1)}{2q} = 0.$$

В частности, при $r = 2$ имеем:

$$\hat{Q}_{c0} = \frac{1}{n_1}; \quad \hat{q} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Гиперболическая модель роста надежности [26].

Пусть P_k — вероятность безотказной работы во время k -го цикла испытаний, P_∞ — установившееся значение вероятности. Тогда кривую роста надежности можно аппроксимировать с помощью гиперболической зависимости

$$P_k = P_\infty - \frac{\alpha}{k},$$

где α — скорость роста кривой; k — номер цикла. Оценки параметров P_∞ и α можно получить с методом максимального правдоподобия. Для этого организуют испытания по циклам, в каждом из которых выполняют фиксированное число прогонов: $n_1, n_2, \dots, n_N$. Число успешных прогонов X_k из общего количества n_k имеет биномиальное распределение с параметрами n_k и P_k . Тогда функция максимального правдоподобия

$$L = \sum_{k=1}^N s_k \ln P_k + (n_k - s_k) \ln(1 - P_k); \quad P_k = P_\infty - \frac{\alpha}{k},$$

где $s_1, s_2, \dots, s_N$ — фактическое количество успешных прогонов в циклах. Приведем уравнения максимального правдоподобия:

$$\frac{\partial L}{\partial P_\infty} = \sum_{k=1}^N \frac{s_k}{P_\infty - \alpha / k} - \sum_{k=1}^N \frac{n_k - s_k}{1 - P_\infty + \alpha / k} = 0; \quad (10.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^N \frac{s_k / k}{P_\infty - \alpha / k} - \sum_{k=1}^N \frac{(n_k - s_k) / k}{1 - P_\infty + \alpha / k} = 0.$$

Систему алгебраических уравнений (10.60) решают методом итераций. Однако при $1 - P_\infty < \alpha / k < 1$ можно найти приближенное решение:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{n}} \left(\sum_{k=1}^N k s_k - \frac{N+1}{2} \sum_{k=1}^N s_k \right) / \left(\frac{N+1}{2} C_1 - N \right); \quad \bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k; \quad (10.61)$$

$$\hat{P}_\infty = \frac{1}{\bar{n}} \left(\frac{C_1}{n} \sum_{k=1}^N k s_k - \sum_{k=1}^N s_k \right) / \left(\frac{N+1}{2} C_1 - N \right), \quad C_1 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \ln(N + 0,5) + E,$$

где $E = 0,577215$ — постоянная Эйлера. Если указанное условие не выполняется, то оценки (10.61) можно использовать как начальное приближение в итерационной процедуре.

Оценки параметров можно получить и с помощью метода наименьших квадратов. Для этого надо найти значения P_∞ и α , которые обеспечат минимум выборочной дисперсии:

$$S^2 = Q(P_\infty, \alpha) = \sum_{k=1}^n (\hat{P}_k - P_k)^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k}{n_k} - P_\infty + \frac{\alpha}{k} \right)^2 = \min.$$

Дифференцируя эту функцию по P_∞ и α , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A - NP_\infty + \alpha C_1 &= 0; & B - C_1 P_\infty + C_2 \alpha &= 0; \\ A &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{n_k}; & B &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{kn_k}; & C_1 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; & C_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем решение:

$$\hat{P}_\infty = \frac{AC_2 - BC_1}{NC_2 - C_1^2}; \quad \hat{\alpha} = \frac{AC_1 - BN}{NC_2 - C_1^2}. \quad (10.62)$$

Эти оценки являются несмещенными. Оценки (10.62) можно использовать для нахождения хороших начальных значений оценок максимального правдоподобия.

Список литературы

1. Холстед М. Начала науки о программах / Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 128 с.
2. Шнейдерман Б. Психология программирования. — М.: Радио и связь, 1984. — 304 с.
3. Shooman M. L. Probabilistic models for software reliability prediction // International Symp. Fault Tolerant Computing. — Newton, Mass.; N. Y., 1972.
4. Shooman M. L. Operation Testing and Software Reliability Estimation during Program Development // Record of the 1973 IEEE Symp. on Computer Software Reliability. N. Y., 1973. — P. 51–57.
5. Shooman M. L. Software Reliability measurement and models // Proc. 1975, Reliability and Maintainability Symp. — Vol. 1. — Washington, D. C., 1975. P. 458–491.
6. Shooman M. L. Structural model's software reliability prediction // 2-nd International Conf. Software Engineering, 1976. — P. 268–280.
7. Shooman M. L. Software engineering: Reliability, Development and Management. — McGraw-Hill, International. Book Co, 1983.

8. *Тейер Т., Липов М., Нельсон Э.* Надежность программного обеспечения. — М.: Мир, 1981. — 324 с.
9. *Лунаев В. В.* Проблемы обеспечения надежности и устойчивости сложных комплексов программ АСУ // УСиМ. — 1977. — № 3. С. 39–45.
10. *Moranda P. B., Jelinski J.* Final Report of Software Reliability Study. — McDonnell Douglas Astronautic Company. MDC Report № 63921. Dec. 1972.
11. *Moranda P. B., Jelinski J.* Software Reliability Research // Statistical Computer Performance Evaluation / Ed. by W. Freiberger. — N. Y.: Academic, 1972.
12. *Jelinski J., Moranda P. B.* Applications of a Probability // Based Model to a Code Reading Experiment, April 30 – May 2, 1973. — P. 78–83.
13. *Moranda P. B.* Probability-Based Models for the Failures During Burn — In Phase Joint National Meeting ORSA // Tims. — Las Vegas; N. Y.; Nov., 1975.
14. *Lipov M.* TRW report № 2260.1.9–73B–15. Maximum Likelihood Estimation of Software Time-to-Failure Distribution. June, 1973.
15. *Shick C. J., Wolverson R. W.* Assessment of Software Reliability // Proc. 11-th Annual Meeting of the German Operation Research Society. Hamburg, Germany, 6–8 Sept., 1972.
16. *Shick C. J., Wolverson R. W.* Achieving reliability in large scale software system // Proc. of the Annual Reliability and Maintainability Symp. Los Angeles, 1974. — P. 302–319.
17. *Lipov M.* Some variation of a Model for Software Time-to-Failure // TRW Systems Group. Correspondence ML-74–2260, 19–21 Aug., 1974.
18. *Hamilton P. A., Musa J. D.* Measuring reliability of Computation Center Software // Proc. 3-th Internat. Conf. on Software. Eng. May 10–12 1978. — P. 29–36.
19. *Musa J. D.* Validity of Execution time theory of software reliability // IEEE Trans. on reliability. — 1979. — № 3. — P. 199–205.
20. *Sukert C. A.* An investigation of software reliability models // Proc. Annual Reliability and Maintainability Symp. — 1977. — P. 478–484.
21. *Wall J. K., Ferguson P. A.* Pragmatic software reliability prediction // Proc. 1977 Annual Reliability and Maintainability Symp. — 1977. — P. 485–488.
22. *Nelson E. C.* Software reliability FTC-5 Internat. Symp. Fault Tolerant Computing. Paris; N. Y., 1975. — P. 24–28.
23. *Nelson E. C.* Estimation software reliability from test data // Microelectronics and reliability. — 1978. — Vol. 17. — P. 61–74.
24. *Осима Ю.* Надежность программного обеспечения // Дзекo сери. — 1975. — Т. 16, № 10. — С. 887–894.
25. *Иыуду К. А., Касаткин А. И., Бахтизин В. В.* Прогнозирование надежности программ на ранних этапах разработки // Надежность и контроль качества. — 1982. — № 5. — С. 18–30.
26. *Ллойд Д., Липов М.* Надежность. — М.: Сов. радио, 1964. — 686 с.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоят постановка задачи и этапы проектной оценки надежности программного обеспечения (ПО)?
2. Перечислите факторные модели в проектной оценке надежности ПО, их содержание и применение.
3. Каков порядок проектной оценки надежности ПО?
4. Назовите варианты моделей оценки надежности программ по результатам их отладки. Сравните эти модели. Приведите перечень необходимых для расчетов исходных данных.
5. Какие существуют структурные модели оценки надежности программ по результатам испытаний?

Глава 11

Практические методы статистической оценки надежности

11.1. Роль эксперимента в оценке надежности

Роль эксперимента в оценке надежности огромна. Достаточно сказать, что эксперимент (в частности, статистический эксперимент) является единственным источником объективной информации о надежности. Только эксперимент (в реальной или опытной эксплуатации, а также при специальных испытаниях аппаратуры) позволяет получить показатели надежности элементов, необходимые для теоретического расчета надежности систем. Не имея же данных о надежности элементов, невозможно рассчитать надежность системы, а в этой ситуации становится бесполезным любой теоретический анализ моделей надежности.

Однако эксперимента с элементами системы (первичного эксперимента) для оценки надежности недостаточно. Проводимые на этапе проектирования теоретические расчеты, обладая тем бесспорным достоинством, что они позволяют оценить надежность систем еще до их изготовления, являются все же прогнозом, содержащим даже при абсолютно достоверной информации о надежности элементов большую или меньшую методическую погрешность. Наличие этой погрешности объясняется двумя причинами: 1) несовершенством математической модели надежности, так как в ней отражаются не все, а лишь наиболее существенные факторы, влияющие на надежность; 2) нарушениями в реальной системе (хотя и небольшими в хорошей модели) тех допущений, которые приняты в процессе формирования математической модели надежности.

Поэтому для подтверждения прогнозируемых теоретическим расчетом показателей надежности систем необходим вторичный эксперимент над опытными

образцами изделия или их макетами. Вторичный эксперимент имеет некоторые особенности по сравнению с первичным экспериментом.

Элементы обычно обладают высокими показателями надежности (средняя наработка до отказа равна десяткам, сотням тысяч и даже миллионам часов). Однако их производство, как правило, является массовым, и поэтому имеется принципиальная возможность проводить испытания большого числа элементов (тысячи, десятки и даже сотни тысяч). Иное дело с системами. Здесь количество испытываемых образцов исчисляется десятками, реже сотнями. В высоконадежных изделиях, где применено глубокое структурное резервирование, для получения хороших оценок надежности необходимо длительное наблюдение, иначе оценки могут значительно отличаться от реальных показателей надежности.

Часто не удается собрать статистику об отказах малосерийных и уникальных изделий в течение всей их жизни до морального старения. Поэтому иногда ставят под сомнение необходимость теоретических расчетов для таких систем, так как их результаты не удастся подтвердить экспериментально.

Противоположная точка зрения, согласно которой теоретические расчеты необходимы и для уникальных систем, основана на том, что последние обычно содержат большое число элементов, что позволяет получить хорошие экспериментальные оценки надежности входящих в систему блоков и устройств. Кроме того, при наличии достоверной информации о надежности блоков и устройств совершенствование математической модели позволяет снизить методическую погрешность до довольно низкого уровня. При этом по мере усложнения модели необходимо широкое применение методов статистического моделирования.

11.2. Классификация методов статистических испытаний надежности

Статистические данные об отказах изделий можно получить в результате наблюдений за изделиями в нормальной или опытной (подконтрольной) эксплуатации либо в результате стендовых испытаний.

Наблюдения в нормальной эксплуатации — самый дешевый способ получения экспериментальных данных о надежности. Сведения об отказах (времени, месте, причине отказа, времени устранения, наработке между отказами, условиях эксплуатации и пр.) оформляются на местах эксплуатации оперативно-ремонтным персоналом в документах стандартной формы, собираются в центре сбора и обработки данных и обрабатываются по определенным алгоритмам. Достоинством этого способа является также то, что получаемые данные относятся к реальным системам. Недостатки способа — существенное запаздывание данных, затрудняющее их использование при проведении работ по повышению надежности, ограниченные возможности активного эксперимента, повышенное влияние субъектив-

ного фактора, так как в сборе сведений на местах участвуют не представители служб надежности, а оперативно-ремонтный персонал.

В опытной эксплуатации наблюдения за работоспособностью изделий проводятся с участием представителей служб надежности, имеющих специальную подготовку, что позволяет проводить эксперименты по единой методике, в том числе и некоторые активные эксперименты в специальных режимах эксплуатации (повышенный уровень помех, введение искусственных отказов и пр.). При этом снижается роль субъективного фактора. Однако, как и в первом случае, возможности активного планирования испытаний ограничены. Кроме того, для сбора сведений необходимо в течение длительного времени задействовать на местах эксплуатации довольно большой штат сотрудников служб надежности.

Стендовые испытания являются централизованными и проводятся либо на заводах-изготовителях, либо на предприятиях — разработчиках систем. Это весьма дорогостоящий вид испытаний, осуществляемый к тому же не в реальных, а в имитируемых условиях эксплуатации. Кроме того, в течение всего периода испытаний, как правило, не удается использовать системы по назначению. Однако стендовые испытания — это едва ли не единственная возможность своевременно получить информацию о недостатках схемных решений, конструкции и технологии и применить ее для совершенствования технической документации системы и повышения ее надежности. Стендовые испытания позволяют проводить активные эксперименты (в режимах, допускающих выявление слабых мест системы, в «пиковых» режимах, редких или недопустимых при нормальной эксплуатации и пр.) и ускоренные испытания.

Испытания надежности можно классифицировать не только по виду, но и по ряду других признаков. По типу отказов различают испытания *на внезапные отказы, на постепенные отказы и комплексные испытания*.

По назначению испытания бывают *определятельные* и *контрольные* [7]. Определятельные испытания предназначены для выявления фактического уровня показателей надежности. Их результаты не только имеют значение для испытываемой партии изделий, но могут иметь и более широкое применение. Контрольные испытания предназначены для того, чтобы установить соответствие фактических характеристик надежности конкретной партии изделий заданным требованиям. При этом фактический уровень надежности количественно не определяется и результаты контрольных испытаний имеют значение лишь для испытываемой партии изделий.

По объему выборки различают испытания с полной и усеченной выборкой. Испытания с полной выборкой проводятся до полного «выжигания» — до отказа всех испытываемых изделий. При усеченной выборке часть образцов может проработать безотказно до конца испытаний.

При планировании обычных испытаний необходимо установить:

1. признаки отказов изделия. Все состояния изделия, связанные с отказами отдельных элементов, относят к одному из двух классов — работоспособные и неработоспособные — и таким образом определяют сложное событие «отказ системы»;

2. показатель надежности, который является главным для данного изделия. В зависимости от назначения изделия и требований к надежности таким показателем может быть вероятность отказа или вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, наработка на отказ, коэффициент готовности и др.;
3. условия испытаний (электрические режимы, климатические условия, механические нагрузки, последовательность и длительность решения информационных, информационно-расчетных и расчетных задач);
4. способ контроля работоспособности. Контроль может быть либо только внутренний, то есть с помощью средств, предусмотренных для нормальной эксплуатации, либо внешний, с помощью средств, предназначенных специально для испытаний наконец, комбинированный (внутренний и внешний). По времени работы системы контроля различают контроль непрерывный и периодический с заданным периодом включения;
5. способ замены отказавших изделий. Здесь возможны следующие стратегии: отказавшие изделия не заменяются до конца испытаний (план типа B), заменяются немедленно после отказа (план типа B), группую после того, как количество отказавших изделий достигнет заданного уровня (план B, B), и т. д.;
6. количество испытываемых изделий N ;
7. правило окончания испытаний. Здесь возможны следующие варианты планирования: испытания заканчиваются по истечении заданного времени T , после r -го отказа, после отказа всех изделий, в момент времени $T_{||} = \min(T, T_r)$, где T_r — момент r -го отказа.

Для обозначения планов испытаний будем применять символику с тремя позициями: количество испытываемых изделий, способ замены отказавших изделий, правило окончания испытаний. Возможны такие планы: $[N, B, T]$; $[N, B, T]$; $[N, B, r]$; $[N, B, r]$; $[N, B, (T, r)]$; $[N, B, (T, r)]$ и др. Чаще всего применяются следующие четыре типа плана [6]–[8].

1. План $[N, B, T]$. Испытываются N элементов, каждый отказавший элемент заменяется новым, испытания проводятся в течение фиксированного времени T [10].
2. План $[N, B, T]$. Испытываются N элементов, отказавший элемент выводится из наблюдения, испытания проводятся в течение фиксированного времени T [11].
3. План $[N, B, r]$. Испытываются N элементов, каждый отказавший элемент заменяется новым, испытания проводятся до получения r -го отказа [12].
4. План $[N, B, r]$. Испытываются N элементов, отказавший элемент выводится из наблюдения, испытания проводятся до получения r -го отказа.

Стремление ускорить процесс испытаний и получить как можно больше информации о надежности изделий вызывает необходимость использования косвенных методов проведения испытаний, к которым относятся и ускоренные испытания. Для ускорения испытаний выбирается «модель подобия», обеспечивающая

определенные пропорции результатов испытаний при реальных и некоторых искусственно созданных условиях и позволяющая установить количественные связи между результатами реальных и ускоренных испытаний с помощью коэффициента ускорения (коэффициента подобия) K_y . Чаще всего ускорение обеспечивают ужесточением климатических условий функционирования (температуры, давления, влажности и пр.) и увеличением коэффициента электрической или механической нагрузки K_n . Из данных, приведенных в табл. 11.1, следует, что с помощью этих факторов можно добиться ускорения в 10...100 раз и более по сравнению с реальными условиями (30 °С, $K_n = 1$).

Таблица 11.1. Ускорение испытаний с помощью температуры (750 °С) и коэффициента нагрузки

Элементы	Коэффициент ускорения			
	$K_n = 1$	$K_n = 1,3$	$K_n = 1,7$	$K_n = 2,0$
Резисторы	2,2	3,8	5,0	7,5
Конденсаторы	3,0	8,2	27	67
Диоды германиевые	27	45	89	134

Для экспоненциального распределения наработки коэффициент подобия трактуется как отношение интенсивностей отказов элементов в условиях ускоренных испытаний и в реальных условиях. Если принять неизменным среднее ожидаемое количество отказов за время испытаний, то при ускоренных испытаниях можно сократить время испытаний обратно пропорционально коэффициенту подобия: $T_y = T/K_y$. Основной областью применения ускоренных испытаний следует считать испытания ЭРИ и простых модулей.

11.3. Задачи определительных испытаний

Задачи определительных испытаний существенно зависят от выбора оцениваемой характеристики и от наличия априорных сведений о надежности изделий. Среди характеристик безотказности наибольший интерес представляют вероятность отказа и функция распределения наработки до отказа. При оценке вероятности отказа и других показателей безотказности наиболее удобны планы типа Б, так как они позволяют найти эмпирическую функцию распределения. При планах типа В по результатам испытаний непосредственно определяются статистические оценки наработки между отказами и параметры потока отказов. Чтобы по этим данным найти оценки показателей безотказности, требуются дополнительные и довольно сложные расчеты. Однако при планах типа В можно дать оценку коэффициента готовности. Существует только один случай, когда характеристики безотказности и характеристики потока отказов удобно оценивать по одному и тому же плану (Б или В). Это случай, когда закон распределения наработки известен заранее и он экспоненциальный. Тогда интенсивность

отказов совпадает с параметром потока отказов, так что одновременно получается и характеристика безотказности, и характеристика потока отказов.

Рассмотрим теперь, как выбирается длительность испытаний. С точки зрения полноты информации наиболее желательным является план $[N, B, M]$, так как только в этом случае удастся полностью построить эмпирическую функцию распределения. Однако длительность этих испытаний, в особенности для высоконадежных изделий, оказывается неприемлемо большой — во многих случаях она исчисляется многими тысячами часов. Стремление ограничить длительность испытаний приводит к планам типа $[N, B, T]$, $[N, B, r]$ и др.

Но при использовании любого из этих планов известна лишь часть эмпирической функции для $t \leq T$ или T_r . Возможности распространения результатов испытаний для значений $t > T$ или T_r зависят от априорной информации и от свойств получаемых статистических данных. От них же существенно зависит также способ обработки данных с помощью методов математической статистики. По этим признакам можно выделить следующие три задачи определительных испытаний, возникающие на стадии обработки данных и расположенные здесь в порядке их усложнения.

Задача 1. Вид функции распределения $F(t)$ наработки до первого отказа известен. По результатам испытаний необходимо лишь определить параметры этого распределения. Например, пусть в результате теоретических исследований и последующей экспериментальной проверки показано, что для изделий определенного типа закон распределения наработки экспоненциальный, то есть $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, тогда необходимо оценить лишь параметр λ . При некоторых других распределениях оценивают два параметра: m и σ при нормальном, m и λ — при распределении Вейбулла, k и λ — при гамма-распределении. Параметры оценивают методами параметрической статистики. При этом допустимо проведение испытаний в течение времени $T < t_3$ — заданного времени эксплуатации изделия в реальных условиях, так как после определения параметров распределения можно прогнозировать вероятность отказа и для любого $t_3 > T$ (рис. 11.1). В пределах задачи 1 можно получить также оценки вероятности отказа, средней наработки до отказа и др.

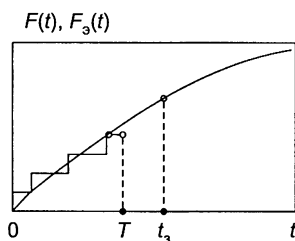


Рис. 11.1. Прогнозирование вероятности отказа по результатам испытаний

Задача 2. Вид функции распределения $F(t)$ заранее неизвестен. Однако результаты испытаний показывают, что эмпирические функции распределения можно

плавно аппроксимировать стандартными распределениями или их суперпозициями. Кроме того, из предварительной обработки экспериментальных данных видно, что качественный характер поведения эмпирических функций распределения и гистограмм не меняется от партии к партии. В таких случаях говорят, что статистика однородна. Например, две гистограммы, полученные для различных партий изделий, имеют выраженную асимметрию и одномодальны (рис. 11.2, *а*) либо имеют вид монотонно убывающих ступенчатых функций (рис. 11.2, *б*).

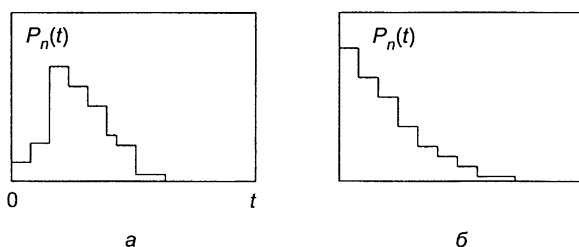


Рис. 11.2. Типовые гистограммы результатов испытаний

В этом случае необходимо выполнить следующие действия по обработке данных:

1. выбрать одно из возможных семейств теоретических распределений, качественное поведение которых соответствует экспериментальным данным (например, логарифмически нормальное (рис. 11.2, *а*) и экспоненциальное (рис. 11.2, *б*));
2. наилучшим образом подобрать параметры распределения, пользуясь, например, методом максимального правдоподобия или его частным случаем — методом наименьших квадратов;
3. имея точечные оценки параметров, проверить согласие теоретического и экспериментального распределений по критериям согласия математической статистики (критерию χ -квадрат, Колмогорова, Мизеса и др.);
4. если проверка по критериям согласия дала положительный результат, то можно переходить к решению задачи 1, чтобы найти другие оценки; если же ответ отрицательный, то нужно повторить все действия для другого теоретического распределения, точнее описывающего экспериментальные данные. Но даже при положительном ответе полезно использовать два-три распределения, сравнить результаты аппроксимации и выбрать наилучшее распределение. В случае, когда два распределения дают одинаково хорошие результаты, для дальнейшего применения выбирают то из них, для которого можно предложить теоретическое обоснование.

Использование в условиях задачи 2 результатов эксперимента, проведенного за ограниченное время для получения оценок показателей надежности при t_3 , большем длительности испытаний, вообще говоря, неправомерно. Для этого необходимы, по крайней мере, косвенные подтверждения того, что при увеличении длительности испытаний не изменится качественно вид функции распределения,

например, к экспоненциальной составляющей функции распределения не добавится нормальная составляющая (рис. 11.3). Таким косвенным подтверждением могут быть результаты длительных испытаний небольших партий изделий или результаты длительной эксплуатации аппаратуры, построенной из тех же элементов. Если не удастся получить даже косвенного подтверждения, то испытания надо проводить в течение времени, равного времени эксплуатации t_3 . Тогда вообще может не возникнуть потребность в определении вида функции распределения.

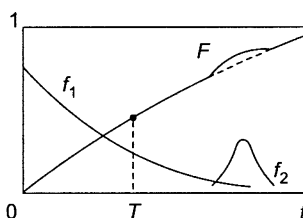


Рис. 11.3. Суперпозиция распределений и планирование испытаний

Задача 3. Вид функции $F(t)$ неизвестен и статистические данные неоднородны, то есть качественный вид эмпирической функции распределения и гистограмма меняются от партии к партии. Например, в одной партии гистограмма имеет вид, представленный на рис. 11.2, а, в другой — на рис. 11.2, б. В этом случае прежде всего необходимо выяснить значимость расхождений, используя методы непараметрической статистики (например, критерий знаков или критерий Вилкоксона).

Если проверка подтвердит значимость расхождений, тогда необходимо выяснить и устранить причины неоднородности, после чего обработка статистических данных проводится как в задаче 2. Далее для определительных испытаний будут рассмотрены преимущественно задачи первого типа, а из задач второго типа — лишь одна: оценка вероятности отказа при неизвестном законе распределения наработки.

11.4. Оценка вероятности отказа по биномиальному плану. Точечная оценка. Доверительные интервалы

Пусть для некоторых изделий с неизвестной функцией распределения наработки до первого отказа определяющим показателем надежности является вероятность отказа изделия $Q(t)$ в течение времени t . Как было показано в предыдущем разделе, в таких условиях прогнозирование вероятности отказа в течение времени, превышающего время испытаний, невозможно. Поэтому выбираем план $[N, B, t]$, где длительность испытаний T равна времени эксплуатации изделия t .

Устанавливая на испытания N одинаковых изделий и проверяя их работоспособность через время t , определяем число отказавших изделий m . Тогда точечной оценкой вероятности отказа является частость $\bar{Q}(t) = m(t)/N$.

Согласно закону больших чисел, при увеличении N точечная оценка $\bar{Q}(t)$ сходится по вероятности к оцениваемой $Q(t)$. Следует, однако, отметить, что при испытаниях надежности далеко не всегда удастся установить большое число изделий. Кроме того, для высоконадежных изделий $Q(t)$ обычно очень мало. В этих условиях дисперсия оценки получается неприемлемо большой и точечная оценка становится неудовлетворительной. Наиболее ярко недостатки точечной оценки видны, когда $m = 0$ и $\bar{Q}(t) = 0$, что является априорной нижней оценкой $Q(t)$ и, таким образом, не несет никакой новой информации о надежности изделий. Поэтому кроме точечной оценки используют доверительные интервалы.

Абсолютно достоверными границами для неизвестной вероятности $Q(t)$ являются 0 и 1. Всякое сужение интервала $(0, 1)$ связано с риском совершить ошибку, состоящую в неверном заключении о том, что $Q(t)$ находится между новыми границами. В зависимости от того, как происходит сужение интервала $(0, 1)$, различают двусторонний и односторонние интервалы.

Двусторонним доверительным интервалом для неизвестной и неслучайной величины вероятности $Q(t)$ называют интервал $(Q_{\text{н}}, Q_{\text{в}})$ со случайными границами, зависящими от исхода статистического эксперимента и такими, что вероятность покрытия этим интервалом неизвестного числа $Q(t)$ не меньше заданной вероятности δ , называемой доверительной вероятностью или коэффициентом доверия: $P(Q_{\text{н}} \leq Q \leq Q_{\text{в}})$.

Вероятность противоположного события, то есть того, что $Q(t)$ окажется в интервале $(0, Q_{\text{н}})$ или $(Q_{\text{в}}, 1)$, называется уровнем значимости γ и равна $1 - \delta$. Уровень значимости можно представить в виде суммы вероятностей:

$$\gamma = \gamma' + \gamma'' = P(0 < Q < Q_{\text{н}}) + P(Q_{\text{в}} < Q < 1).$$

Обычно γ' и γ'' выбирают одинаковыми, так что $\gamma' = \gamma'' = \gamma / 2 = (1 - \delta) / 2$.

Односторонними (верхним и нижним) доверительными интервалами называют, соответственно интервалы $(0, Q_{\text{в}})$ и $(Q_{\text{н}}, 1)$ — такие, что

$$P(0 < Q < Q_{\text{в}}) \geq \delta; \quad P(Q_{\text{н}} < Q < 1) \geq \delta.$$

Здесь уровень значимости $\gamma = 1 - \delta$ выражает вероятность того, что число $Q(t)$ попадет в интервал $(Q_{\text{в}}, 1)$ при верхнем интервале и в интервал $(0, Q_{\text{н}})$ — при нижнем.

Доверительную вероятность нельзя выбирать слишком малой, так как снижается доверие к полученным границам и увеличивается риск сделать неверное заключение. Нельзя выбирать ее и слишком близкой к единице, так как чем ближе δ к единице, тем шире границы для неизвестной вероятности. Опыт использования статистических методов показывает, что для практических целей достаточно брать δ из диапазона 0,8...0,95. Иногда коэффициент доверия увеличивают до значения 0,98 или 0,99.

Правила вычисления Q_n и Q_n были предложены в начале 30-х годов XX в. английскими статистиками К. Клоппером и Э. Пирсоном [1]. Поскольку испытания различных образцов одного и того же изделия происходят независимо друг от друга, число m отказавших за время t изделий распределено по биномиальному закону с параметрами N и Q , то есть вероятность отказа ровно m изделий из N определяется формулой

$$P\xi = m = C_N^m Q^m (1-Q)^{N-m}.$$

Вероятность же отказа не более m изделий равна

$$P\xi \leq m = B(m, Q, N) = \sum_{i=0}^m C_N^i Q^i (1-Q)^{N-i}. \quad (11.1)$$

Здесь m — варианта, а N и Q — параметры распределения. Функция (11.1) является ступенчатой функцией m , изменяющейся от нуля до единицы при увеличении m от нуля до N . Если построить семейство распределений y при одном и том же N , но различных Q и для удобства изображения сгладить ступенчатые функции непрерывными кривыми, то получим семейство зависимостей, приведенное на рис. 11.4.

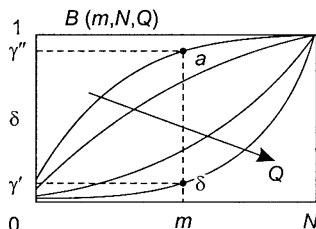


Рис. 11.4. Определение доверительных границ параметра биномиального распределения с помощью принципа Клоппера—Пирсона

В этом семействе параметр Q увеличивается в направлении, указанном стрелкой. Если теперь провести перпендикуляр через точку m , где m — наблюдаемое при испытаниях число отказов, и две горизонтальные прямые на уровне γ' и $1 - \gamma''$, а затем подобрать две кривые семейства, которые проходили бы через точки пересечения a и b , то параметры этих кривых и дают нижнюю и верхнюю доверительные границы с коэффициентом доверия $\delta = 1 - \gamma' - \gamma''$. Два уравнения, составленные для точек a и b , называют уравнениями Клоппера — Пирсона, они могут быть использованы для определения доверительных границ:

$$\sum_{i=0}^m C_N^i Q_n^i (1 - Q_n)^{N-i} = \gamma'; \quad (11.2)$$

$$\sum_{i=m}^N C_N^i Q_n^i (1 - Q_n)^{N-i} = \gamma''. \quad (11.3)$$

Учитывая, что $\sum_{i=0}^N C_N^i Q^i (1-Q)^{N-i} = 1$, вместо (11.3) можем записать:

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_N^i Q_n^i (1 - Q_n)^{N-i} = 1 - \gamma''. \quad (11.4)$$

При $m = 0$ нижняя граница $Q_{\text{н}} = 0$, а верхняя получается из (11.2):

$$(1 - Q_{\text{в}})^N = \gamma' = 1 - \delta.$$

Отсюда

$$Q_{\text{в}} = 1 - \sqrt[N]{1 - \delta}. \tag{11.5}$$

Пример 11.1. При испытаниях 10 комплектов аппаратуры в течение 1000 ч не было обнаружено ни одного отказа. Найти доверительные границы для вероятности безотказной работы аппаратуры в течение 1000 ч при коэффициенте доверия 0,9.

Решение. Поскольку при испытаниях не предусмотрено восстановление работоспособности, а время испытаний совпадает с интервалом времени эксплуатации, заключаем, что план испытаний является планом типа $[N, B, t]$. Так как во время испытаний не возникло ни одного отказа, используем формулу (11.5) и находим $Q_{\text{в}} = 1 - 10^{-0,1} = 1 - \exp(-0,23) = 0,206$.

Таким образом, при отсутствии отказов в 10 комплектах с гарантией 90% можно утверждать, что вероятность отказа не более 0,206.

Пример 11.2. Какое количество изделий необходимо поставить на испытания по плану типа $[N, B, t]$, чтобы с гарантией 90% утверждать, что вероятность безотказной работы не ниже 0,9?

Решение. Наименьшее количество изделий потребуется, когда $m = 0$. Тогда из (11.5) находим $N = \lg(1 - \delta) / \lg P_{\text{н}}$. Подставляя сюда $\delta = 0,9$ и $P_{\text{н}} = 0,9$, находим $N = 22$. Если же $\delta = 0,95$ и $P_{\text{н}} = 0,95$, то $N = 59$, а при $\delta = 0,95$ и $P_{\text{н}} = 0,99$ необходимое число изделий $N = 299$.

Из примеров 7.1 и 7.2 видно, что подтвердить даже не очень высокие показатели надежности не так-то просто. Значительно проще иногда удовлетворить требованию заказчика о 100% безотказности при наблюдении за небольшой группой изделий, чем доказать методами математической статистики, что фактическая вероятность безотказной работы не ниже 0,9.

При $m > 0$ для решения уравнений (11.2) и (11.4) можно использовать таблицы биномиального распределения. Так, в [2] приводится (табл. 6.1) значений $P(\xi \leq m)$ для $N = 5(5)20(10)30$ и $Q = 0,01(0,01)0,10(0,10)0,50$, а в [3] — таблица (табл. 5.1) значений $P(\xi = n)$ для $N = 5(5)30$ и $Q = 0,01(0,01)0,02(0,02)0,1(0,1)0,5$. Кроме того, в [3] имеется таблица (табл. 5.2) доверительных границ для параметра Q биномиального распределения с коэффициентом доверия $\delta = 0,95; 0,975$ и $0,995$ для значений m и $N - m = 1(1)20(2)30(5)50(10)60(20)100, 200, 500$. Аналогичная таблица (табл. 10) имеется и в [4].

Пример 11.3. При объеме партии, определенном для $m = 0$, во время испытаний по плану $[N, B, t]$ происходит один отказ. Найти доверительные границы для вероятности отказа и определить, насколько необходимо увеличить размер партии, чтобы с гарантией в 95% подтвердить уровень вероятности безотказной работы не менее 0,9. Как изменяются доверительные границы и объем партии, если необходимо подтвердить уровень $P(t) > 0,95$?

Решение. Из табл. 5.2 в [3] для доверительной вероятности $\delta = 0,95$ и $m = 0$ находим $N = 29$. Затем при $N = 29$ и $m = 1$ определяем границы: $0,002 < Q < 0,149$. Для снижения Q необходимо увеличить N . По той же таблице находим, что при $N = 46$ ($N - m = 45$ и $m = 1$) вероятность $0,001 < Q < 0,099$, то есть необходимо увеличить размер партии на 17 изделий (на 59%). Если же при $N = 46$ откажут два изделия, то $Q_{\text{в}} = 0,1$ достигается при $N = 59 + 2 = 61$. Следовательно, необходимо увеличить размер партии на 15 изделий (на 33%). Для подтверждения уровня $P(t) = 0,95$ при отсутствии отказов необходимо испытать 60 изделий, а при одном отказе — 98 изделий, то есть на 38 изделий (63%) больше.

Точное решение задачи о доверительном интервале в некоторых случаях получить затруднительно. Это объясняется сложностью непосредственного решения уравнений Клоппера — Пирсона, а также ограниченностью опубликованных таблиц биномиального распределения. В таких случаях для расчетов, не требующих высокой точности, можно находить приближенные решения, основанные на использовании распределения Пуассона и нормального распределения. Рассмотрим три такие возможности.

Пуассоновское приближение. Если Q мало, N велико и $m \ll N$, то справедливо выражение

$$C_N^m Q^m (1-Q)^{N-m} \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad a = NQ. \quad (11.6)$$

С помощью (11.6) уравнения (11.2) и (11.4) преобразуются следующим образом:

$$\sum_{i=0}^m \frac{a_i^i}{i!} e^{-a_i} = \gamma'; \quad (11.7)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_i^i}{i!} e^{-a_i} = 1 - \gamma''. \quad (11.8)$$

Для определения $a_{\text{н}}$ и $a_{\text{в}}$ можно использовать таблицы распределения Пуассона (например, табл. 7 в [4], табл. 7.2 в [2]). Для входа в таблицу необходимо задать варианту m и вероятность γ'' и найти параметр распределения $a_{\text{в}}$. Аналогично по значениям $(m - 1, 1 - \gamma')$ определяют $a_{\text{н}}$, а затем делением на N вычисляют границы $Q_{\text{н}}$ и $Q_{\text{в}}$. Вместо таблиц распределения Пуассона можно использовать таблицы квантилей χ^2 -распределения, используя тот факт, что квантиль χ^2 -распределения и по уровню вероятности p при числе степеней свободы $k = 2m + 2$ связана с параметром a распределения Пуассона, найденным по значениям p и m , соотношением $u(p, 2m + 2) = 2a(p, m)$. Учитывая (11.7) и (11.8), находим:

$$Q_{\text{в}} = \frac{1}{2N} u(\gamma', 2m + 2); \quad Q_{\text{н}} = \frac{1}{2N} u(1 - \gamma'', 2m). \quad (11.9)$$

Пример 11.4. При испытании 100 источников стабилизированного питания в течение 2000 ч было зарегистрировано два отказа. Найти доверительные границы для вероятности отказа одного источника за время 2000 ч с коэффициентом доверия 0,9.

Решение. Поскольку здесь число отказов значительно меньше числа испытываемых изделий и точечная оценка $\bar{Q} = 0,02$ свидетельствует о том, что вероятность отказа мала, для решения задачи используем пуассоновское приближение. По исходным данным определяем $\gamma' = (1 - 0,9)/2 = 0,05$, $1 - \gamma'' = 0,95$. Из табл. 7 в [4] при $d = m - 1 = 1$ и $\alpha = 1 - \gamma'' = 0,95$ находим $a_{\text{н}} = 0,35536$, а при $d = m - 2$ и $\alpha = \gamma' = 0,05$ находим $a_{\text{в}} = 6,29579$. Отсюда $0,00355 < Q < 0,063$. Тот же результат можно получить и с помощью табл. 2.2а в [3]. При $1 - \gamma'' = 0,95$ и $n = 2m = 4$ имеем $u_{\text{н}} = 0,711$, а при $\gamma' = 0,05$ и $n = 2m + 2 = 6$ имеем $u_{\text{в}} = 12,592$. Подставляя $u_{\text{н}}$ и $u_{\text{в}}$ в (11.9), вычисляем искомые границы. При $\delta = 0,95$ можно сравнить результаты, полученные по таблицам биномиального и χ^2 -распределения: $0,004 < Q < 0,062$ (биномиальное) и $0,0024 < Q < 0,072$ (χ^2 -распределение). Точность оценок при пуассоновском приближении получается вполне удовлетворительной.

Приближение Большева—Смирнова. Если Q мало, N велико и $m < (N - 1)/2$, то при приближенных расчетах доверительных границ вместо биномиального распределения в уравнениях Клоппера—Пирсона (11.2) и (11.4) можно использовать распределение Пуассона (11.7) и (11.8) со значениями параметров

$$a_{\text{в}} = \frac{(2N - m)Q_{\text{в}}}{2 - Q_{\text{в}}}; \quad a_{\text{н}} = \frac{(2N - m + 1)Q_{\text{н}}}{2 - Q_{\text{н}}}. \quad (11.10)$$

Отсюда при $m \ll N$ и $Q \ll 1$ получаем $a_{\text{в}} \approx NQ_{\text{в}}$, $a_{\text{н}} \approx NQ_{\text{н}}$, то есть получаем выражения параметров при пуассоновском приближении. Решая (11.10) относительно $Q_{\text{н}}$ и $Q_{\text{в}}$, находим:

$$Q_{\text{в}} = \frac{2a_{\text{в}}(m, \gamma')}{2N - m + a_{\text{в}}(m, \gamma')}; \quad Q_{\text{н}} = \frac{2a_{\text{н}}(m - 1, 1 - \gamma'')}{2N - m + 1 + a_{\text{н}}(m - 1, 1 - \gamma'')}.$$

Если же используются таблицы χ^2 -распределения, то

$$Q_{\text{в}} = \frac{u_{\text{в}}(2m + 2, \gamma')}{2N - m + 0,5u_{\text{в}}(2m + 2, \gamma')}; \quad Q_{\text{н}} = \frac{u_{\text{н}}(2m, 1 - \gamma'')}{2N - m + 1 + 0,5u_{\text{н}}(2m, 1 - \gamma'')}. \quad (11.11)$$

Пример 11.5. В условиях примера 11.4 найти доверительные границы с коэффициентом доверия 0,95, используя приближение Большева—Смирнова.

Решение. Из табл. 2.2а из [3] находим $u_{\text{н}}(4; 0,95) = 0,484$; $u_{\text{в}}(6; 0,025) = 14,45$. Подставляя эти значения в (11.11), получаем $0,00234 < Q < 0,0705$.

Нормальное приближение. При достаточно больших NQ при решении уравнений Клоппера—Пирсона можно использовать формулу Муавра—Лапласа:

$$\sum_{i=0}^m C_N^i Q^i (1 - Q)^{N-i} \approx \Phi\left(\frac{m + 0,5 - NQ}{\sqrt{NQ(1 - Q)}}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5 - NQ}{\sqrt{NQ(1 - Q)}}\right); \quad (11.12)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy,$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа. Поскольку формула (11.12) применяется при больших значениях NQ ($NQ > 9$), вторым слагаемым можно пренебречь. Определяя квантиль нормального распределения z_p , по уровню γ' и используя симметрию этого распределения, получаем уравнение

$$\frac{m + 0,5 - NQ_u}{\sqrt{NQ_u(1 - Q_u)}} = z_{\gamma'} = -z_{\delta_1}, \quad \delta_1 = 1 - \gamma'.$$

Отсюда нетрудно найти

$$Q_u = \frac{2m + 1 + z_{\delta_1}^2 + z_{\delta_1} \sqrt{z_{\delta_1}^2 + (2m + 1) \left(2 - \frac{(2m + 1)}{N}\right)}}{2(N + z_{\delta_1}^2)}. \quad (11.13)$$

Аналогично,

$$Q_n = \frac{2m - 1 + z_{\delta_1}^2 - z_{\delta_1} \sqrt{z_{\delta_1}^2 + (2m - 1) \left(2 - \frac{(2m - 1)}{N}\right)}}{2(N + z_{\delta_1}^2)}. \quad (11.14)$$

Достоинством этих формул является то, что они не требуют использования таблиц. Квантили z_p можно заготовить заранее для применяемых на практике уровней значимости: $z_{0,95} = 1,645$; $z_{0,9} = 1,29$; $z_{0,975} = 1,96$.

Пример 11.6. При испытаниях 500 датчиков дискретной информации в системе централизованного контроля и управления в течение 1000 ч были зарегистрированы отказы в 12 из них. Необходимо найти доверительные границы для вероятности отказа с коэффициентом доверия $\delta = 0,9$.

Решение. Согласно исходным данным, $\delta_1 = (1 + \delta)/2 = 0,95$, $m = 12$, $N = 500$, $z_{\delta_1} = 1,645$. Подставляя эти значения в (11.13), находим: $0,0141 < Q < 0,0392$. Точечная оценка $\bar{Q} = 0,024$.

11.5. Оценка параметра экспоненциального распределения. Точечная оценка. Доверительный интервал

Пусть известно, что изделия имеют экспоненциальное распределение наработки до первого отказа $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. Необходимо оценить параметр этого распределения λ , имеющий смысл интенсивности отказов. В математической статистике предлагается несколько методов для получения точечной оценки параметра λ . Одним из наиболее распространенных и эффективных методов является метод максимального правдоподобия, предложенный английским статистиком Р. А. Фишером в 1912 г. Сущность метода состоит в следующем [21].

Пусть в результате испытаний, проведенных по некоторому плану, зарегистрированы отказы в моменты $t_1, t_2, \dots, t_m$. Число m может быть заранее заданным или случайным (в частности, $m = 0$), однако времена t_i являются случайными величинами. Поэтому вектор $X = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ можно рассматривать как реализацию многомерной случайной величины. Если известна функция распределения наработки одного изделия $F(t, A)$, зависящая от совокупности параметров $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ (в частности, от одного параметра), постольку для каждого конкретного плана испытаний можно составить элемент вероятности того, что в испытаниях будут получены отказы в моменты t_i :

$$P\{t_1 \leq T_1 < t_1 + dt_1, \dots, t_m \leq T_m < t_m + dt_m\} = p(t_1, t_2, \dots, t_m, A) dt_1 dt_2 \dots dt_m,$$

где $p(t_1, t_2, \dots, t_m, A)$ — многомерная плотность распределения случайного вектора $(T_1, T_2, \dots, T_m)$. Если зафиксировать t_i такими, какими они оказались на самом деле при испытаниях, и изменять значения параметров A в некотором интервале, то заметим, что плотность $p(t_1, t_2, \dots, t_m, A)$ имеет максимум. Согласно методу максимального правдоподобия, точечная оценка $\bar{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k)$ параметров $a_1, a_2, \dots, a_k$ должна обладать следующим свойством: обеспечивать максимальное значение плотности вероятности наблюдаемого исхода испытаний, то есть

$$p(t_1, t_2, \dots, t_m, \bar{A}) = \max_{(A)} p(t_1, t_2, \dots, t_m, A).$$

На практике удобнее отыскивать не максимум функции $p(A)$, а максимум $\ln p(A)$. Такая замена допустима, так как оба максимума достигаются в одной и той же точке. Функция $L = \ln p(A)$ называется функцией правдоподобия, и с ее помощью задача определения точечной оценки ставится так: $\bar{A}$ должно обеспечивать максимальное значение функции L , то есть

$$L(t_1, t_2, \dots, t_m, \bar{A}) = \max_{(A)} L(t_1, t_2, \dots, t_m, A).$$

Точка $\bar{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k)$ в области A , обеспечивающая $\max_{(A)} L$, находится методом градиента, согласно которому $\bar{A}$ является решением системы уравнений правдоподобия

$$\frac{d}{da_i} L(t_1, t_2, \dots, t_m, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0, \quad i = 1 \dots k.$$

В частности, в случае однопараметрического экспоненциального распределения необходимо решить только одно уравнение,

$$\frac{d}{d\lambda} L(t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторые конкретные планы испытаний и найдем точечные оценки [17].

План $[N, B, T]$. Поскольку испытания проводятся с немедленной заменой отказавших изделий работоспособными и заканчиваются в момент T , мы учитываем, что интервалы между отказами распределены по экспоненциальному закону

с одним и тем же параметром $N\lambda$, а в интервале (t_m, T) все изделия проработали безотказно. Составим выражение для элемента вероятности наблюдаемого исхода испытаний:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) dt_1 dt_2 \dots dt_m = (N\lambda e^{-N\lambda t_1} dt_1)(N\lambda e^{-N\lambda t_2} dt_2) \dots (N\lambda e^{-N\lambda t_m} dt_m) \times \\ \times e^{-N\lambda(T-t_m)} = (N\lambda)^m e^{-N\lambda T} dt_1 dt_2 \dots dt_m.$$

Отсюда $L = m \ln(N\lambda) - N\lambda T$.

Уравнение правдоподобия

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{m}{\lambda} - NT = 0.$$

Отсюда точечная оценка

$$\bar{\lambda} = m / NT. \quad (11.15)$$

Из (11.15) следует, что достаточной статистикой испытаний является число отказавших изделий m . Это вовсе не означает, что в процессе испытаний не требуется непрерывного контроля работоспособности. Он необходим для своевременной замены отказавших изделий, хотя в протоколы испытаний моменты отказов заносить не обязательно.

Исследуем следующие свойства полученной оценки: несмещенность, состоятельность, эффективность. В математической статистике показывается, что при достаточно общих условиях, накладываемых на функцию распределения наработки на отказ одного изделия $F(t, A)$, оценка максимального правдоподобия эффективна независимо от плана испытаний. Поэтому остается проверить несмещенность и состоятельность.

Достаточная статистика m распределена по закону Пуассона с параметром $N\lambda T$, поэтому ее математическое ожидание и дисперсия $Mm = Dm = N\lambda T$. Тогда из формулы (11.15) находим:

$$M\bar{\lambda} = M\left(\frac{m}{NT}\right) = \frac{Mm}{NT} = \frac{N\lambda T}{NT} = \lambda; \\ D\bar{\lambda} = D\left(\frac{m}{NT}\right) = \frac{Dm}{(NT)^2} = \frac{N\lambda T}{(NT)^2} = \frac{\lambda}{NT} = \frac{\lambda}{S_B(T)},$$

где $S_B(T)$ — суммарная наработка всех изделий за время испытаний по плану типа B . Отсюда следует, что точечная оценка (11.15) является несмещенной и эффективной.

План $[N, B, T]$. Поскольку испытания проводятся без замены отказавших изделий, число работоспособных изделий после каждого отказа уменьшается на единицу и на λ уменьшается суммарная интенсивность отказов. Согласно плану испытаний, элемент вероятности

$$f(t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) dt_1 dt_2 \dots dt_m = (N\lambda e^{-N\lambda t_1} dt_1)((N-1)\lambda e^{-N\lambda t_2} dt_2) \times \dots \\ \dots \times ((N-m+1)\lambda e^{-(N-m+1)\lambda t_m} dt_m) e^{-\lambda(T-t_m)} = \lambda^m A_N^m e^{-\lambda S_B(T)},$$

где A_N^m — число размещений из N элементов по m ; $S_B(T)$ — суммарная наработка всех изделий за время испытаний по плану типа B , определяемая по формуле

$$S_B(T) = \sum_{i=1}^m (N - i + 1)(t_i - t_{i-1}) + (N - m)(T - t_m), \quad t_0 = 0.$$

Функция правдоподобия

$$L = \ln A_N^m + m \ln \lambda - \lambda S_B(T).$$

Уравнение правдоподобия

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{m}{\lambda} - S_B(T) = 0.$$

Точечная оценка $\bar{\lambda} = m / S_B(T)$. В достаточную статистику здесь входят уже две величины: число отказов m и суммарная наработка $S_B(T)$. Чтобы определить суммарную наработку, необходимо точно фиксировать моменты всех отказов, то есть для получения точечной оценки здесь впервые потребовались моменты всех отказов. План $[N, B, r]$. Времена между соседними отказами $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ имеют экспоненциальные распределения с параметром $\Lambda = N\lambda$. Поэтому многомерная плотность распределения вектора $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ имеет вид

$$f(Z_1, Z_2, \dots, Z_r, \lambda) = \prod_{i=1}^r N\lambda e^{-N\lambda Z_i} = (N\lambda)^r \exp\left(-N\lambda \sum_{i=1}^r Z_i\right).$$

Функция правдоподобия

$$L = \ln f = r(\ln N + \ln \lambda) - N\lambda t_r, \quad t_r = \sum_{i=1}^r Z_i.$$

Уравнение правдоподобия

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{r}{\lambda} - Nt_r = 0.$$

Отсюда

$$\bar{\lambda}^* = r / Nt_r. \quad (11.16)$$

Поскольку t_r имеет распределение Эрланга с параметрами $N\lambda$ и r , нетрудно найти математическое ожидание оценки

$$M\bar{\lambda}^* = \int_0^\infty \frac{r}{Nx} \frac{(N\lambda)^r x^{r-1}}{(r-1)!} e^{-N\lambda x} dx = \frac{r}{r-1} \lambda.$$

Поскольку оценка получается смещенной, необходимо устранить смещение и вместо (11.16) принять

$$\bar{\lambda} = \frac{r-1}{r} \bar{\lambda}^* = \frac{r-1}{Nt_r}.$$

Чтобы найти дисперсию несмещенной оценки максимального правдоподобия, надо сначала найти второй начальный момент

$$M\bar{\lambda}^2 = \int_0^{\infty} \left(\frac{r-1}{Nx} \right)^2 \frac{(N\lambda)^r x^{r-1}}{(r-1)!} e^{-N\lambda x} dx = \frac{r-1}{r-2} \lambda^2, r > 2.$$

Дисперсия несмещенной оценки

$$D\bar{\lambda} = M\bar{\lambda}^2 - \lambda^2 = \lambda^2 / (r-2), \quad r > 2.$$

Чтобы уменьшить дисперсию точечной оценки, надо назначить достаточно большое значение r .

План $[N, B, r]$. Многомерная плотность распределения вектора $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ имеет вид

$$\begin{aligned} f(Z_1, Z_2, \dots, Z_r, \lambda) &= N\lambda e^{-N\lambda Z_1} (N-1)\lambda e^{-N\lambda Z_2} \dots (N-r+1)\lambda e^{-N\lambda Z_r} = \\ &= A_N^r \lambda^r \exp(-\lambda S_B(r)), \quad S_B(r) = \sum_{i=1}^r (N-i+1)Z_i. \end{aligned}$$

Функция правдоподобия

$$L = r \ln A_N^r + r \ln \lambda - \lambda S_B(r).$$

Уравнение правдоподобия

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{r}{\lambda} - S_B(r) = 0.$$

Оценка максимального правдоподобия

$$\bar{\lambda}^* = r/S_B(r).$$

Статистика $S_B(r)$ имеет распределение Эрланга с параметрами (r, λ) . Потому эта оценка также смещенная, как и (11.16). Несмещенная оценка

$$\bar{\lambda} = \frac{r-1}{r} \bar{\lambda}^* = \frac{r-1}{S_B(r)}.$$

Заметим, что полученные точечные оценки, как и любые другие точечные оценки, при малом объеме испытаний неустойчивы, обладают большой дисперсией и могут создать неверное представление о действительной интенсивности отказов. Поэтому кроме них используют оценки с помощью доверительных интервалов. Двусторонним доверительным интервалом для параметра λ с коэффициентом доверия δ называют интервал (λ_H, λ_B) со случайными границами, зависящими от исхода испытаний и такими, что вероятность покрытия этим интервалом неизвестного значения λ не менее заданной вероятности: $P(\lambda_H < \lambda < \lambda_B) > \delta$. Вероятности

$$\gamma' = P(0 < \lambda < \lambda_H); \quad \gamma'' = P(\lambda_B < \lambda < 1) \quad (11.17)$$

называются уровнями значимости при определении нижней и верхней границ соответственно. Они связаны с доверительной вероятностью соотношением $\delta + \gamma' + \gamma'' = 1$.

Уравнения (11.17) являются уравнениями, из которых находят доверительные границы λ_H и λ_B .

Нижним и верхним односторонними доверительными интервалами называют соответственно интервалы $(0, \lambda_B)$ и (λ_H, ∞) такие, что $P(0 < \lambda < \lambda_B) > \delta$; $P(\lambda_H < \lambda < \infty) > \delta$. Здесь уровень значимости $\gamma = 1 - \delta$ выражает вероятность того, что параметр λ попадет в интервал (λ_B, ∞) или $(0, \lambda_H)$ соответственно. Рассмотрим теперь некоторые конкретные планы испытаний.

План $[N, B, T]$. Достаточная статистика m распределена по закону Пуассона с параметром $a = N\lambda T$. Если зафиксировать NT и построить зависимости от m при различных λ , то получим семейство ступенчатых функций, которые после сглаживания имеют вид как на рис. 11.5.

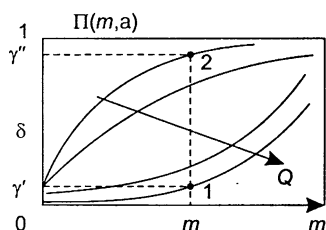


Рис. 11.5. Определение доверительных границ параметра экспоненциального распределения с помощью принципа Клоппера—Пирсона

Параметр семейства a увеличивается в направлении, указанном стрелкой. Чтобы найти доверительные границы, необходимо, как и при оценке вероятности отказа, найти такие функции семейства, которые проходили бы через точки 1 и 2 пересечения перпендикуляра из точки m с горизонтальными прямыми на уровне γ' и $1 - \gamma'$. Составляя соотношения для точек 1 и 2, получаем уравнения Клоппера—Пирсона:

$$\sum_{i=0}^m \frac{(N\lambda_n T)^i}{i!} e^{-N\lambda_n T} = \gamma'; \quad \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(N\lambda_n T)^i}{i!} e^{-N\lambda_n T} = \gamma'. \quad (11.18)$$

Второе уравнение (11.18) преобразуется к виду

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(N\lambda_n T)^i}{i!} e^{-N\lambda_n T} = 1 - \gamma''.$$

Для решения уравнений можно использовать таблицы распределения Пуассона или χ^2 -распределения. При использовании таблиц распределения Пуассона последовательность действий следующая:

$$(\gamma', m) \rightarrow a_n \rightarrow \lambda_n = a_n / NT; \quad (1 - \gamma'', m - 1) \rightarrow a_n \rightarrow \lambda_n = a_n / NT,$$

а при использовании таблиц χ^2 -распределения —

$$(\gamma', 2m + 2) \rightarrow u_n \rightarrow \lambda_n = u_n / 2NT; \quad (1 - \gamma'', 2m) \rightarrow u_n \rightarrow \lambda_n = u_n / 2NT.$$

При $m = 0$ нижняя граница $\lambda_H = 0$, а верхнюю находят из уравнения (11.18):

$$\lambda_n = -\ln(1 - \delta) / NT = b / NT, \quad (11.19)$$

где $b = 2,3$ при $\delta = 0,9$, $b = 3$ при $\delta = 0,95$ и $b = 3,68$ при $\delta = 0,975$. Из формулы (11.19) следует, что для подтверждения заданного уровня интенсивности отказов даже при безотказной работе всех изделий необходима наработка, приблизительно вдвое превышающая среднюю наработку $T_{\text{ср. н}} = 1/\lambda_{\text{в}}$. Если проанализировать справочные данные о надежности логических элементов и типовых элементов радиоэлектронной аппаратуры, то можно заметить, что многие из этих элементов имеют интенсивности отказов 10^{-7} ч $^{-1}$ и меньше. Так, резисторы, конденсаторы и трансформаторы имеют $\lambda = 10^{-8} \dots 10^{-9}$ ч $^{-1}$, соединения паяные и микросхемы — до $10^{-10} \dots 10^{-11}$ ч $^{-1}$, а сварные электрические соединения — до $10^{-11} \dots 10^{-12}$ ч $^{-1}$. Из формулы (11.19) видно, насколько трудно экспериментально определить эти значения. При $\lambda_{\text{в}} = 10^{-7}$ ч $^{-1}$ необходимо в течение года испытывать 3500 элементов, при $\lambda_{\text{в}} = 10^{-8}$ ч $^{-1}$ — 35 000 элементов, при $\lambda_{\text{в}} = 10^{-11}$ ч $^{-1}$ — десять миллионов элементов в течение 3,5 лет, или один миллион — в течение 35 лет. Если же столь высокие значения интенсивности отказов задаются для сложных изделий, то практически не удастся экспериментально подтвердить расчетные значения. Для серии из 1000 изделий практически предельной величиной λ , о подтверждении которой может идти речь, является 10^{-7} ч $^{-1}$, поскольку и в этом случае даже при безотказной работе для сбора сведений потребуются эксплуатация в течение 3,5 лет, что для многих систем близко к периоду морального старения.

Пример 11.7. Из испытаний контрольно-измерительной аппаратуры получена следующая статистика: за 1000 ч в 20 приборах зарегистрированы 22 отказа. Оценить интенсивность отказов с коэффициентом доверия 0,9, если известно, что закон распределения между соседними отказами одного прибора экспоненциальный.

Решение. Согласно (11.15), точечная оценка $\bar{\lambda} = 22/(2 \cdot 10^4) = 1,1 \cdot 10^{-3}$ ч $^{-1}$. Для вычисления доверительного интервала воспользуемся табл. 2.2а из [3]. Для $\delta_1 = 1 - \gamma' = 95\%$ и $n = 14$ находим $u_{\text{н}} = 29,787$, а для $\gamma' = 5\%$ и $n = 46$ имеем $u_{\text{в}} = 62,83$. Отсюда $\lambda_{\text{в}} = 29,787 / (4 \cdot 10^4) = 0,745 \cdot 10^{-3}$ ч $^{-1}$, $\lambda_{\text{н}} = 62,83 / (4 \cdot 10^4) = 1,57 \cdot 10^{-3}$ ч $^{-1}$.

План $[N, B, T]$. Поскольку именно этот план рассматривался в разделе 11.4 при вычислении доверительных интервалов для вероятности отказа, можно воспользоваться готовыми результатами, учитывая соотношение

$$Q(T) = 1 - \exp(-\lambda T). \quad (11.20)$$

Определяя $Q_{\text{н}}$ и $Q_{\text{в}}$ по формулам (11.2) и (11.4), из (11.20) находим:

$$\lambda_{\text{н}} = -\ln(1 - Q_{\text{н}}) / T; \quad \lambda_{\text{в}} = -\ln(1 - Q_{\text{в}}) / T. \quad (11.21)$$

Из формул (11.2), (11.4) и (11.21) следует, что для вычисления доверительного интервала достаточно знать лишь количество отказов за время T , тогда как для вычисления точечной оценки максимального правдоподобия необходимо знать также суммарную наработку за время испытаний, что существенно усложняет проведение испытаний.

Пример 11.8. Известно, что за первые 10 000 ч наблюдения за 650 генераторами постоянного тока (ГПТ) отказали 15 из них. Считая ГПТ невосстанавливаемыми изделиями, определить доверительные границы для средней наработки до первого отказа с уровнем значимости 0,05.

Решение. При таком количестве отказов можно использовать нормальное приближение для биномиального распределения. Подставляя в (11.13) и (11.14) $m = 15$ и $z_{\delta_1} = 1,96$, находим $Q_{\text{н}} = 0,0135$; $Q_{\text{в}} = 0,0386$ (для сравнения отметим, что при использовании приближения Большевца—Смирнова $Q_{\text{н}} = 0,01295$, $Q_{\text{в}} = 0,0377$). Отсюда $T_{\text{ср. н}} = 1/\lambda_{\text{н}} = -T/\ln(1 - QB) = 10^4/\ln(1/0,9614) = 10^4/0,0392 = 2,55 \cdot 10^5$ ч; $T_{\text{ср. в}} = 1/\lambda_{\text{в}} = 10^4/0,0135 = 7,4 \cdot 10^5$ ч.

План $[N, B, r]$. Уравнения Клоппера—Пирсона имеют вид

$$F_E(a_{\text{н}}, r) = \gamma'; \quad 1 - F_E(a_{\text{в}}, r) = \gamma''; \quad a = N\lambda t_r; \quad F_E(a, r) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad (11.22)$$

где $F_E(a, r)$ — распределение Эрланга с параметром формы r , a — варианта. Уравнения следует решать с помощью таблиц распределения Эрланга [5, табл. VII], определяя квантиль $a_{\text{н}}$ по значениям (γ', r) и квантиль $a_{\text{в}}$ — по значениям $(1 - \gamma'', r)$. Затем находят границы доверительного интервала:

$$\lambda_{\text{н}} = a_{\text{н}}(\gamma', r) / Nt_r; \quad \lambda_{\text{в}} = a_{\text{в}}(1 - \gamma'', r) / Nt_r. \quad (11.23)$$

Удобнее использовать более распространенные таблицы распределения Пуассона $\Pi(m, a)$ [2], [4], [6], где m — варианта, a — параметр распределения, если учесть, что $F_E(a, r) = 1 - \Pi(r - 1, a)$. Для этого надо записать уравнения Клоппера—Пирсона в виде

$$\Pi(r - 1, a_{\text{н}}) = 1 - \gamma'; \quad \Pi(r - 1, a_{\text{в}}) = \gamma'', \quad a = N\lambda t_r.$$

Задавая вероятность $1 - \gamma'$ и варианту $r - 1$, находят сначала соответствующий параметр $a_{\text{н}}$, а затем по формуле (11.23) — нижнюю границу $\lambda_{\text{н}}$. Аналогично находят и $\lambda_{\text{в}}$. Тогда

$$\lambda_{\text{н}} = a_{\text{н}}(1 - \gamma', r - 1) / Nt_r; \quad \lambda_{\text{в}} = a_{\text{в}}(\gamma'', r - 1) / Nt_r. \quad (11.24)$$

В частности, при $r = 1$ имеем

$$\lambda_{\text{н}} = -\ln(1 - \gamma') / Nt_r; \quad \lambda_{\text{в}} = -\ln \gamma'' / Nt_r.$$

При использовании таблиц χ^2 -распределения доверительные границы находят по формулам

$$\lambda_{\text{н}} = u_{\text{н}}(1 - \gamma', 2r) / 2Nt_r; \quad \lambda_{\text{в}} = u_{\text{в}}(\gamma'', 2r) / 2Nt_r,$$

где $u_{\text{н}}(1 - \gamma'', 2r)$ и $u_{\text{в}}(\gamma'', 2r)$ — квантили χ^2 -распределения с $k = 2r$ степенями свободы.

Пример 11.9. При испытаниях 50 экземпляров процессорной платы РПД до первого отказа получена наработка $t_1 = 1300$ ч. Найти доверительный интервал для средней наработки на отказ платы РПД с коэффициентом доверия 0,8. Если относительная длина интервала δ_1 превысит значение 1,6, то продолжить

испытания 50 экземпляров до второго отказа. Если и тогда $\delta_1 > 1,6$, то продолжить испытания до выполнения указанного условия.

Решение. Согласно условиям задачи, план испытаний относится к типу $[N, B, r]$, $N = 50$, $r = 1$. Согласно (11.23), $\lambda_H = 1,62 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_B = 3,54 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}$. Доверительные границы для средней наработки на отказ $T_H = 28\,230 \text{ ч}$, $T_B = 616\,930 \text{ ч}$, относительная длина интервала $\delta_1 = 2(T_B - T_H) / (T_B + T_H) = 1,82$. Продолжение испытаний до второго отказа приводит к суммарной наработке $t_2 = 2400 \text{ ч}$. Отсюда $T_H = 30\,770 \text{ ч}$, $T_B = 226\,400 \text{ ч}$, $\delta_1 = 1,52 < 1,6$. Середина доверительного интервала $\bar{T} = 128\,590 \text{ ч}$.

План $[N, B, r]$. Поскольку суммарная наработка всех изделий до окончания испытаний $S_B(r)$ имеет распределение Эрланга с параметрами (r, λ) , постольку уравнения Клоппера–Пирсона имеют вид (11.22), а границы доверительного интервала

$$\lambda_H = a_H \frac{(1 - \gamma', r - 1)}{S_B(r)}; \quad \lambda_B = a_B \frac{(\gamma'', r - 1)}{S_B(r)}, \quad S_B(r) = \sum_{i=1}^r (N - i + 1) Z_i;$$

$$\lambda_H = u_H \frac{(1 - \gamma', 2r)}{2S_B(r)}; \quad \lambda_B = u_B \frac{(\gamma'', 2r)}{2S_B(r)}.$$

При $\gamma' = \gamma'' = \gamma / 2 = (1 - \delta) / 2$ длина доверительного интервала $\lambda_B - \lambda_H$ минимальна среди других значений, когда $\gamma' \neq \gamma''$.

11.6. Постановка задачи контроля надежности

В процессе производства изделия подвергаются различным видам контроля, предусмотренным программой обеспечения качества и надежности. Так, входному контролю подлежат многие комплектующие изделия. На промежуточных этапах технологического цикла контролируется качество функциональных узлов и блоков. Наиболее полная комплексная проверка качества изделий осуществляется при выходном контроле производства [16]. Каждое изделие проверяется на соответствие техническим условиям (ТУ), испытывается на работоспособность в граничных режимах (проводятся температурные испытания, испытания на вибрацию, при повышенном и пониженном давлении и др.). При массовом производстве, когда нет возможности тщательно проверить каждое изделие, проводится выборочный контроль качества (дефектности), при котором по малой партии (выборке) делают заключение о качестве большой партии (генеральной совокупности) и принимают решение о ее приемке или браковке. Выборочный контроль в некоторых специальных режимах может проводиться и при малосерийном производстве.

Перечисленные виды контроля имеют целью установить уровень качества. Изделия, благополучно прошедшие все виды контроля качества, объявляются кондиционными. Однако этого недостаточно для успешной работы изделий на местах эксплуатации. Необходимо установить, насколько устойчиво качество изделий во времени. С этой целью и проводятся контрольные испытания надежности.

Они осуществляются по окончании всех других видов контроля и предназначены для того, чтобы определить, удовлетворяет ли данная партия изделий заданным требованиям к надежности.

Конечным результатом контроля, как правило, является одно из двух решений: считать партию хорошей, то есть удовлетворяющей требованиям к надежности, или забраковать ее как ненадежную. Важная особенность контроля надежности заключается в том, что решение о приемке и браковке принимается по отношению не к отдельным изделиям, как при выходном контроле качества, а к целой партии, однородной в смысле начального уровня качества (все изделия в партии кондиционные), причем не только к той партии, которая испытывается, но ко всем партиям большего объема. В этом его отличие от статистического контроля дефектности, где, строго говоря, решение распространяется на вполне определенную партию большего объема.

Как и в случае определительных испытаний, для проведения контрольных испытаний необходимо составить план, называемый планом контроля [14]. Он представляет собой совокупность условий испытания и правил принятия решения о приемке или браковке. Состав исходной информации для расчета параметров плана контроля определяется критерием надежности. В зависимости от выбора контролируемой характеристики надежности все планы контроля делятся на две группы: планы контроля вероятности отказа и планы контроля параметров закона распределения. Далее для определенности будем рассматривать планы первого типа, хотя почти все рассуждения справедливы и для планов второго типа.

При контроле вероятности отказа требования к надежности задаются с помощью двух чисел Q_0 и Q_1 , имеющих следующий смысл: партия считается кондиционной («надежной»), если вероятность отказа $Q \leq Q_0$, и некондиционной («ненадежной»), если $Q \geq Q_1$. При контроле надежности выносится решение о кондиционности или некондиционности партии (в первом случае она принимается, во втором — бракуется). Следует обратить внимание на то, что при проведении определительных испытаний и при теоретических расчетах требования к надежности часто задаются с помощью одного числа Q_a , и изделие считается надежным, если верхняя оценка $Q_v < Q_a$, и ненадежным в противоположном случае. При контроле надежности принципиально нельзя ограничиться заданием только одного числа, так как в этом случае не удастся обеспечить равные условия по уровням рисков принять неверное решение для обеих заинтересованных сторон, участвующих в контроле надежности. Промежуточная зона (Q_0, Q_1), называемая расстоянием между основной и конкурирующей гипотезами, вводится для хорошего различения двух основных уровней (кондиция и брак), и чем она шире, тем проще принять статистическое решение. Контрольные испытания заканчиваются принятием одной из следующих конкурирующих гипотез: H_0 — партия кондиционная ($0 < Q \leq Q_0$), H_1 — партия некондиционная ($Q_1 \leq Q < 1$). Поскольку статистическое решение принимается на основе неполной информации, существует конечная вероятность совершить ошибку первого (хорошая партия бракуется) или второго (плохая партия принимается) рода.

Вероятность ошибки первого рода называется риском поставщика и представляет собой вероятность того, что будет принята гипотеза H_1 , хотя на самом деле верна гипотеза H_0 (вероятность отказа $Q \leq Q_0$). Решение о верности гипотезы H_0 или H_1 принимается на основе критерия u . Если значение критерия, полученного на основании выборки, попадает в область S_0 , то принимается гипотеза H_0 . Если же это значение попадает в критическую область S_1 , то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1 . Поэтому ошибку первого рода (риск изготовителя, поставщика) рассчитывают как условную вероятность

$$\tilde{\alpha} = P(u \in S_1 | 0 < Q \leq Q_0). \quad (11.25)$$

Вероятность ошибки второго рода называется риском заказчика и представляет собой вероятность того, что будет принята гипотеза H_0 , хотя вероятность отказа $Q \geq Q_1$. При использовании критерия u ошибку второго рода рассчитывают как условную вероятность того, что значение критерия окажется в области S_0 при условии, что на самом деле верна гипотеза H_1 :

$$\tilde{\beta} = P(u \in S_0 | Q_1 \leq Q < 1). \quad (11.26)$$

Исследование зависимостей $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ от Q показывает, что они достигают максимума на границе указанного в (11.25) и (11.26) диапазона и планирование контрольных испытаний ведется в расчете на максимальные значения риска потребителя и заказчика:

$$\alpha = \max_{(Q)} \tilde{\alpha}(Q) = P(u \in S_1 | Q = Q_0); \quad (11.27)$$

$$\beta = \max_{(Q)} \tilde{\beta}(Q) = P(u \in S_0 | Q = Q_1). \quad (11.28)$$

Значения Q_0 , Q_1 , α и β являются исходной информацией для расчета параметров плана контроля. В процессе планирования находят объем контролируемой партии и приемочные нормативы. Приемочными нормативами называются некоторые постоянные числа, которые являются границами области S_0 или S_1 и при сравнении которых с числом отказавших изделий m принимается одна из конкурирующих гипотез. Правила принятия решения определяются методом контроля.

В настоящее время используются три основных метода статистического контроля надежности: однократной выборки, двукратной выборки и последовательного контроля.

При однократной выборке существует один приемочный норматив c . Если при испытании партии из N изделий отказали m из них, то решение принимается согласно правилу: $m \leq c$ — партия кондиционная (верна гипотеза H_0); $m > c$ — партия некондиционная (верна гипотеза H_1).

Контроль по однократной выборке легче спланировать и осуществить. Однако он наименее экономичен и требует сравнительно большого объема испытаний, особенно для партий с высокой надежностью.

При двукратной выборке существует два этапа. На первом этапе по результатам испытаний n_1 изделий с помощью двух приемочных нормативов c_1 и c_2

выносятся одно из трех решений: $m_1 \leq c_1$ — принять партию (верна гипотеза H_0); $m_1 \geq c_2$ — забраковать партию (верна гипотеза H_1); $c_1 < m_1 < c_2$ — произвести вторую выборку.

В последнем случае испытывается еще N_2 изделий, определяется число отказавших изделий m_2 и выносится решение: $m_2 \leq c_3$ — принять партию (верна гипотеза H_0); $m_2 > c_3$ — забраковать партию (верна гипотеза H_1).

Метод двукратной выборки более экономичен. Но это его главное преимущество проявляется лишь при контроле больших партий с очень высокой или очень низкой надежностью. При промежуточном уровне надежности выигрыша в объеме испытаний почти нет. Расчеты же, связанные с таким контролем, сложнее, чем при однократной выборке. Кроме того, увеличивается время контроля. Поэтому метод двукратной выборки применяется сравнительно редко.

При последовательном контроле приемочные нормативы рассчитываются не в виде отдельных чисел, а в виде двух функций, $c_1 = c_1(N)$ и $c_2 = c_2(N)$. Для каждого конкретного N определяется число отказавших изделий $m(N)$ и сравнивается с граничными значениями c_1 и c_2 . По результатам сравнения выносится решение: $m(N) \leq c_1(N)$ — принять партию (верна гипотеза H_0); $m(N) \geq c_2(N)$ — забраковать партию (верна гипотеза H_1); $c_1(N) < m(N) < c_2(N)$ — продолжить испытания.

Объем контролируемой партии N изменяется от некоторого минимума до такого значения, когда будет принята одна из гипотез: H_0 или H_1 . Таким образом, объем контролируемой партии и, как следствие, время контроля случайны. Этот метод является самым экономичным. Техническое его осуществление не связано с особыми трудностями. Недостатком метода является возможное, хотя и маловероятное увеличение времени контроля. Однако рациональной организацией испытаний такое увеличение можно свести к минимуму.

Далее рассмотрим методику расчета планов контроля при однократной выборке и при последовательном контроле.

11.7. Контроль надежности по однократной выборке

Пусть необходимо проконтролировать надежность некоторой партии изделий. Требования к надежности каждого изделия заданы в следующем виде: изделие надежно, если вероятность его отказа Q в течение заданного времени t не превышает $Q_0(t)$, и ненадежно, если $Q(t) \geq Q_1(t)$. В процессе контроля требуется принять статистическое решение о том, являются изделия данной партии надежными или нет, и на этом основании принять или забраковать всю партию, обеспечив риск поставщика не более α , а риск заказчика не более β . Так как закон распределения наработки изделия $Q(t)$ неизвестен, то, как и в случае определительных испытаний (см. 11.4), выбираем план $[N, B, t]$, где длительность испытаний T совпадает со временем t работы изделия в нормальной эксплуатации. Для проведения испытаний и принятия решения кроме Q_0 и Q_1 необходимо знать еще четыре

числа: риски α и β , объем партии N и приемочный норматив c . Если два из них задать, то два других можно определить по уравнениям (11.27) и (11.28).

Если задаются N и c , а определить нужно риски α и β , то получаем прямую задачу планирования контроля. Если же задаются α и β , а определяются N и c , то получаем обратную задачу планирования.

Найдем теперь явный вид уравнений (11.27) и (11.28). Поскольку число отказов изделий m за время испытаний t распределено по биномиальному закону, мы вместо (11.27) и (11.28) можем записать:

$$\alpha = P(m > c | Q = Q_0) = \sum_{i=c+1}^N C_N^i Q_0^i (1-Q_0)^{N-i} = 1 - \sum_{i=0}^c C_N^i Q_0^i (1-Q_0)^{N-i}; \quad (11.29)$$

$$\beta = P(m \leq c | Q = Q_1) = \sum_{i=0}^c C_N^i Q_1^i (1-Q_1)^{N-i}. \quad (11.30)$$

В частности, при $c = 0$ имеем:

$$\alpha = 1 - (1 - Q_0(t))^N; \quad \beta = (1 - Q_1(t))^N. \quad (11.31)$$

При $c > 0$ уравнения (11.29) и (11.30) можно решать с помощью таблиц биномиального распределения. Если же N велико, а Q мало, то можно воспользоваться пуассоновским приближением или приближением Большева—Смирнова для биномиального распределения. При пуассоновском приближении уравнения (11.27) и (11.28) заменяются следующими:

$$\alpha = 1 - \sum_{i=0}^c \frac{a_0^i}{i!} e^{-a_0}, \quad a_0 = NQ_0; \quad (11.32)$$

$$\beta = \sum_{i=0}^c \frac{a_1^i}{i!} e^{-a_1}, \quad a_1 = NQ_1. \quad (11.33)$$

При использовании приближения Большева—Смирнова значения a_0 и a_1 вычисляются по формуле

$$a_i = (2N - c)Q_i / (2 - Q_i), \quad i = 0, 1. \quad (11.34)$$

С помощью уравнений (11.29)–(11.34) легко решить прямую задачу планирования контроля, задавая c и N и определяя α и β . Значительно сложнее решить обратную задачу, так как не удастся получить в аналитическом виде выражение для c , входящего в пределы сумм формул (11.23) и (11.24). Поэтому c подбирают путем расчета достаточно большого числа вариантов. Прямое вычисление возможно лишь тогда, когда удастся воспользоваться нормальным приближением биномиального распределения.

При малом Q , большом N и достаточно большом NQ справедлива формула Муавра—Лапласа, с помощью которой уравнения (11.29) и (11.30) записываются в следующем виде:

$$\alpha = 1 - \Phi \left(\frac{c + 0,5 - NQ_0}{\sqrt{NQ_0(1-Q_0)}} \right); \quad \beta = \Phi \left(\frac{c + 0,5 - NQ_1}{\sqrt{NQ_1(1-Q_1)}} \right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, определяемая по формуле (11.12).

Определяя квантили нормального распределения по уровням $1 - \alpha$ и β и используя свойство $u_\beta = -u_{1-\beta}$, получаем два уравнения:

$$u_{1-\alpha} = (c + 0,5 - NQ_0) / \sqrt{NQ_0(1-Q_0)}; \quad u_{1-\beta} = (c + 0,5 - NQ_1) / \sqrt{NQ_1(1-Q_1)}.$$

Пренебрегая здесь под корнем величиной Q_i по сравнению с единицей, имеем:

$$\sqrt{a_0}u_{1-\alpha} = c + 0,5 - a_0; \quad \sqrt{a_1}u_{1-\beta} = c + 0,5 - a_1, \quad a_i = NQ_i, \quad i = 0, 1. \quad (11.35)$$

Складывая эти уравнения и обозначая $\eta = Q_1 / Q_0$, находим:

$$\sqrt{a_0}(u_{1-\alpha} + \sqrt{\eta}u_{1-\beta}) = a_0(\eta - 1),$$

откуда

$$\sqrt{a_0} = (u_{1-\alpha} + \sqrt{\eta}u_{1-\beta}) / (\eta - 1). \quad (11.36)$$

По известным α , β и η находим сначала N по формуле (11.36), а затем c по формуле (11.35).

Пример 11.10. Определить объем однократной выборки и риск заказчика в плане контроля надежности по вероятности с приемочным нормативом $c = 0$ и риском изготовителя $\alpha = 0,15$ если известно, что $Q_0 = 0,01$, а $Q_1 = 0,1$.

Решение. Используя пуассоновское приближение, из формулы (11.32) получаем $a_0 = -\ln(1 - \alpha) = 0,162$. Отсюда $N = a_0/Q_0 \approx 16$. Теперь по формуле (11.34) находим $\beta = 2,202$. Уточнение рисков по формулам (11.31) дает $\alpha = 1 - 0,99^6 = 1 - 10^{-0,0704} = 0,1496$; $\beta = 0,9^{16} = 10^{-0,7328} = 0,185$.

Пример 11.11. Определить объем однократной выборки и приемочный норматив в плане контроля надежности партии изделий с риском изготовителя и заказчика, не превышающим 10%, если известно, что вероятность отказа изделий из кондиционной партии за время $t = 200$ ч не должна превышать 0,01 и что партия признается некондиционной, если эта вероятность превышает 0,05.

Решение. Используя таблицу квантилей пуассоновского распределения (табл. 7 в [4]), находим, что квантили для уровней вероятностей 0,9 и 0,1 различаются в 23 раза при $c = 0$, в 7,3 раза при $c = 1$ и в 4,85 раза при $c = 2$. Поскольку здесь $\eta = Q_1/Q_0 = 5$, выбираем $c = 2$. Тогда $a_0 = 1,102$, $a_1 = 5,322$, откуда получаем $N = 110$; $\beta = 0,09 < 0,1$.

Пример 11.12. Контролю надежности методом однократной выборки подлежит большая партия изделий с граничными значениями вероятности отказа за время $t = 500$ ч: $Q_0 = 0,05$, $Q_1 = 0,1$. Необходимо выбрать объем партии и приемочный норматив так, чтобы обеспечить риск изготовителя и риск заказчика $\alpha = \beta = 0,05$.

Решение. Используя нормальное приближение биномиального распределения, из формулы (11.25) при $1 - \alpha = 1 - \beta = 0,95$, $u_{0,95} = 1,645$, $\eta = 5$ находим $a_0 = 15,8$. Отсюда $N = a_0/Q_0 = 316$. Теперь по формуле (11.35) определяем $c = 1,645 \cdot 3,97 + 15,8 - 0,5 \approx 22$. Так как $a_0 = NQ_0$ получилось довольно большим, применение

нормального приближения правомерно и найденные параметры планов контроля имеют приемлемую погрешность.

При решении обратной задачи, когда приходится выбирать N и c перебором ряда вариантов, полезно иметь в виду следующее. С увеличением объема партии N и неизменном c увеличивается риск изготовителя α , но зато снижается риск потребителя β . При увеличении же c и неизменном N , напротив, увеличивается β , но уменьшается α . При одновременном пропорциональном росте N и c риск потребителя всегда снижается, причем весьма быстро, а риск изготовителя α может даже сначала возрасти, но затем, начиная с некоторых значений N и c , также уменьшается, хотя и медленнее, чем β . Об этом можно судить по данным табл. 11.2.

В некоторых планах контроля по ряду причин, не связанных с расчетами, не удается обеспечить приемлемые для обеих сторон риски. Например, такая ситуация возникает, когда объем партии ограничен и не допускается повышенный риск заказчика или, напротив, когда в целях сокращения времени контроля требуется принять $c = 0$ и одновременно не превысить заданное значение риска изготовителя. Тогда контроль планируется в интересах только одной стороны (изготовителя или потребителя), и рассчитываются два норматива: c_0 — приемочное число, c_1 — браковочное число. При контроле в интересах изготовителя используется число c_0 и решение принимается согласно следующему правилу: $m \leq c_0$ — партия кондиционная, $m > c_0$ — партия некондиционная.

Таблица 11.2. Риски изготовителя и заказчика при изменении объема партии и приемочного норматива

N	c	NQ_0	NQ_1	α	β
15	1	0,75	1,50	0,173	0,550
30	2	1,50	3,00	0,191	0,423
75	5	3,75	7,50	0,168	0,241
150	10	7,50	15,0	0,138	0,118
300	20	15,0	30,0	0,083	0,035

При контроле в интересах потребителя решение принимается с помощью c_1 согласно правилу: $m \geq c_1$ — партия некондиционная (брак), $m < c_1$ — партия кондиционная. При $c_0 = c_1 - 1$ оба правила объединяются в одно, сформулированное ранее. В общем же случае может быть $c_0 = c_1$ и даже $c_0 > c_1$.

Пример 11.13. На заводе изготовлена партия из 100 устройств индикации данных. Необходимо провести контроль надежности этих устройств в интересах изготовителя и в интересах потребителя, полагая, что вероятность отказа кондиционных изделий в течение 1000 ч не должна превышать 0,01, а некондиционными являются те изделия, вероятность отказа которых за то же время превышает 0,03. Риск изготовителя и риск потребителя не должны превышать 5%.

Решение. Поскольку число контролируемых изделий довольно велико, а Q_0 и Q_1 малы, пользуемся пуассоновским приближением. Выбираем сначала N и c так,

чтобы $\alpha = 0,05$, а $N < 100$. По табл. VII, приведенной в [5], находим, что $\alpha \leq 0,05$ обеспечивается при $(N, c) = (5; 0), (36; 1), (86; 2)$ и $(136; 3)$. Выбираем $N = 82$, $c = 2$. По формуле (11.24) вычисляем, что $\beta = 0,583 \gg 0,05$, то есть при заданных ограничениях не удастся удовлетворить одновременно требования изготовителя и потребителя. Поэтому составим два плана. При контроле в интересах изготовителя примем $N = 82$ и $c_0 = c = 2$. Выясним, можно ли при таком объеме партии обеспечить $\beta \leq 0,05$. Полагая $c_1 = 1$, вычислим $\beta = \exp(-0,03 \cdot 82) = \exp(-2,46) = 0,085 > 0,05$, то есть даже при безотказной работе всех 82 устройств риск потребителя больше заданного. Увеличим число контролируемых изделий до максимально возможного $N = 100$. Тогда при $c_1 = 1$ риск $\beta = \exp(-3) = 0,0498 < 0,05$. Принимаем $c_1 = 1$. Однако при $N = 100$ и $c_0 = 2$ риск $\alpha = 0,0803$. Поэтому увеличим c_0 на единицу и найдем при $c_0 = 3$, что $\alpha = 0,019$. Итак, выбираем $N = 100$, $c_0 = 3$, $c_1 = 1$. При этом риск $\alpha = 0,019$, риск $\beta = 0,0498$.

11.8. Последовательный контроль надежности

Последовательный контроль не предусматривает предварительного определения объема испытаний [15]. Информация о надежности накапливается при последовательно возрастающем объеме испытаний. В зависимости от плана испытаний объем V выражается числом контролируемых изделий N , временем испытаний T , суммарной наработкой t_c и т. д. При планировании контроля на каждом из последовательных этапов составляется так называемое отношение правдоподобия

$$\gamma_m = P(\xi = m | G_1) / P(\xi = m | G_0),$$

где m — число отказов к моменту проверки; G_0 и G_1 — граничные значения контролируемого показателя надежности для кондиционных и некондиционных изделий соответственно (это могут быть Q_0 и Q_1 , λ_0 и λ_1 , T_{cp0} и T_{cp1} и др.). Число γ_m сравнивается с оценочными нормативами: $A = \alpha / (1 - \alpha)$, $B = (1 - \beta) / \alpha$, где α и β — риски поставщика и заказчика соответственно. Число A есть отношение вероятностей принять плохую и хорошую аппаратуру; B — отношение вероятностей забраковать плохую и хорошую аппаратуру.

На каждом этапе контроля решение может быть вынесено на основании первичного правила: $\gamma_m \leq A$ — партия принимается; $\gamma_m \geq B$ — партия бракуется; $A < \gamma_m < B$ — испытания продолжаются.

Вместо величин γ_m , A и B можно использовать их логарифмы, и тогда первичные правила приобретают следующий вид: $\ln \gamma_m \leq \ln A$ — партия принимается; $\ln \gamma_m \geq \ln B$ — партия бракуется; $\ln A < \ln \gamma_m < \ln B$ — испытания продолжаются.

Однако это правило не всегда удобно, так как требует для принятия решения не только логической операции сравнения, но и некоторых вычислений. Поэтому из первичного правила выводится вторичное, основанное на сравнении на каждом этапе числа отказавших изделий m с приемочными нормативами c_0 и c_1 , являющимися функциями объема испытаний V . Эти функции $c_0(V)$ и $c_1(V)$ определяют

границы между зонами приемки, продолжения испытаний и браковки и находятся из уравнений

$$\ln \gamma_{c_0} = \ln A; \quad \ln \gamma_{c_1} = \ln B. \quad (11.37)$$

Рассмотрим теперь отдельно методику планирования последовательного контроля вероятности отказа и интенсивности отказов.

Контроль вероятности отказа по биномиальному плану. Поскольку вид функции распределения наработки до отказа неизвестен, будем, как и при однократной выборке, использовать план $[N, B, t]$. Тогда число отказов m имеет биномиальное распределение, и отношение правдоподобия равно

$$\gamma_m = \frac{C_N^m Q_1^m (1-Q_1)^{N-m}}{C_N^m Q_0^m (1-Q_0)^{N-m}} = \left(\frac{Q_1}{Q_0} \right)^m \left(\frac{1-Q_1}{1-Q_0} \right)^{N-m}. \quad (11.38)$$

Подставляя (11.38) в (11.37), находим:

$$c_0 \ln \frac{Q_1}{Q_0} + (N - c_0) \ln \frac{1-Q_1}{1-Q_0} = \ln A; \quad c_1 \ln \frac{Q_1}{Q_0} + (N - c_1) \ln \frac{1-Q_1}{1-Q_0} = \ln B.$$

Отсюда

$$c_0(N) = h_0 + sN, \quad h_0 = \ln A / D, \quad s = \ln \frac{1-Q_0}{1-Q_1} / D; \quad (11.39)$$

$$c_1(N) = h_1 + sN, \quad h_1 = \ln B / D, \quad D = \ln \frac{Q_1}{Q_0} + \ln \frac{1-Q_0}{1-Q_1}. \quad (11.40)$$

Нетрудно убедиться, что число h_0 всегда отрицательно, а h_1 и s — положительны. Функции (11.39) и (11.40) являются уравнениями двух параллельных прямых линий, пересекающих координатные оси в точках $(h_0, -h_0/s)$ и $(h_1, -h_1/s)$. Нанося эти прямые на графики, получаем графическую форму плана контроля. Прямые линии разбивают первый квадрант на три зоны: приемки, продолжения испытаний и браковки (рис. 11.6, а). В процессе испытаний строится реализация случайного процесса $m(N)$ и выясняется ее принадлежность одной из зон. Испытания заканчиваются тогда, когда $m(N)$ достигнет одной из границ промежуточной зоны 2 или пересечет ее.

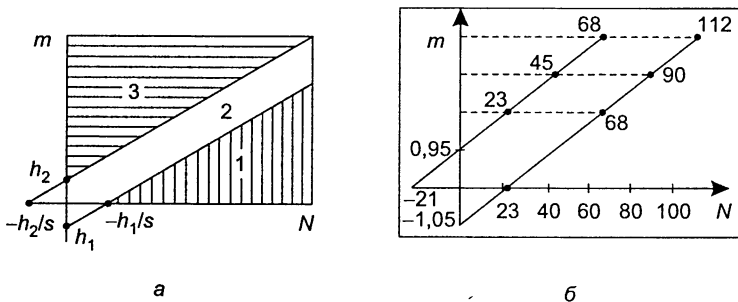


Рис. 11.6. Графическая форма плана последовательного контроля

Кроме графической, существует еще табличная форма плана контроля. В плоскости (m, N) образуются сечения, параллельные оси абсцисс и проходящие через точки $m = 0, 1, 2, \dots$, и вычисляются те значения N , при которых пересекаются границы зон. В таблицу заносятся значения m и соответствующие им граничные значения объема испытаний N_{0m} и N_{1m} , определяемые согласно (11.28) и (11.29) по формулам

$$N_{0m} = (m - h_0) / s; \quad N_{1m} = (m - h_1) / s, \quad N_{0m} > N_{1m}. \tag{11.41}$$

Область $N \geq N_{0m}$ является областью приемки, $N \leq N_{1m}$ — областью браковки, а $N_{1m} < N < N_{0m}$ — областью продолжения испытаний.

Пример 11.14. Построить план последовательного контроля вероятности безотказной работы невосстанавливаемых изделий, в котором хорошей считается партия с вероятностью $P(t) \geq 0,99$, а плохой — партия с $P(t) \leq 0,88$. Риск поставщика $\alpha = 0,08$, риск заказчика $\beta = 0,06$. План представить в графической и табличной формах до $m = 10$ и принять решение для $(m; N) = (1; 46), (4; 60), (5; 100)$.

Решение. Сначала находим $\ln A = \ln(0,06/0,92) = -2,73$; $\ln B = \ln(0,94/0,08) = 2,464$; $\ln(Q_1/Q_0) = 2,485$; $\ln[(1 - Q_0)/(1 - Q_1)] = 0,1177$; $h_0 = -1,049$, $h_1 = 0,947$, $s = 0,0452$. Отсюда точки пересечения координатных осей $-h_1/s = -21$; $-h_0/s = 23,2$, по ним строятся границы зон (рис. 11.6, б). Результаты расчетов по формуле (11.41) приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3. Табличная форма представления плана последовательного контроля вероятности отказа

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_{1m}	23	45	68	90	112	134	156	178	200	222	244
N_{0m}	—	1	23	45	68	90	112	134	156	178	200

На основании составленного плана выносим решение: при $(m; N) = (1; 46)$ принять партию, при $(4; 60)$ забраковать партию, при $(5; 100)$ продолжить испытания.

Контроль интенсивности отказов по суммарной наработке. Пусть контролю подвергается партия изделий с экспоненциальным распределением наработки одного изделия между отказами $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. Партия считается хорошей, если $\lambda \leq \lambda_0$, и плохой, если $\lambda \geq \lambda_1$.

В 11.5 было показано, что в планах типов В и Б количество отказов всех изделий контролируемой партии до получения суммарной наработки t_c распределено по закону Пуассона. Поэтому отношение правдоподобия приобретает вид

$$\gamma_m = \frac{(\lambda_1 t)^m e^{-\lambda_1 t_c} / m!}{(\lambda_0 t)^m e^{-\lambda_0 t_c} / m!} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^m e^{-(\lambda_1 - \lambda_0) t_c}. \tag{11.42}$$

Подставляя (11.42) в (11.37), находим:

$$c_0 \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1) t_c = \ln A; \quad c_1 = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1) t_c = \ln B.$$

Отсюда

$$c_0(t_c) = \ln A / \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_1 - \lambda_0) t_c / \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}; \quad (11.43)$$

$$c_1(t_c) = \ln B / \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_1 - \lambda_0) t_c / \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (11.44)$$

Как и раньше, партия принимается при $m \leq c_0$, бракуется при $m \geq c_1$ и испытания продолжаются при $c_0 < m < c_1$. Вместо этого правила иногда удобнее пользоваться другим правилом, в котором участвуют граничные значения суммарной наработки t_{c0} и t_{c1} , соответствующие точкам пересечения прямых (11.43) и (11.44) с горизонтальными прямыми $m = 0, 1, 2, \dots$. Принимая в (11.43) и (11.44) $c_0 = m$ и $c_1 = m$, получаем:

$$t_{c0} = -\ln A / (\lambda_1 - \lambda_0) + m \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} / (\lambda_1 - \lambda_0);$$

$$t_{c1} = -\ln B / (\lambda_1 - \lambda_0) + m \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} / (\lambda_1 - \lambda_0).$$

Партия принимается, если $t_c \geq t_{c1}$, бракуется, если $t_c \leq t_{c1}$, и испытания продолжаются, если $t_{c1} < t_c < t_{c0}$.

Пример 11.15. В опытной эксплуатации находятся 100 непрерывно и одновременно работающих восстанавливаемых устройств. Необходимо построить план последовательного контроля их надежности, обеспечивая риск поставщика не более 10%, риск заказчика не более 3% и полагая, что устройства восстанавливаются практически мгновенно, а закон распределения наработки одного устройства экспоненциальный. Хорошими считаются устройства со средней наработкой $T_{cp} \geq 400$ ч, плохими — устройства со средней наработкой $T_{cp} \leq 200$ ч. План представить в табличной форме до $m = 10$.

Решение. По исходным данным находим: $\lambda_0 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$, $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$, $\ln A = 3,4$, $\ln B = 4,57$, $\ln(\lambda_1 / \lambda_0) = 0,693$. Поскольку восстановление мгновенное, вместо суммарной наработки t_c можно контролировать время $t = t_c/100$. Тогда $t_0^* = t_{c0}/100 = 13,6 + 2,772m$; $t_1^* = t_{c1}/100 = -9,09 + 2,772m$. Результаты расчетов t_i^* приведены в табл. 11.4.

Таблица 11.4. Табличная форма представления плана последовательного контроля средней наработки до отказа

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_0^*	13,6	16,4	19,14	21,92	24,69	27,46	30,23	33,00	35,78	38,55	41,22
t_1^*	—	—	—	—	2,00	4,77	7,54	10,32	13,09	15,86	18,63

Экономичность планов оценивают по среднему числу испытываемых изделий. Для метода однократной выборки объем партии — неслучайная величина, определяемая по формуле $N_0 = a_0/Q_0$, где a_0 — параметр распределения Пуас-

сона, вычисленный по уровню вероятности $1 - \alpha$ при значении варианты $m = c$. Для последовательного контроля средний объем партии вычисляется по формуле, заимствованной из [6, с. 135] и приводимой здесь без доказательства:

$$N_{\text{ср}} = \frac{(1 - \alpha) \ln A + \alpha \ln B}{Q_0 \ln \frac{Q_1}{Q_0} + (1 - Q_0) \ln \frac{1 - Q_0}{1 - Q_1}}.$$

Расчеты по этой формуле показывают, что последовательный контроль дает в среднем экономию от 30 до 50% по сравнению с контролем по однократной выборке. Причем отношение $N_{\text{ср}}/N_0$ уменьшается при сближении границ Q_0 и Q_1 и при уменьшении риска поставщика и заказчика. Так, при $\alpha = \beta = 0,1$ и $\eta = Q_1 / Q_0 = 2,5$ отношение $N_{\text{ср}}/N_0 = 0,64$, при $\alpha = \beta = 0,05$ и том же η оно уменьшается до 0,59, а при $\alpha = \beta = 0,1$ и $\eta = 1,25$ — до 0,56.

Выигрыш в среднем вовсе не означает, что выигрыш будет при каждом испытании, так как количество испытываемых изделий до принятия решения о приемке или браковке не ограничено сверху. Поэтому выигрыш в среднем иногда обращается в большой проигрыш в некоторых испытаниях. Чтобы устранить этот недостаток, применяют усеченный последовательный контроль.

Усеченный последовательный контроль заключается в том, что одновременно составляются два плана: план последовательного контроля и план контроля по однократной выборке. В первом плане определяются параметры прямых линий, являющихся границами зон, во втором плане — объем партии N_0 и приемочный норматив c . Если представить оба плана графически, то образуется ограниченная со всех сторон зона продолжения испытаний с двумя границами: с зоной приемки и зоной браковки (рис. 11.7, а).

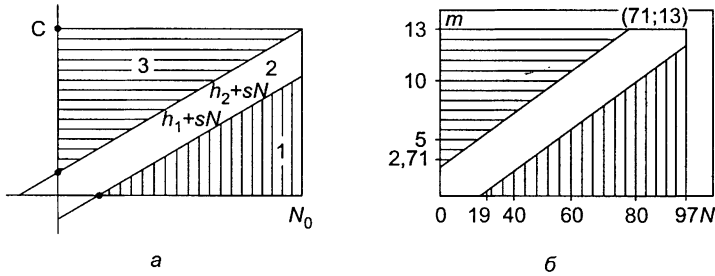


Рис. 11.7. Графическая форма плана усеченного последовательного контроля

Согласно процедуре усеченного последовательного контроля, испытания проходят в соответствии с обычным планом последовательного контроля до тех пор, пока $N < N_0$. Если ко времени достижения значения N_0 испытания еще не закончены, тогда в силу вступает решающее правило контроля по однократной выборке и партия принимается или бракуется в зависимости от соотношения m и c . Таким образом, объем испытаний становится случайной величиной с известной верхней границей $N_{\text{max}} = N_0$.

Следует отметить, что риск поставщика и риск заказчика в усеченном контроле отличаются от вероятностей α и β , по которым параметры плана рассчитываются отдельно при последовательном контроле и при контроле по однократной выборке. Однако при изложенном способе усечения такое отличие невелико и им можно пренебречь.

Пример 11.16. Построить план усеченного последовательного контроля вероятности отказа невосстанавливаемых изделий при $\alpha = \beta = 0,1$; $Q_0 = 0,1$, $Q_1 = 0,2$ и представить его графически.

Решение. По исходным данным определяем: $\ln B = -\ln A = \ln 9 = 2,1972$; $\eta = Q_1 / Q_0 = 2$; $\ln \eta = 0,693$; $\ln[(1 - Q_0)/(1 - Q_1)] = 0,1177$; $h_1 = -h_0 = 2,71$; $s = 0,1447$. Кроме того, по формуле (11.25) находим $\sqrt{a_0} = 1,29 \cdot 2,414 = 3,12$, откуда $N_0 = 97$. Теперь по формуле (11.35) определяем $c = 13$. Результаты расчетов представлены на рис. 11.7, б.

Список литературы

1. *Pearson E. S., Clopper C. J.* The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial // *Biometrika*. — 1934. — № 26. — Р. 404.
2. *Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И.* Таблицы для анализа и контроля надежности. — М. Сов. радио, 1968. — 284 с.
3. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М. Наука, 1965. — 464 с.
4. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. — М. Наука, 1965. — 524 с.
5. *Справочник по вероятностным расчетам / Г. Г. Абезгауз, А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин, И. А. Коровина.* — М. Воениздат, 1970. — 528 с.
6. *Шор Я. Б.* Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. — М.: Сов. радио, 1962. — 564 с.
7. *ГОСТ 16504–79.* Качество продукции. Контроль и испытания. Основные термины и определения. — М.: Изд-во стандартов, 1979. — 22 с.
8. *ГОСТ 17510–79.* Надежность изделий машиностроения. Система сбора и обработки информации. Планирование наблюдений. — М.: Изд-во стандартов, 1979. — 23 с.
9. *ГОСТ 17509–72.* Надежность изделий машиностроения. Система сбора и обработки информации. Методы определения точечных оценок показателей надежности по результатам наблюдений. — М.: Изд-во стандартов, 1972. — 52 с.
10. *ГОСТ 18049–72.* Надежность в технике. Испытания ограниченной продолжительности с заменой отказавших изделий. — М.: Изд-во стандартов, 1972. — 13 с.

11. ГОСТ 18333–73. Надежность в технике. Испытания ограниченной продолжительности без замены отказавших изделий. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 10 с.
12. ГОСТ 17572–72. Надежность в технике. Испытания с ограниченным числом отказов. — М.: Изд-во стандартов, 1974. — 15 с.
13. ГОСТ 27.504–84. Надежность в технике. Методы оценки показателей надежности по цензурированным выборкам. — М.: Изд-во стандартов, 1984. — 41 с.
14. ГОСТ 27.410–87. Надежность в технике. Методы контроля показателей и планы контрольных испытаний на надежность. — М.: Изд-во стандартов, 1988. — 109 с.
15. ГОСТ 17331–71. Надежность в технике. Метод последовательных испытаний. — М.: Изд-во стандартов, 1971. — 27 с.
16. ГОСТ 20736–75. Качество продукции. Статистический приемочный контроль по количественному признаку при нормальном распределении контролируемого параметра. — М.: Изд-во стандартов, 1975. — 91 с.
17. ГОСТ 11.005–74. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров экспоненциального распределения и распределения Пуассона. — М.: Изд-во стандартов, 1974. — 29 с.
18. ГОСТ 11.004–74. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров нормального распределения. — М.: Изд-во стандартов, 1974. — 20 с.
19. ГОСТ 27.411–81. Надежность в технике. Одноступенчатые планы контроля по альтернативному признаку при распределении времени безотказной работы по закону Вейбулла. — М.: Изд-во стандартов, 1981. — 20 с.
20. ГОСТ 11.009–79. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров логарифмически нормального распределения. — М.: Изд-во стандартов, 1979. — 52 с.
21. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. — М.: Госстатиздат, 1958. — 342 с.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит назначение испытаний на надежность? Приведите пример планов испытаний.
2. В чем заключаются задачи определительных испытаний?
3. Перечислите свойства точечных оценок показателей надежности.
4. Перечислите точечные оценки средней наработки на отказ и их характеристики.

5. В чем заключается принцип Клоппера—Пирсона интервального оценивания показателей надежности?
6. В чем состоит постановка задачи контрольных испытаний на надежность? Прямая и обратная задачи.
7. Как выбирается объем испытаний по рискам заказчика и изготовителя при однократной выборке?
8. Каковы табличная и графическая формы плана последовательного контроля надежности?
9. Каковы табличная и графическая формы плана усеченного последовательного контроля надежности?

Математическое приложение

П1. Преобразование Лапласа—Карсона и Лапласа—Стилтьеса

Преобразование Лапласа—Карсона функции $F(t)$ осуществляется с помощью интеграла

$$F_K^*(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

а преобразование Лапласа—Стилтьеса — с помощью интеграла

$$F_{CT}^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t). \quad (\text{П1.1})$$

Интегрированием по частям в формуле (П1.1) можно убедиться, что при $F(0) = 0$ оба преобразования дают один и тот же результат:

$$F_K^*(s) = F_{CT}^*(s) = F^*(s).$$

В теории вероятностей и теории надежности таким свойством обладают функции распределения непрерывных случайных величин. Поэтому для них без особых оговорок можно пользоваться любым из указанных преобразований. По этой же причине далее приводятся формулы только для преобразования Лапласа — Карсона.

Основные функциональные соотношения:

$$F(t+a) \div e^{as} \left(F^*(s) - s \int_0^a e^{-st} F(t) dt \right), \quad a > 0;$$

$$F(at-b) \div e^{-bs/a} F^*(s/a), \quad F(x) = 0, \quad x > 0;$$

$$e^{-at} F(t) \div \frac{s}{s+a} F^*(s+a);$$

$$\frac{d^n F(t)}{dt^n} \div s^n \left(F^*(s) - \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(0) / s^k \right);$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t F(t) dt \div F^*(s) / s; \\
& \int_0^t (t - \tau)^{n-1} F(\tau) d\tau \div \frac{(n-1)!}{s^n} F^*(s); \\
& e^{bt} F(at) \div \frac{s}{s-b} F^*((s-b)/a); \\
& \int_0^t F_2(t - \tau) F_1(\tau) d\tau \div \frac{1}{s} F_1^*(s) F_2^*(s). \quad (\text{П1.2})
\end{aligned}$$

Знак « $\div$ » означает операционное соответствие оригинала во временной области и изображения в комплексной частотной области. Он заменяет интеграл, отражающий интегральное преобразование Лапласа.

Формулы преобразования некоторых функций:

$$\begin{aligned}
& C \div C; \\
& t^n / n! \div 1/s^n; \\
& t^\nu \div \Gamma(\nu + 1) / s^\nu; \\
& e^{-at} \div s/(s+a); \\
& \frac{t^n}{n!} e^{-at} \div \frac{s}{(s+a)^{n+1}}; \\
& t^\nu e^{-at} \div \Gamma(\nu + 1) s/(s+a)^{\nu+1}, \quad \text{Re } \nu > -1; \\
& I_\nu(\nu, at) = \int_0^t \frac{a^\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-ax} dx \div \left(\frac{a}{s+a} \right)^\nu, \quad \text{Re } \nu > -1; \\
& \frac{1}{(s+a)(s+b)} \div \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a} \right); \\
& \sin at \div as/(s^2 + a^2), \quad \cos at \div s^2/(s^2 + a^2); \\
& I_\nu(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \div \frac{sa^\nu}{\sqrt{s^2 - a^2} (s + \sqrt{s^2 - a^2})^\nu}, \quad \text{Re } \nu > -1; \\
& I_\nu(at)/t \div sa^\nu / \nu (s + \sqrt{s^2 - a^2})^\nu.
\end{aligned}$$

П2. Вычисление вычетов

Вычет в простом полюсе s_k вычисляется по формуле

$$\text{Resf}(s_k) = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) f(s), \quad (\text{П2.1})$$

а вычет в полюсе s_k m -го порядка — по формуле

$$\operatorname{Res} f(s_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} ((s - s_k)^m f(s)). \quad (\text{П2.2})$$

Формулы (П2.1) и (П2.2) можно использовать для обратного операционного преобразования. Если $F^*(s)$ — дробно-рациональная функция s , имеющая корни знаменателя $s_1, s_2, \dots, s_k$ кратности $m_1, m_2, \dots, m_k$ соответственно и не равная нулю при $s = 0$, то оригинал этой функции находится по формуле

$$F(t) = \sum_{i=0}^k \operatorname{Res} f(s_k) = \sum_{i=0}^k \operatorname{Res} \left(\frac{1}{s_i} F^*(s_i) e^{-s_i t} \right). \quad (\text{П2.3})$$

Как видно из (П2.3), функция $f(s)$ в круглых скобках имеет нулевой корень $s_0 = 0$, так как $F^*(0) \neq 0$. Если же $F^*(0) = 0$, то такой корень отсутствует.

ПЗ. Тауберовы теоремы

Теорема ПЗ.1. Для любого операционного соответствия $F(t) \div F^*(s)$ имеем:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^\nu F^*(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) \Gamma(\nu + 1)}{t^\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1,$$

то есть из существования предела при $s \rightarrow \infty$ в области изображений следует существование предела при $t \rightarrow +0$ в области оригиналов, причем эти пределы равны.

Теорема ПЗ.2 (для действительной области). Для операционного соответствия $F(t) \div F^*(s)$ ($\operatorname{Re} s > 0$) достаточным условием справедливости соотношения

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^\nu F^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\nu + 2) \int_0^t F(x) dx / t^{\nu+1}, \quad \nu > -1, \quad (\text{ПЗ.1})$$

является существование положительной постоянной K , при которой

$$Kt^\nu + F(t) > 0, \quad t > 0.$$

В (ПЗ.1) $s \rightarrow +0$ только вдоль действительной оси. Если функция $F(t)$ оказывается монотонной для $t > 0$, то допустимо преобразование правой части (ПЗ.1) по правилу Лопиталя, и тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\nu + 2) \int_0^t F(x) dx / t^{\nu+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\nu + 1) F(t) / t^\nu.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема ПЗ.3. Для операционного соответствия $F(t) \div F^*(s)$ ($\operatorname{Re} s > 0$) достаточным условием справедливости соотношения

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^\nu F^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\nu + 1) F(t) / t^\nu, \quad \nu > -1$$

является условие монотонности $F(t)$ при $t > 0$.

Теорема ПЗ.4 (для комплексной области). Для того чтобы вместе с операционным соответствием $F(t) \div F^*(s)$ было справедливо соотношение

$$\lim_{s \rightarrow +0} F^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t),$$

достаточно, чтобы одновременно: 1) произведение $e^t F(t)$ было положительным и неубывающим при $t \geq 0$; 2) существовала постоянная A — такая, чтобы при $\operatorname{Re} s \rightarrow +0$ разность $(F(s) - A)/s$ равномерно стремилась к некоторой ограниченной функции $g(\operatorname{Im} s)$ на любом конечном интервале $-a < \operatorname{Im} s < a$.

П4. Вывод формул для потоков случайных событий

П4.1. Вывод формул для простейшего потока

Пусть известно, что поток событий является стационарным ординарным потоком без последствия. Найдем явные выражения для распределений $P\{N(t) = n\}$, $P\{T_n < t\}$, ведущей функции потока $H(t)$ и интенсивности потока событий $\omega(t)$, где $N(t)$ — число событий в интервале $(0, t)$, T_n — время до n -го события. Вывод излагается по работе А. Я. Хинчина [3.6].

Рассмотрим промежуток времени длительностью 1 и обозначим через $p = P_0(1)$ вероятность того, что за этот срок не произойдет ни одного события. Разбивая промежуток на n равных частей, по формуле умножения вероятностей найдем:

$$P_0(1) = P_0\left(0, \frac{1}{n}\right) P_0\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} | 0\right) P_0\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} | 0, 0\right) \dots P_0\left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n} | 0, \dots, 0\right), \quad (\text{П4.1})$$

где $P_0(\tau, t | 0, \dots, 0)$ — вероятность отсутствия событий в интервале $(\tau, \tau + t)$ при условии, что до этого интервала событий не было. В силу отсутствия последствия вместо (П4.1) можно записать:

$$P_0(1) = P_0\left(0, \frac{1}{n}\right) P_0\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) P_0\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \dots P_0\left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}\right). \quad (\text{П4.2})$$

Если же учесть еще и стационарность, то исчезает зависимость вероятностей в (П4.2) от первого аргумента, и тогда

$$P_0(1) = (P_0(1/n))^n.$$

Отсюда

$$P_0\left(\frac{1}{n}\right) = p^{1/n}.$$

Повторяя практически без изменений приведенные рассуждения для отрезка k/n , получим:

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = p^{k/n}.$$

Пусть теперь t — любое число из единичного отрезка времени. Подбирая k так, чтобы

$$(k-1)/n < t < k/n, \quad (\text{П4.3})$$

и учитывая, что $P_0(t)$ — невозрастающая функция времени, имеем:

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) = p^{(k-1)/n} > t > P_0\left(\frac{k}{n}\right) = p^{k/n}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$ так, чтобы условие (П4.3) по-прежнему выполнялось, получим:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \frac{k-1}{n} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \frac{k}{n} = t, \quad P_0(t) = p^t.$$

Полагая теперь $p = \exp(-\lambda)$, имеем:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (\text{П4.4})$$

Отсюда следует, что при стационарном потоке без последствия время до первого события имеет экспоненциальное распределение. Так как справедливо выражение

$$P_0(t) + P_1(t) + \pi_2(t) = 1,$$

то

$$P_1(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \pi_2(t). \quad (\text{П4.5})$$

Используя теперь свойство ординарности потока событий и разлагая экспоненту в ряд, при достаточно малом t имеем:

$$P_1(t) = \lambda t + o(t).$$

Рассмотрим теперь вероятность того, что в промежутке длительностью $t + \Delta t$ произойдет n событий ($n \geq 1$). В силу стационарности вероятность не зависит от начала отсчета t . В указанном промежутке n событий могут произойти следующими несовместными способами: n событий наступает за время t и 0 событий — за время Δt ; $n-1$ событие наступает за время t и одно событие — за время Δt , и т. д.; 0 событий за время t и n событий — за время Δt . Используя свойства стационарности и отсутствия последствия и суммируя вероятности несовместных событий, получаем:

$$P_n(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i}(t) P_i(\Delta t) = P_n(t) P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t) P_1(\Delta t) + \sum_{i=2}^n P_{n-i}(t) P_i(\Delta t).$$

Поскольку

$$\sum_{i=2}^n P_{n-i}(t) P_i(\Delta t) \leq \sum_{i=2}^n P_i(\Delta t) \leq \pi_2(\Delta t),$$

мы в силу ординарности $\pi_2(\Delta t) = o(\Delta t)$ и с учетом (П4.4) и (П4.5) находим:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) + P_{n-1}(t)(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t).$$

Отсюда

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1. \quad (\text{П4.6})$$

Присоединяя сюда уравнение

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \quad (\text{П4.7})$$

решением которого является функция (П4.4), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений. Решим ее при начальных условиях: $P_0(0) = 1$, $P_n(0) = 0$, $n > 0$. Подстановка в (П4.6) и (П4.7) выражения

$$P_n(t) = v_n(t)e^{-\lambda t} \quad (\text{П4.8})$$

дает $v'_0(t) = 0$, $v'_n(t) = \lambda v_{n-1}(t)$, $v_0(0) = 1$, $v_n(0) = 0$, $n \geq 1$. Непосредственным интегрированием в этих уравнениях получим:

$$v_n(t) = (\lambda t)^n / n! \quad (\text{П4.9})$$

Из (П4.8) и (П4.9) находим окончательно:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \geq 0. \quad (\text{П4.10})$$

Таким образом, число событий за заданное время имеет распределение Пуассона. Наличие трех указанных свойств достаточно для справедливости формулы (П4.10). Можно доказать и необходимость этих свойств. Для этого надо проверить выполнение трех свойств, считая, что формула (П4.10) верна.

П4.2. Вывод формул нестационарного пуассоновского потока

Пусть известно, что поток событий ординарный без последействия. Получим уравнения для вероятностей $P_n(\tau, t)$ того, что в промежутке $(\tau, \tau + t)$ произойдет ровно n событий. Обозначим

$$\pi_1(\tau, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\tau, t) = 1 - P_0(\tau, t); \quad (\text{П4.11})$$

$$\pi_2(\tau, t) = \sum_{i=2}^{\infty} P_i(\tau, t) = 1 - P_0(\tau, t) - P_1(\tau, t).$$

По свойству ординарности при любом t

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_2(t, \Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Мгновенный параметр и интенсивность потока событий

$$v(t) = \omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_1(t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (\text{П4.12})$$

Используя свойство отсутствия последействия, для вероятности отсутствия событий в промежутке $(\tau, \tau + t + \Delta t)$ получим:

$$P_0(\tau, t + \Delta t) = P_0(\tau, t)P_0(\tau + t, \Delta t).$$

Из (П4.11) и (П4.12) следует:

$$P_0(\tau + t, \Delta t) = 1 - \pi_1(\tau + t, \Delta t) = 1 - \omega(\tau + t)\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial P_0(\tau, t)}{\partial t} = -\omega(\tau + t)P_0(\tau, t), \quad (\text{П4.13})$$

Повторяя в точности рассуждения, используемые при выводе уравнений (П4.6), для вероятностей $P_n(\tau, t)$ при $n \geq 1$ находим:

$$\begin{aligned} P_n(\tau, t + \Delta t) &= P_n(\tau, t)P_0(\tau + t, \Delta t) + P_{n-1}(\tau, t)P_1(\tau + t, \Delta t) + \sum_{i=2}^n P_{n-i}(\tau, t)P_i(\Delta t) = \\ &= P_n(\tau, t)(1 - \omega(\tau + t)\Delta t) + P_{n-1}(\tau, t)\omega(\tau + t)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\partial P_n(\tau, t) / \partial t = -\omega(\tau + t)(P_n(\tau, t) - P_{n-1}(\tau, t)), \quad n \geq 1. \quad (\text{П4.14})$$

Начальные условия для уравнений (П4.13) и (П4.14) следующие:

$$P_0(\tau, 0) = 1; \quad P_n(\tau, 0) = 0, \quad n \geq 1. \quad (\text{П4.15})$$

Решим систему уравнений (П2.20)–(П4.15) методом производящих функций. Примем

$$\Phi_n(\tau, t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau, t)x^n. \quad (\text{П4.16})$$

Умножая (П4.14) на x_n и суммируя по всем n , получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial P_n(\tau, t)}{\partial t} x^n = \omega(\tau + t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n P_{n-1}(\tau, t) - \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\tau, t) \right).$$

Меняя здесь порядок суммирования и дифференцирования, находим:

$$\frac{\partial \Phi(\tau, t, x)}{\partial t} = \omega(\tau + t)(x - 1)\Phi(\tau, t, x) \quad (\text{П4.17})$$

или $\partial / \partial t \ln \Phi(\tau, t, x) = \omega(\tau + t)(x - 1)$. Отсюда

$$\ln \Phi(\tau, t, x) - \ln \Phi(\tau, 0, x) = (x - 1) \int_{\tau}^{\tau+t} \omega(z) dz.$$

Начальные условия для (П4.17) следующие: $\Phi(\tau, 0, x) = P_0(\tau, 0) = 1$. Поэтому

$$\ln \Phi(\tau, t, x) = (x-1) \int_{\tau}^{\tau+t} \omega(z) dz = (x-1)(H(\tau+t) - H(\tau)).$$

Окончательно получаем:

$$\Phi(\tau, t, x) = \exp(-(H(\tau+t) - H(\tau))) \exp(x(H(\tau+t) - H(\tau))).$$

Разлагая второй сомножитель в ряд по степеням x и сравнивая его с рядом (П4.16), получим окончательно:

$$P_n(\tau, t) = \frac{(H(\tau+t) - H(\tau))^n}{n!} \exp(-H(\tau+t) + H(\tau)), \quad n \geq 0.$$

П4.3. Теоремы об асимптотическом поведении функции интенсивности и ведущей функции рекуррентного потока

Теорема П4.1. Для рекуррентного потока событий выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{1}{T} = \omega, \quad (\text{П4.18})$$

где $H(t)$ и $\omega(t)$ — решение уравнений (3.32) и (3.3347); T — средний интервал между событиями.

Доказательство. Представим изображение $F^*(s)$ функции распределения $F(t)$ в виде разложения в ряд по степеням s :

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-st)^i}{i!} dF(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-s)^i}{i!} \alpha_i, \quad \alpha_i = \int_0^{\infty} t^i dF(t). \quad (\text{П4.19})$$

Подставим (П4.19) в знаменатель выражения (3.31):

$$H^*(s) = F^*(s) / (sT(1 - s\alpha_2 / 2T + o(s))). \quad (\text{П4.20})$$

Согласно тауберовой теореме, предельному переходу при $t \rightarrow \infty$ в формуле (П4.18) соответствует переход в области изображений при $s \rightarrow 0$. Из (П4.20) следует:

$$\omega^*(s) = sH^*(s) = \frac{1}{T} + s \left(\frac{\alpha_2}{2T^2} - 1 \right) + o(s)$$

Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \omega^*(s) = \frac{1}{T}.$$

Вторая часть равенства (П4.18) доказана. Первая часть равенства доказывается путем раскрытия неопределенности по Лопиталя — дифференцированием по t в числителе и знаменателе дроби. Из (П4.18) следует, что при достаточно боль-

ших t для расчета среднего числа событий можно использовать приближенное выражение

$$H(t) \approx \frac{t}{T} = \omega t. \quad (\text{П4.21})$$

Теорема П4.2 (Блекуэлла). Для любого рекуррентного потока событий справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (H(\tau + t) - H(\tau)) = t / T. \quad (\text{П4.22})$$

Доказательство. По теореме упреждения операционного исчисления

$$H(\tau + t) \div e^{st} \left(H^*(s) - s \int_0^t e^{-sx} H(x) dx \right).$$

При малых s с учетом (П4.21) имеем:

$$H(\tau + t) - H(\tau) \div (e^{st} - 1)H^*(s) - se^{st} \int_0^t e^{-sx} H(x) dx = \frac{st}{T} + O(s).$$

Отсюда непосредственно следует (П4.22).

Теорема П4.3 (Смита). Для любой монотонно не возрастающей и интегрируемой на $(0, \infty)$ функции $Q(t)$ и любого рекуррентного потока событий

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-x) dH(x) = \frac{1}{T} \int_0^\infty Q(x) dx.$$

Доказательство. Согласно тауберовой теореме и теореме о свертке функций (П1.2),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-x) dH(x) &= \lim_{s \rightarrow 0} Q^*(s) H^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q^*(s)}{s} \left(\frac{1}{T} + O(s) \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sT} s \int_0^\infty Q(x) e^{-sx} dx (1 + O(s)) = \frac{1}{T} \int_0^\infty Q(x) dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

П4.4. Вывод формул обобщенного пуассоновского потока

Пусть известно, что вероятность

$$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda), \quad (\text{П4.23})$$

где $\Phi(\lambda)$ — функция распределения случайного параметра стационарного пуассоновского потока событий. Найдем выражение для вероятностей $P_n(t)$ через функцию $P_0(t)$. Используя правило дифференцирования интеграла по параметру, преобразуем (П4.23) к виду

$$P_n(t) = \frac{t^n}{n!} \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda) = \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda) = \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} P_0(t). \quad (\text{П4.24})$$

Начальные моменты распределения числа событий потока в интервале $(0, t)$

$$\begin{aligned} MN^k(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^k P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda) = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \right) d\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} MN^k(t, \lambda) d\Phi(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что начальные моменты ОПП можно получить путем осреднения по плотности (рандомизации) соответствующих начальных моментов СПП. Отсюда, в частности, находим среднее значение и дисперсию числа событий:

$$H(t) = MN(t) = t \int_0^{\infty} \lambda d\Phi(\lambda); \quad DN(t) = \int_0^{\infty} (\lambda t + \lambda^2 t^2) d\Phi(\lambda) - H^2(t). \quad (\text{П4.25})$$

Из (П4.25) следует, что параметр потока событий

$$\omega = \frac{dH(t)}{dt} = \int_0^{\infty} \lambda d\Phi(\lambda) = M\Lambda = \bar{\lambda} \quad (\text{П4.26})$$

есть величина постоянная, что свидетельствует о стационарности потока. Сравнивая (П4.26) и (П4.23), видим, что параметр потока связан с функцией $P_0(t)$ соотношением

$$\omega = -P'_0(0).$$

Введем нулевую функцию Пальма—Хинчина:

$$\varphi_0(t) = -\frac{1}{\omega} P'_0(t) = P'_0(t)/P'_0(0). \quad (\text{П4.27})$$

Интегрируя здесь справа и слева по интервалу $(0, \infty)$, находим:

$$\omega = 1 / \int_0^{\infty} \varphi_0(t) dt.$$

Подставляя (П4.27) в (П4.24), получим выражение вероятностей $P_n(t)$ через функцию Пальма—Хинчина:

$$P_n(t) = \frac{\omega t^n}{n!} (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \varphi_0(t). \quad (\text{П4.28})$$

Из формул (П4.23), (П4.24) и (П4.28) следует, что существует три эквивалентных способа задания ОПП: через функции $\Phi(\lambda)$, $P_0(t)$ или $\varphi_0(t)$. Во многих случаях второй и третий способы оказываются более предпочтительными, так как функции $P_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ легче измерить.

Заметим, что обобщенный поток является ординарным по построению, так он получается путем рандомизации ординарного стационарного пуассоновского потока, а рандомизация не может изменить свойство ординарности. Что касается последействия, то ОПП имеет сложное последействие, то есть он не может быть отнесен ни к потокам без последействия, ни к потокам с ограниченным после-

действием. Покажем это. Введем для потока типа Пальма, который является потоком с ограниченным последствием, нулевую функцию Пальма—Хинчина в соответствии с (П4.27). Используя (3.38), найдем:

$$\varphi_0(t) = -P'_0(t)/\omega = 1 - F(t).$$

Вероятность наступления ровно одного события за время t

$$P_1(t) = \int_0^t (1 - F(t-x)) dF_1(x) = \omega \int_0^t \varphi_0(t-x) \varphi_0(x) dx. \quad (\text{П4.29})$$

Для обобщенного пуассоновского потока, согласно (П4.28),

$$P_1(t) = \omega t \varphi_0(t). \quad (\text{П4.30})$$

Приравнявая вероятности из (П4.29) и (П4.30), получим интегральное уравнение, решение которого определяет те функции $\varphi_0(t)$, когда ОПП будет иметь ограниченное последствие:

$$\int_0^t \varphi_0(t-x) \varphi_0(x) dx = t \varphi_0(t).$$

Единственное решение этого уравнения $\varphi_0(t) = \exp(-\lambda t)$. Это значит, что простейший поток является частным случаем и потока типа Пальма, и обобщенного пуассоновского потока. В этом случае ОПП является потоком без последствия. Во всех остальных случаях он имеет сложное последствие.

П5. Модифицированный логико-вероятностный метод. Основные теоремы

Логико-вероятностный метод, изложенный в главе 6 и применяемый для анализа надежности двухполюсных сложных структур, содержит три этапа: запись логической функции работоспособности (ЛФРС), преобразование логической функции к форме перехода к полному замещению (ФППЗ) и полное замещение всех логических переменных вероятностями и логических операций — арифметическими операциями. Модифицированный логико-вероятностный метод содержит еще один промежуточный этап — частичное замещение логических переменных вероятностями [6.3]. Поэтому вместо ФППЗ логическая функция преобразуется к форме перехода к частичному замещению (ФПЧЗ), а в результате частичного замещения появляется так называемая смешанная форма функции вероятностей, содержащая одновременно и вероятности, и логические переменные, арифметические и логические операции. После некоторых преобразований в СФФВ выполняется постепённое (многошаговое) замещение остальных логических переменных с целью перехода к искомой развернутой форме функции вероятностей (РФФВ). Запись СФФВ по заданной функции алгебры логики (ФАЛ) проводится на основании следующих теорем.

Теорема П5.1. Пусть:

1. задана функция алгебры логики вида

$$f(X) = \left(\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j \in K_i} x_j \right)^{\sigma_i} f_i(X_i) \right) \left(\bigwedge_{j \in K_0} x_j \right)^{\sigma_0} f_0(X_0), \quad (\text{П5.1})$$

где $\vee$ и $\wedge$ — логические операции дизъюнкции и конъюнкции; X и X_i — векторные аргументы логических функций f и f_i соответственно; σ_i — постоянные коэффициенты, равные нулю или единице: $x^\sigma = \bar{x}$ при $\sigma_i = 0$ и $x^\sigma = x$ при $\sigma_i = 1$; x_j — неповторные логические переменные, $j \in K = \bigcup_{i=0}^n K_i$; f_i — функции алгебры логики произвольного вида;

2. события $x_j = \sigma_j$ независимы в совокупности, причем вероятности $P(x_j = 1) = p_j$.

Тогда $f(X)$ есть форма перехода к частичному замещению, и ей соответствует СФФВ

$$P_f = P(f(X) = 1) = P(f_0, f_1, \dots, f_n) = (1 - a_0^{f_0}) \left(1 - \prod_{i=1}^n a_i^{f_i} \right), \quad (\text{П5.2})$$

где

$$a_i = \prod_{j \in K_i} p_j, \quad \sigma_i = 0; \quad a_i = 1 - \prod_{j \in K_i} p_j, \quad \sigma_i = 1, \quad i = 0 \dots n;$$

$$a_i^{f_i} = a_i, \quad f_i = 1; \quad a_i^{f_i} = 1, \quad f_i = 0.$$

Доказательство теоремы можно найти в [7.2, с. 206–207].

Пример П1. Пусть $f(X) = x_4(x_{41}f_1 \vee x_{42}f_2 \vee x_{43}f_3)$, где $x_4, x_{41}, x_{42}, x_{43}$ — неповторные переменные. Надо найти вероятность $P(f(X) = 1)$.

Решение. Согласно (П5.2), неповторные логические переменные заменяем вероятностями $p_i = P(x_i = 1)$, а логические операции конъюнкции и отрицания — арифметическим операциями умножения и вычитания. Поскольку здесь $\sigma_i = 1$, то $a_i = q_i = 1 - p_i$, а поэтому

$$P(f = 1) = p_4(1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}). \quad (\text{П5.3})$$

Дальнейшая развертка (П5.3) к РФФВ проводится путем разрезания по незамещенным логическим переменным в соответствии с теоремой разложения.

Теорема П5.2. (первая теорема разложения). Пусть задана некоторая СФФВ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящая от логических переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, и пусть события $A_i = (x_i = \sigma_i)$ независимы в совокупности. Тогда

$$p(x_{s+1}, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, \quad i = 1 \dots s) p(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Утверждение теоремы следует непосредственно из формулы полной вероятности.

Теорема П5.3. Пусть заданы две логические функции:

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i f_i(X_i);$$

$$G_2(x_1, x_2, \dots, x_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i g_i(Y_i).$$

Составим третью функцию:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \overline{G_1} G_2. \quad (\text{П5.4})$$

Тогда:

1) если f_i и g_i ортогональны, то есть $f_i g_i = 0$ для $i = 1..n$, то (П5.4) является формой перехода к частичному замещению и ей соответствует СФФВ

$$P_f = P(f = 1) = \prod_{i=1}^n q_i^{f_i} \left(1 - \prod_{i=1}^n q_i^{g_i} \right);$$

2) если f_i и g_i не ортогональны, то формой перехода к частичному замещению является выражение

$$f = \overline{\bigvee_{i=1}^n x_i f_i(X_i)} \left(\bigvee_{i=1}^n x_i \bar{f}_i g_i(Y_i) \right)$$

и ему соответствует СФФВ

$$P_f = P(f = 1) = \prod_{i=1}^n q_i^{f_i} \left(1 - \prod_{i=1}^n q_i^{\bar{f}_i g_i} \right). \quad (\text{П5.5})$$

Доказательство теоремы можно найти в [7.2, с. 208–209].

Пример П2. Пусть $f(X) = x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 (x_1 x_3 \vee x_2 x_4)$. Найти $P(f(X) = 1)$.

Решение. Здесь $f_1 = x_4$, $f_2 = x_3 \bar{x}_4$, $g_1 = x_3$, $g_2 = x_4$. Функции f_2 и g_2 ортогональны. Поэтому ортогонализация необходима лишь для f_1 и g_1 . Используя (П5.5), получим:

$$P(f = 1) = q_i^{x_4} q_i^{x_3 \bar{x}_4} (1 - q_i^{x_3 \bar{x}_4} q_i^{x_4}).$$

Здесь проведем разрезание сначала по x_4 , а затем по x_3 :

$$P(f = 1) = p_4 q_1 (1 - q_2) + q_4 q_2^{x_3} (1 - q_1^{x_3}) = p_4 q_1 p_2 + q_4 p_3 q_2 p_1.$$

Теорема П5.4. Дизъюнкция и конъюнкция ФАЛ

$$A(X) = \bigvee_{(s)} A_s(X); \quad A(X) = \&_{(s)} A_s(X).$$

где $A_s(X)$ — логические функции вида (П5.1), в которых x_j — неповторные переменные для всех

$$j \in K = \bigcup_{(s,i)} K_{si},$$

— являются формой перехода к частичному замещению, и им соответствуют СФФВ

$$Q_A = P\left(\bigvee_{(s)} A_s = 0\right) = \prod_{(s)} (1 - P(A_s = 1)); \quad P_A = P\left(\&_{(s)} A_s = 1\right) = \prod_{(s)} P(A_s = 1).$$

Вероятности $P(A_s(X) = 1)$ находят по формуле (П5.2). Если в дизъюнкции все слагаемые ортогональны, то достаточна неповторность лишь в пределах одной функции $A_s(X)$.

Данная теорема является обобщением теоремы П5.1. При ее доказательстве используется основной прием — сведение рассматриваемой задачи к схеме независимых

событий путем замещения неповторных переменных и перевода логических функций с повторяющимися переменными в показатели степени вероятностей. В следующих трех теоремах рассматриваются производящие полиномы дискретных распределений, содержащие в качестве коэффициентов смешанные формы функции вероятностей.

Теорема П5.5. (вторая теорема разложения). Пусть

$$\Phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^r p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) z^i$$

— производящий полином некоторого дискретного распределения с коэффициентами, записанными в смешанной форме и зависящими от логических переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1 \dots s) \Phi(z, \sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Данная теорема является одним из следствий теоремы П5.1.

Пример П3. Пусть $p_0(x_1, x_2) = q^{x_1 \vee x_2}$; $p_1(x_1, x_2) = q^{x_1} p^{x_2}$; $p_0(x_1, x_2) = 1 - q^{x_1 x_2}$. Необходимо найти производящий полином распределения.

Решение. Составим формулу

$$\Phi(z, x_1, x_2) = q^{x_1 \vee x_2} + z q^{x_1} p^{x_2} + z^2 (1 - q^{x_1 x_2}). \quad (\text{П5.6})$$

Проведем сначала разрезание по x_1 :

$$\Phi(z, x_2) = p_1(q + z q p^{x_2} + z^2 (1 - q^{x_2})) + q_1(q^{x_2} + z p^{x_2}).$$

В каждом из слагаемых проведем разрезание по x_2 и получим окончательно:

$$\Phi(z) = p_1 p_2 (q + z q p + p z^2) + p_1 q_2 (q + z q p) + q_1 q_2 (1 + z).$$

Теорема П5.6. (третья теорема разложения). Пусть

$$\varphi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) z^i;$$

$$\varphi(z, \sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n) z^i;$$

$$\Phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi^r(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{mr} P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) z^i.$$

Тогда

$$\Phi(z, \sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n) = \varphi^r(z, \sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Доказательство теоремы можно найти в [7.2, с. 211–212].

Пример П4. Пусть полином $\varphi(z, x_1, x_2)$ определен формулой (П5.6), а полином $\Phi(z, x_1, x_2) = \varphi^2(z, x_1, x_2)$. Надо найти $\Phi(z, 1, 1)$.

Решение. Возведение в степень полинома (П5.6) дает

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_1, x_2) &= (1 - q^{x_1 x_2})^2 z^4 + 2 q^{x_1} p^{x_2} (1 - q^{x_1 x_2}) z^3 + \\ &+ (q^{2 x_1} p^{2 x_2} + 2 q^{x_1 \vee x_2} (1 - q^{x_1 x_2})) z^2 + 2 q^{x_1 \vee x_2} q^{x_1} p^{x_2} z + q^{2(x_1 \vee x_2)}. \end{aligned} \quad (\text{П5.7})$$

Непосредственно из (П5.7) имеем:

$$\Phi(z, 1, 1) = p^2 z^4 + 2p^2 qz^3 + (q^2 p^2 + 2pq)z^2 + 2q^2 pz + q^2.$$

С другой стороны, по теореме П5.6 имеем $\Phi(z, 1, 1) = (q + pqz + pz^2)^2$. Нетрудно убедиться, что обе формулы совпадают.

Теорема П5.7. (четвертая теорема разложения). Пусть

$$\Phi(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$\Phi_j(z, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1 \dots s) \Phi_j(z, \sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n);$$

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1 \dots s) \Phi(z, \sigma_1, \dots, \sigma_s, x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n) = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n).$$

Теорема легко доказывается путем изменения порядка суммирования.

Пример П5. Пусть

$$\begin{aligned} \Phi_1(z, x_1, x_2) &= q^{x_1} + zp^{x_1} + z^2(1 - q^{x_2}); \quad \Phi_2(z, x_1, x_2) = q^{x_2} + zp^{x_2} + z^2(1 - q^{x_1}); \\ \Phi(z, x_1, x_2) &= \Phi_1(z, x_1, x_2) + \Phi_2(z, x_1, x_2) = \\ &= (q^{x_1} + q^{x_2}) + z(p^{x_1} + p^{x_2}) + z^2(2 - q^{x_1} - q^{x_2}). \end{aligned} \quad (\text{П5.8})$$

Надо найти $\Phi(z)$.

Решение. Разрезанием по x_1 и x_2 непосредственно из (П5.8) находим:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (2p_1p_2q + q(p_1q_2 + q_1p_2) + 2q_1q_2) + \\ &+ z(2p_1p_2p + (p+1)(p_1q_2 + q_1p_2) + 2q_1q_2) + z^2(2p_1p_2p + p(p_1q_2 + q_1p_2)). \end{aligned}$$

С другой стороны, по теореме П5.7 имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \\ &= (q_1 + p_1q + z(q_1 + p_1q) + z^2p_2p) + (q_2 + p_2q + z(q_2 + p_2q) + z^2p_1p). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что обе формулы дают одинаковый результат.

П6. Методы математической статистики

П6.1. Точечное оценивание параметров распределений

Точечной оценкой $\bar{a}$ параметра a распределения $F(x, a)$ называют скалярную величину, зависящую от выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и удовлетворяющую установленным требованиям.

П6.1.1. Свойства точечных оценок

Состоятельность. Оценка $\bar{a}$ параметра a называется состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) - a| < \varepsilon\} = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (\text{П6.1})$$

С использованием второго неравенства Чебышева

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

практически состоятельность устанавливается по поведению дисперсии оценки $\bar{a}$. Вместо сходимости по вероятности (П6.1) устанавливается сходимость в среднеквадратическом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} M((\bar{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) - a)^2) = 0.$$

Несмещенность. Оценка $\bar{a}$ называется несмещенной, если математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру при любом конечном, в том числе малом, объеме выборки:

$$M(\bar{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = a.$$

Свойство несмещенности позволяет устранить систематическую ошибку в оценке параметра, оставляя только статистическую ошибку. Если оценка смещенная, но величина смещения известна, то следует устранить смещение введением поправочного коэффициента.

Эффективность. Точечная оценка $\bar{a}$ параметра a называется эффективной, если она имеет минимальную дисперсию среди всех возможных точечных оценок. Определение трудно применить непосредственно для установления свойства эффективности, так как оно требует знания всех возможных оценок, вычисления дисперсий всех оценок и выбора одной из них с минимальной дисперсией. Решение задачи о свойстве эффективности существенно упрощается благодаря неравенству Рао — Крамера. Согласно этому неравенству, дисперсия любой точечной оценки не менее априорно вычисляемой величины, называемой дисперсией эффективной оценки:

$$D(\bar{a}) \geq D_0 = \frac{1}{NA(a)}; \quad (\text{П6.2})$$

$$A(a) = M\left\{\left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(X, a)\right)^2\right\} = -M\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln f(X, a)\right\},$$

где N — число испытаний; $f(x, a)$ — функция плотности распределения непрерывной случайной величины X или функция общего члена ряда распределения дискретной случайной величины $f(x, a) = P(X = x, a)$. Согласно неравенству (П6.2), правило установления эффективности сводится к трем действиям:

1. По виду $f(x, a)$ еще до построения конкретного вида точечной оценки параметра находят дисперсию эффективной оценки D_0 .

- По виду функции $\bar{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и распределению $f(x, a)$ находят дисперсию оценки $D(\bar{a})$.
- Если $D(\bar{a}) = D_0$, то оценка эффективная. Если же $D(\bar{a}) > D_0$, то вычисляют коэффициент эффективности $K_3 = D_0 / D(\bar{a})$. В последнем случае, когда не удастся найти эффективную оценку, предпочтение отдают оценке с наибольшим коэффициентом эффективности.

Коэффициент эффективности зависит от объема выборки n . Если $K_3(n) < 1$, но предел $K_3(n)$ при $n \rightarrow \infty$ равен 1, то оценку называют асимптотически эффективной. Если же предел $K_{3\infty} < 1$, то коэффициент $K_{3\infty}$ называют коэффициентом асимптотической эффективности.

П6.1.2. Методы получения точечных оценок

Метод моментов. Метод предложен К. Пирсоном в 1894 г. Основная идея метода состоит в том, что приравнивается определенное количество теоретических и эмпирических начальных и центральных моментов распределения. Количество уравнений должно быть равно количеству оцениваемых параметров:

$$\alpha_k(a_1, a_2, \dots, a_r) = \bar{\alpha}_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \mu_k(a_1, a_2, \dots, a_r) = \bar{\mu}_k, \quad k = 2, 3, \dots; \quad (\text{П6.3})$$

$$\alpha_k = MX^k; \quad \mu_k = M(X^0)^k = M(X - MX)^k;$$

$$\bar{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k; \quad \bar{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Решение системы уравнений (П6.3) относительно неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_r$ дает значение оценок $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r$. Для однопараметрических распределений ($r = 1$) система (П6.3) сводится к одному уравнению

$$\alpha_1(a) = \bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Для двухпараметрических распределений ($r = 2$) составляют два уравнения:

$$\alpha_1(a_1, a_2) = \bar{x}; \quad D_x(a_1, a_2) = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (\text{П6.4})$$

Метод моментов сравнительно прост и предлагает состоятельные оценки. Состоятельность непосредственно следует из сходимости по вероятности эмпирических начальных и центральных моментов к соответствующим теоретическим моментам. Оценки, как правило, являются смещенными. Можно показать [1], что при общих условиях оценки распределены асимптотически нормально со средним значением $M\bar{a}$, отличающимся от a на величину порядка n^{-1} , и дисперсией вида D/n . Смещение нетрудно устранить введением поправки. Однако метод имеет более серьезный недостаток. Получаемая этим методом оценка часто имеет коэффициент асимптотической эффективности значительно меньше единицы [2].

При оценке четырех и более параметров метод моментов не применяется, так как резко возрастает дисперсия оценок. В самом деле, для начального момента k -го порядка дисперсия выборочного момента

$$D\bar{\alpha}_k = M\bar{\alpha}_k^2 - \alpha_k^2 = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k\right)^2 - \alpha_k^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^n x_i^{2k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i^k x_j^k\right) - \alpha_k^2 = \frac{1}{n} (\alpha_{2k} - \alpha_k^2).$$

Аналогично дисперсия выборочных центральных моментов

$$D\bar{\mu}_k = \frac{1}{n} (\mu_{2k} - \mu_k^2).$$

Отсюда, в частности, дисперсии оценок параметров нормального распределения, получаемых решением системы уравнений (П6.4), имеют вид

$$D\bar{\alpha}_1 = D\bar{x} = \frac{1}{n} (\alpha_2 - \alpha_1^2) = \frac{\mu_2}{n} = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$D\bar{\mu}_2 = Ds^2 = \frac{1}{n} (\mu_4 - \mu_2^2) = \frac{1}{n} (3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Дисперсия выборочного момента второго порядка выражается через теоретический момент четвертого порядка.

Метод квантилей. Основная идея метода состоит в том, что для выбранных значений вероятностей $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ приравняются эмпирические и теоретические квантили:

$$x_{p_i}(a_1, a_2, \dots, a_r) = \bar{x}_{p_i}, \quad i = 1 \dots r, \quad (\text{П6.5})$$

где $x_{p_i}(a)$ — решение уравнения $F(x, a) = p_i$. В частности, для нормального распределения система уравнений (П6.5) имеет вид

$$y_{p_1} = \frac{(\bar{x}_{p_1} - m)}{\sigma}; \quad y_{p_2} = \frac{(\bar{x}_{p_2} - m)}{\sigma}, \quad (\text{П6.6})$$

где y_{p_1} и y_{p_2} — квантили стандартного нормального распределения с параметрами $(0; 1)$; $\bar{x}_{p_1}$ и $\bar{x}_{p_2}$ — эмпирические квантили по уровням вероятностей p_1 и p_2 . Решение (П6.6) имеет вид

$$\bar{m} = \frac{\bar{x}_{p_1} y_{p_2} - \bar{x}_{p_2} y_{p_1}}{y_{p_2} - y_{p_1}}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{x}_{p_1} - \bar{x}_{p_2}}{y_{p_2} - y_{p_1}}. \quad (\text{П6.7})$$

Обе оценки (П6.7) несмещенные. В этом легко убедиться, если учесть, что $M\bar{x}_p = xp = m + \sigma y_p$. Чтобы найти дисперсии оценок, надо использовать выражение для дисперсии выборочной квантили

$$D(\bar{x}_p) = \frac{p(1-p)}{nf^2(x_p)}.$$

Отсюда следует, что дисперсия минимальна там, где плотность распределения максимальна. Это можно учесть при выборе значений вероятностей p_i .

Метод максимального правдоподобия. Метод предложен Р. А. Фишером в 1912 г. Основная идея метода состоит в допущении, что наблюдаемая реально выборка является наиболее вероятным исходом статистического эксперимента. Если в полной или усеченной выборках получим выборочные значения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то в качестве оценки неизвестного параметра a надо выбрать такое значение $\bar{a}$, которое обеспечивает максимум плотности вероятности распределения случайного вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{a}) = \max_{(a)} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, a). \quad (\text{П6.8})$$

Если $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ — векторный параметр, то с помощью метода градиентов оценки находят как решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r) = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (\text{П6.9})$$

На практике вместо плотности f_n удобнее пользоваться логарифмом этой функции. Такое допустимо, так как логарифм $\ln f_n$ является возрастающей функцией своего аргумента и поэтому достигает максимума в той же точке $\bar{a}$, что и плотность f_n . Функция $L = \ln f_n$ называется функцией правдоподобия. После перехода от f_n к L условие (П6.8) приобретает вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{a}) = \max_{(a)} L(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$$

Система уравнений (П6.9) заменяется новой системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_i} L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r) = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (\text{П6.10})$$

Оценки максимального правдоподобия (МП-оценки) обладают следующими свойствами:

1. Они состоятельны.
2. Если существует эффективная оценка, то метод дает именно эффективную оценку.
3. Оценка имеет асимптотически нормальное распределение со средним значением a и дисперсией $D(\bar{a}) = 1/A(a)$, где $A(a)$ определяется по формуле (П6.2).
4. Оценка инвариантна относительно преобразования параметра. Это значит, что оценка некоторой функции параметра a совпадает с этой же функцией оценки параметра, то есть $g(a) = g(\bar{a})$.
5. Оценки являются несмещенными или асимптотически несмещенными.

К недостаткам метода максимального правдоподобия следует отнести необходимость знания распределения $f(x, a)$ и сложность уравнений (П6.10).

Для нормального распределения точечные оценки максимального правдоподобия для параметров m и σ по полной выборке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ находят с помощью следующей функции правдоподобия:

$$L = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2. \quad (\text{П6.11})$$

Уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\bar{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \overline{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Характеристики оценок

$$M\bar{m} = m; \quad D\bar{m} = \sigma^2 / n; \quad Ms^2 = n\sigma^2 / (n-1); \quad Ds^2 = 2\sigma^4 / n.$$

Оценка s^2 — смещенная. Для устранения смещения вводим поправку и получаем несмещенную МП-оценку дисперсии:

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{П6.12})$$

П6.1.3. Метод наименьших квадратов

Метод используется для аппроксимации зависимости реализации случайных величин X и Y с помощью некоторой функции $y = \varphi(x)$. Метод является частным случаем метода максимального правдоподобия.

Пусть имеется n выборочных значений двухмерной случайной величины (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$. Полагаем, что истинная зависимость определяется функцией $\varphi(x_i)$, а отклонения от нее суть ошибки измерения, которые подчиняются нормальному закону со средним $\varphi(x)$ и дисперсией $\sigma_i^2 = \sigma^2$. Полагая различные измерения независимыми, найдем многомерную плотность распределения вектора $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в виде

$$f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{\sigma^{2n} (\sqrt{2\pi})^n} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i))^2 \right).$$

Тогда условие (П6.11) приобретает вид

$$L = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i))^2 = \max. \quad (\text{П6.13})$$

Поскольку первые два слагаемых на зависят от вида функции $\varphi(x)$, то условие (П6.13) эквивалентно условию

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i, \bar{a}))^2 = \max_{(a)} \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i, a))^2. \quad (\text{П6.14})$$

Поиск минимума происходит в задаваемом параметрически классе функций $\varphi(x, a)$. Из (П6.14) вытекает и название метода. Уравнения правдоподобия (П6.10) приобретают вид

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_r)) \frac{\partial \varphi(a_1, a_2, \dots, a_r)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (\text{П6.15})$$

При полиномиальной аппроксимации могут, в частности, использоваться линейная и параболическая аппроксимации.

Линейная аппроксимация. Функция $\varphi(x)$ представляет собой прямую линию $\varphi(x) = ax + b$. Подставляя ее в (П6.15), получим два уравнения:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) = 0. \quad (\text{П6.16})$$

Разделив (П6.16) почленно на n и преобразуя, находим оценки максимального правдоподобия для параметров прямой линии:

$$\bar{a} = K_{xy}^* / s_x^2; \quad \bar{b} = \bar{y} - \bar{x}K_{xy}^* / s_x^2;$$

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}; \quad s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Параболическая аппроксимация. Функция $\varphi(x)$ представляет собой квадратичную параболу $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Из (П6.15) получим три уравнения:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))x_i^2 = 0; \quad \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))x_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)) = 0. \quad (\text{П6.17})$$

Система (П6.17) сводится к трем алгебраическим уравнениям относительно параметров a, b и c :

$$\bar{\alpha}_{4x} a + \bar{\alpha}_{3x} b + \bar{\alpha}_{2x} c = \bar{\alpha}_{21}; \quad \bar{\alpha}_{3x} a + \bar{\alpha}_{2x} b + \bar{\alpha}_{1x} c = \bar{\alpha}_{11};$$

$$\bar{\alpha}_{2x} a + \bar{\alpha}_{1x} b + c = \bar{y}; \quad \bar{\alpha}_{kx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k; \quad \bar{\alpha}_{km} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k y_i^m. \quad (\text{П6.18})$$

Систему уравнений (П6.18) решают методом определителей.

Аппроксимация с помощью линейной формы. Функцию $\varphi(x)$ представляют в форме

$$\varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_r) = \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i(x).$$

Тогда система (П6.15) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^r a_j \varphi_j(x_i) \right) \varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 1 \dots r.$$

Отсюда получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^r a_j A_{jk} = B_k, \quad k = 1 \dots r, \quad A_{jk} = \sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i),$$

$$B_k = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_k(x_i). \quad (\text{П6.19})$$

Решение (П6.19) дает оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров $a_j, j = 1...r$. В качестве функций $\varphi_j(x)$ можно использовать гармонические, экспоненциальные функции и пр.

П6.2. Интервальное оценивание параметров распределений

Интервальное оценивание параметров применяют при малых выборках, когда точечные оценки имеют неприемлемо большие дисперсии.

П6.2.1. Постановка задачи

Двусторонним доверительным интервалом для параметра распределения $F(x, a)$ называют интервал со случайными границами $a_{\text{н}}$ и $a_{\text{в}}$, зависящими от выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и обладающими следующим свойством: вероятность накрыть этим интервалом неизвестное, но неслучайное значение параметра a не менее заданной величины δ , называемой доверительной вероятностью или коэффициентом доверия:

$$P\{a_{\text{н}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a \leq a_{\text{в}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \geq \delta.$$

Пусть параметр a имеет область допустимых значений (a_0, a^0) . Вполне возможно, что доверительный интервал не накроет значение параметра a , и тогда $a_0 \leq a < a_{\text{н}}$ или $a_{\text{в}} < a \leq a^0$. Вероятности этих событий

$$\gamma' = P\{a_0 \leq a < a_{\text{н}}\}; \quad \gamma'' = P\{a_{\text{в}} < a \leq a^0\}.$$

Сумму этих вероятностей называют уровнем значимости:

$$\gamma = \gamma' + \gamma'' = 1 - \delta.$$

Односторонним (нижним или верхним) доверительным интервалом называют интервал с одной фиксированной и одной случайной границами — такими, что

$$P\{a_0 \leq a \leq a_{\text{в}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \geq \delta \quad P\{a_{\text{н}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a \leq a^0\} \geq \delta.$$

Уровни значимости в этих случаях таковы:

$$P\{a_{\text{в}} < a \leq a^0\} \leq \gamma = 1 - \delta; \quad P\{a_0 \leq a < a_{\text{н}}\} \leq \gamma = 1 - \delta.$$

П6.2.2. Принцип и уравнения Клоппера—Пирсона

Для определения доверительных границ вводят критериальную функцию или критерий u , зависящий от выборки и оцениваемого параметра. К критерию u предъявляются следующие требования:

1. Должен быть известен вид распределения критерия $F_u(u, a)$.
2. Функция распределения $F_u(u, a)$ не должна иметь других неизвестных параметров, кроме оцениваемого параметра.

Принцип Клоппера — Пирсона состоит в следующем. В семействе функций $F_u(u, a)$, построенных путем вариации параметра a , выбираются две кривые, проходящие через точки (u_0, γ') и $(u_0, 1 - \gamma'')$, где u_0 — значение критерия, полученное по выборке. Одна из этих кривых имеет параметр $a_{\text{н}}$, а другая — параметр $a_{\text{в}}$. В соответствии с этим принципом записывают уравнения Клоппера—Пирсона

$$P\{u \leq u_0\} = \int_{-\infty}^{u_0} dF_u(u) = \gamma'; \quad P\{u \geq u_0\} = \int_{u_0}^{\infty} dF_u(u) = \gamma'' \quad (\text{П6.20})$$

Решение уравнений (П6.20) дает значения доверительных границ.

П6.2.3. Доверительные границы для параметров нормального распределения

При известной дисперсии σ^2 доверительные границы для математического ожидания находят с помощью критерия

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

имеющего нормальное распределение $F(x, m, \sigma)$ с параметрами (0; 1). Уравнения Клоппера—Пирсона

$$P\left\{u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}} < \alpha\right\} = F(\alpha) = \gamma'; \quad P\left\{u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}} > \beta\right\} = 1 - F(\beta) = \gamma''. \quad (\text{П6.21})$$

Заметим, что два уравнения (П6.21) эквивалентны одному уравнению с двойным неравенством:

$$P\left\{\alpha \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \beta\right\} = F(\beta) - F(\alpha) = \delta.$$

Отсюда

$$\frac{\bar{x} - m_{\gamma'}}{\sigma / \sqrt{n}} = z_{\gamma'}; \quad \frac{\bar{x} - m_{1-\gamma''}}{\sigma / \sqrt{n}} = z_{1-\gamma''}, \quad (\text{П6.22})$$

где $z_{\gamma'}$ и $z_{1-\gamma''}$ — квантили нормального распределения с параметрами (0; 1) по уровням вероятностей γ' и $1 - \gamma''$ соответственно. Из (П6.22) находим:

$$m_{\gamma'} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma''}; \quad m_{1-\gamma''} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\gamma'}.$$

Квантиль $z_{\gamma'} < 0$, а $z_{1-\gamma''} > 0$, поэтому $m_{\gamma'} < \bar{x} < m_{1-\gamma''}$.

При неизвестной дисперсии используем критерий

$$u = \frac{\bar{x} - m}{s / \sqrt{n-1}}; \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (\text{П6.23})$$

имеющий распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Уравнения Клоппера — Пирсона имеют вид (П6.21), где критерий u имеет вид (П6.23). Из (П6.21) получим:

$$m_{\gamma'} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{1-\gamma''}; \quad m_{1-\gamma''} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{\gamma'},$$

где $t_{\gamma'}$ и $t_{1-\gamma''}$ — квантили распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы.

Доверительные границы для дисперсии нормального распределения находят с помощью критерия

$$u = ns^2/\sigma^2,$$

имеющего χ^2 -распределение с $k = n - 1$ степенями свободы. Из (П6.21) находим:

$$\sigma_{\text{н}}^2 = ns^2/\chi_{1-\gamma''}^2(n-1); \quad \sigma_{\text{в}}^2 = ns^2/\chi_{\gamma'}^2(n-1),$$

где $\chi_{1-\gamma''}^2(n-1)$ и $\chi_{\gamma'}^2(n-1)$ — квантили χ^2 -распределения по уровням вероятностей $1 - \gamma''$ и γ' соответственно.

П6.3. Проверка параметрических гипотез

П6.3.1. Постановка задачи

Простая основная гипотеза H_0 относительно параметра a распределения $F(x, a)$ формулируется в следующем виде: ($H_0: a = a_0$). Кроме того, формулируется простая конкурирующая (альтернативная) гипотеза H_1 о том, что $a = a_1$. Принятие решения о том, что гипотеза H_0 верна или неверна, проводится с помощью критерия значимости u , численное значение которого определяется по результатам статистического эксперимента. Для формирования решающего правила область допустимых значений критерия разбивают на две части: область S_0 принятия гипотезы H_0 и критическую область S_1 , при попадании в которую значения критерия гипотеза H_0 отвергается. Гипотеза называется двусторонней, если альтернативное значению a_0 значение параметра может быть как больше, так и меньше a_0 . В этом случае критическая область будет двухсвязной, и ее подобласти будут разделены областью S_0 . Гипотеза называется односторонней, если альтернативное значение параметра может быть либо только больше, чем a_0 , либо только меньше этого значения. Тогда критическая область будет односвязной.

Поскольку решение о верности (или неверности) гипотезы принимается по ограниченной выборке, правильность решения не гарантируется и возможны ошибки первого и второго рода. Вероятность ошибки первого рода α есть вероятность отвергнуть верную гипотезу H_0 . Вероятность ошибки второго рода β есть вероятность принять неверную гипотезу H_0 , когда на самом деле верна альтернативная гипотеза. Вероятности α и β являются, по существу, условными вероятностями:

$$\alpha = P\{u \in S_1 | H_0\}; \quad \beta = P\{u \in S_0 | H_1\}. \quad (\text{П6.24})$$

Вероятность

$$\bar{\beta} = P\{u \in S_1 | H_1\} \quad (\text{П6.25})$$

называется мощностью критерия. Она представляет собой условную вероятность того, что правильной будет признана альтернативная гипотеза (отвергнута основная гипотеза) при условии, что она и на самом деле верна. К критерию значимости предъявляются те же требования, что и при построении доверительного интервала.

При планировании статистического эксперимента для проверки гипотезы используют всего 6 параметров: значения a_0 и a_1 , вероятности α и β , граница u_0 областей S_0 и S_1 , объем выборки n . Для них известны два уравнения связи (П6.24), которые позволяют найти любые два параметра, если заданы остальные четыре. Если заданы a_0 , a_1 , n и u_0 , то можно найти α и β (прямая задача). Если заданы a_0 , a_1 , α и β , то можно найти u_0 и n (обратная задача).

П6.3.2. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения

Для нормального распределения $F(x, m, \sigma)$ проверке подлежат всего четыре гипотезы:

- ☐ о равенстве математического ожидания (МО) известному значению;
- ☐ о равенстве двух неизвестных МО;
- ☐ о равенстве дисперсии известному значению;
- ☐ о равенстве двух неизвестных дисперсий.

Проверка гипотезы о равенстве МО известному значению. Основная гипотеза H_0 состоит в том, что $m = m_0$. Заданы объем выборки n и вероятность ошибки первого рода α . При известной дисперсии σ^2 в качестве критерия используем величину

$$u = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

В этом случае уравнения (П6.24) для определения границ двусторонней критической области приобретают вид

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| > z\right\} = \alpha = 1 - 2\Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy,$$

где $\Phi(x)$ — интеграл Лапласа. Отсюда находим квантиль нормального распределения z_{δ_1} по уровню вероятности $\delta_1 = 1 - \alpha/2$. Критическая область состоит из двух частей: $z > z_{\delta_1}$ и $z < -z_{\delta_1}$. Правило принятия решения следующее:

1. если $u \in S_0$, то есть $-z_{\delta_1} \leq u \leq z_{\delta_1}$, то гипотеза H_0 верна;
2. если $u \in S_1$, то есть $u < -z_{\delta_1}$ или $u > z_{\delta_1}$, то гипотеза H_0 неверна.

Чтобы найти мощность критерия, надо ввести конкурирующую (альтернативную) гипотезу H_1 , состоящую в том, что $m = m_1$, $m_1 \neq m_0$. Тогда, согласно (П6.25), мощность критерия

$$\bar{\beta} = P\{|u| > z_{\delta_1} | m = m_1\} = P\{|u' + d| > z_{\delta_1}\}, \quad u' = \frac{\bar{x} - m_1}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad d = u = \frac{m_1 - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

При справедливости H_1 критерий u уже не будет иметь нормального распределения с параметрами $(0; 1)$. Это распределение теперь имеет u' . Величина d , не зависящая от результатов эксперимента, называется расстоянием между гипотезами. Оно тем больше, чем больше $\Delta m = m_1 - m_0$ и объем выборки n .

При $d = 0$ мощность критерия равна ошибке первого рода α , то есть очень мала. При $d \neq 0$ имеем:

$$\bar{\beta}(d) = P\{u' + d > z_{\delta_1}\} + P\{u' + d < -z_{\delta_1}\} = N(-z_{\delta_1} + d) + N(-z_{\delta_1} - d); \quad (\text{П6.26})$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

При $d > 0$ второе слагаемое очень мало, и мощность критерия $\bar{\beta}(d) \approx N(-z_{\delta_1} + d)$. С ростом d мощность критерия асимптотически приближается к единице, что означает состоятельность критерия. При $d < 0$ главным, напротив, будет второе слагаемое.

При выбранной границе критической области регулировать мощность критерия можно только изменением объема выборки n и значения $\Delta m = m_1 - m_0$. При $\Delta m > 0$, пренебрегая в (П6.26) вторым слагаемым, найдем:

$$z_{\bar{\beta}} = -z_{\delta_1} + \frac{m_1 - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad \delta_1 = 1 - \alpha / 2.$$

Отсюда требуемый объем выборки для обеспечения заданных значений ошибок первого и второго рода

$$n = ((z_{\delta_1} + z_{\bar{\beta}})\sigma / (m_1 - m_0))^2.$$

При односторонней критической области

$$\bar{\beta}(d) = P\{u' + d > z_{\bar{\alpha}}\} = N(-z_{\bar{\alpha}} + d); \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha; \quad n = \left(\frac{(z_{\bar{\alpha}} + z_{\bar{\beta}})\sigma}{(m_1 - m_0)} \right)^2.$$

Критическая область для среднего арифметического

$$\bar{x} > m_0 + z_{\bar{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{z_{\bar{\alpha}} m_1 + z_{\bar{\beta}} m_0}{z_{\bar{\alpha}} + z_{\bar{\beta}}}.$$

При $\alpha = \beta$ критическая область $\bar{x} > (m_0 + m_1)/2$.

При неизвестной дисперсии надо использовать критерий

$$u = \frac{\bar{x} - m_0}{s / \sqrt{n-1}}.$$

Проверка гипотезы о равенстве двух неизвестных математических ожиданий. Пусть случайные величины X и Y распределены по нормальному закону с известными дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 . Основная гипотеза состоит в том, что неизвестные математические ожидания равны между собой, то есть $m_x = m_y$. В результате статистических испытаний получены две выборки, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Поскольку разность средних значений $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ имеет нормальное распределение с параметрами $m_z = m_x - m_y$ и $\sigma_z = (\sigma_x^2/n_x + \sigma_y^2/n_y)^{0.5}$, то в качестве критерия естественно выбрать центрированную и нормированную разность

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y} - m_x + m_y}{\sqrt{\sigma_x^2 / n_x + \sigma_y^2 / n_y}}.$$

При справедливости основной гипотезы критерий приобретает вид

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2 / n_x + \sigma_y^2 / n_y}}$$

и не содержит в себе неизвестных величин. Двустороннюю критическую область S_1 находят из уравнения

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_z}\right| > z\right\} = \alpha. \quad (\text{П6.27})$$

Отсюда критическая область S_1 : $u < -z_{\delta_1}$ или $u > z_{\delta_1}$, $\delta_1 = 1 - \alpha/2$. Правила принятия решения таковы:

□ если $-z_{\delta_1} \sigma_z \leq \bar{x} - \bar{y} \leq z_{\delta_1} \sigma_z$, то H_0 верна;

□ если $\bar{x} - \bar{y} < -z_{\delta_1} \sigma_z$ или $\bar{x} - \bar{y} > z_{\delta_1} \sigma_z$, то H_0 неверна.

Односторонняя критическая область имеет вид $u > z_{\alpha}$, если конкурирующая гипотеза H_1 следующая: $m_x > m_y$, и $u < z_{\alpha}$, если H_1 : $m_x < m_y$.

Если дисперсии неизвестны, но одинаковы: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, то используют критерий

$$u = \frac{Z}{V} \sqrt{k}, \quad Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - m_x + m_y}{\sqrt{\sigma_x^2 / n_x + \sigma_y^2 / n_y}}, \quad V^2 = \frac{n_x s_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{n_y s_y^2}{\sigma_y^2}, \quad k = n_x + n_y - 2. \quad (\text{П6.27})$$

Величина Z имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$, V^2 имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$, а величина $u = T$ имеет распределение Стьюдента с параметром k . При справедливости гипотезы H_0 и равенстве дисперсий критерий (П6.27) приобретает вид

$$u = (\bar{x} - \bar{y}) \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{(n_x s_x^2 + n_y s_y^2)(n_x + n_y)}}.$$

Отсюда находим двустороннюю критическую область S_1 : $u < -t_{\delta_1}(k)$ или $u > t_{\delta_1}(k)$.

Правило принятия решения: если $|u| \leq t_{\delta_1}$, то H_0 верна; если $|u| > t_{\delta_1}$, то H_0 неверна.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий известному значению. Для проверки гипотезы $H_0: \sigma = \sigma_0$ используют критерий

$$u = ns^2 / \sigma_0^2, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

имеющий χ^2 -распределение с числом степеней свободы $k = n - 1$. При использовании двусторонней конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma = \sigma_1 \neq \sigma_0$ двусторонняя критическая область определяется неравенствами $u < \chi_1^2$ или $u > \chi_2^2$, где χ_1^2 и χ_2^2 — квантили χ^2 -распределения по уровням вероятностей $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$

соответственно. При односторонней конкурирующей гипотезе критическая область S_1 такова: $u > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ при $\sigma_1 > \sigma_0$ или $u < \chi^2_{\alpha}(n-1)$ при $\sigma_1 < \sigma_0$.

Мощность критерия при односторонней гипотезе:

$$\bar{\beta}(\sigma_1^2) = P\left\{\chi^2 > \frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}, \quad \sigma_1 > \sigma_0;$$

$$\bar{\beta}(\sigma_1^2) = P\left\{\chi^2 < \frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}, \quad \sigma_1 < \sigma_0,$$

где $\lambda = \sigma_1 / \sigma_0$ — расстояние между гипотезами.

При двусторонней гипотезе

$$\bar{\beta}(\sigma_1^2) = P\left\{\chi^2 < \frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} + P\left\{\chi^2 > \frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}.$$

Проверка гипотезы о равенстве двух неизвестных дисперсий. По двум независимым выборкам $(x_1, x_2, \dots, x_{n_x})$ и $(y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$ проверяется гипотеза H_0 о том, что $\sigma x = \sigma y$. В качестве критерия используется отношение

$$u = F = \frac{V_1}{k_1} / \frac{V_2}{k_2}, \quad V_1^2 = \frac{n_x s_x^2}{\sigma_x^2}, \quad V_2^2 = \frac{n_y s_y^2}{\sigma_y^2}, \quad k_1 = n_x - 1, \quad k_2 = n_y - 1.$$

Критерий имеет распределение Фишера с параметрами (k_1, k_2) . При справедливости гипотезы H_0 критерий приобретает вид

$$u = \bar{s}_x^2 / \bar{s}_y^2, \quad \bar{s}_x^2 = \frac{1}{n_x - 1} \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{s}_y^2 = \frac{1}{n_y - 1} \sum_{i=1}^{n_y} (y_i - \bar{y})^2$$

и вычисляется как отношение несмещенных оценок (П6.12) для дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 . Двустороннюю критическую область находят из уравнений

$$P(F < F_1) = \alpha / 2; \quad P(F > F_2) = 1 - \alpha / 2.$$

Здесь $F_1 = F_{\alpha/2}(k_1, k_2)$, $F_2 = F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2)$ — квантили распределения Фишера по уровням вероятностей $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$ соответственно, определяемые по таблицам распределения Фишера. Поскольку в таблицах приводятся только значения квантилей для $p > 0,5$, квантиль по уровню $\alpha/2$ находят с помощью формулы

$$F_{\alpha/2}(k_1, k_2) = 1 / F_{1-\alpha/2}(k_2, k_1).$$

П6.4. Критерии согласия

П6.4.1. Постановка задачи

В результате предварительной обработки статистических данных в форме вариационного ряда установлено, что эмпирическая функция распределения качественно близка к теоретическому распределению класса $F(x, a)$ и может быть аппроксимирована одной из кривых этого класса. В связи с этим формулируется основная гипотеза H_0 о том, что эмпирическая функция распределения согласо-

ется с теоретическим распределением $F(x, a)$, в котором параметр a либо задан, либо вычислен в виде точечной оценки $\bar{a}$. Вероятность ошибки первого рода α , называемая также уровнем значимости, трактуется как вероятность того, что основная гипотеза будет отвергнута, тогда как на самом деле она верна.

Выбирая критерий u , находят границу u_0 односторонней критической области S_1 и используют следующее правило принятия решения: если $u \in S_0$, то есть $u \leq u_0$, то гипотеза H_0 верна — имеется согласие теоретического и эмпирического распределений; если $u \in S_1$, то есть $u > u_0$, то гипотеза H_0 неверна и согласия нет.

Критерий называют состоятельным, если при верности конкурирующей гипотезы с увеличением объема выборки значения критерия растут и рано или поздно, но гарантированно, гипотеза H_0 о согласии будет отвергнута. В зависимости от вида функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n, F(x, a))$ различают критерии согласия Пирсона (критерий χ^2), Колмогорова (D -критерий) и Мизеса (критерий ω^2).

П6.4.2. Критерий Пирсона (критерий χ^2)

В качестве эмпирического распределения используется функция частостей. Область допустимых значений (ОДЗ) случайной величины X разбивается на l интервалов, называемых разрядами, с границами l -го интервала x_{i-1}^* и x_i^* , $i = 1 \dots l$. При этом обычно принимают $x_0^* = x^0$, $x_l^* = x^0$, где x_0^* и x^0 — левая и правая границы ОДЗ. Частость v_i есть отношение числа n_i элементов вариационного ряда, попавших в i -й разряд, к длине выборки n . В качестве критерия используется функция

$$u = \chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad p_i = F(x_i^*, a) - F(x_{i-1}^*, a). \quad (\text{П6.28})$$

Можно показать, что критерий Пирсона имеет асимптотически χ^2 -распределение с числом степеней свободы $k = n - 1$. Если параметры теоретического распределения неизвестны, но они определяются по выборке в форме точечных оценок $\bar{a}$, то распределение χ^2 имеет число степеней свободы $k = n - 1 - r$, где r — число параметров теоретического распределения.

Чтобы проверить состоятельность критерия χ^2 , надо ввести альтернативную гипотезу H_1 , согласно которой теоретическому распределению в тех же границах разрядов соответствует вектор вероятностей $(p'_1, p'_2, \dots, p'_l)$. При справедливости H_1 χ^2 -распределение будет иметь значение

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np'_i)^2}{np'_i}.$$

Тогда математическое ожидание критерия (П6.28)

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}\right) &= M\left(\sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np'_i + np'_i - np_i)^2}{np_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^l \left(M \frac{(n_i - np'_i)^2}{np_i} + M \frac{(np'_i - np_i)^2}{np_i} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^l \frac{p'_i (1 - p'_i)}{p_i} + n \sum_{i=1}^l \frac{(p'_i - p_i)^2}{p_i} = A + Bn. \quad (\text{П6.29})$$

С ростом n функция (П6.29) растет линейно. При любой фиксированной границе критической области с ростом n значение критерия u гарантированно попадет в S_1 и гипотеза H_0 будет отвергнута.

При использовании критерия Пирсона необходимо учитывать следующие практические рекомендации:

1. Границы разрядов следует выбирать равными квантилям теоретического распределения по уровням $p_i = i/l$, $i = 1 \dots l - 1$. Это делает знаменатели дробей в слагаемых формулы (П6.28) одинаковыми, не позволяя одним слагаемым подавлять другие.
2. Число разрядов и объем выборки следует выбирать так, чтобы число степеней свободы k было не менее 10 и среднее число элементов выборки в одном разряде было также не менее 10.
3. Критерий Пирсона является оптимистическим, то есть он склонен давать скорее положительный, чем отрицательный ответ. Поэтому при положительном ответе желательно проверить гипотезу с помощью другого критерия.

П6.4.3. Критерий Колмогорова (D -критерий)

Критерий использует эмпирическую функцию распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ k/n, & x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = 1 \dots n-1; \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases} \quad (\text{П6.30})$$

Критерий основан на максимальной разности между функциями распределения $F(x, a)$ и $F_n(x)$, а именно:

$$d_n = \max_{(x)} |F(x) - F_n(x)|.$$

А. Н. Колмогоров показал, что случайная величина $d_n \sqrt{n}$ имеет асимптотическое распределение

$$K(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{d_n \sqrt{n} < \lambda\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \lambda^2), \quad \lambda > 0.$$

Границей критической области является квантиль распределения Колмогорова по уровню $p = 1 - \alpha$ (табл. П1).

Таблица П1. Квантили распределения Колмогорова

α	$\lambda_{1-\alpha}$	α	$\lambda_{1-\alpha}$	α	$\lambda_{1-\alpha}$	α	$\lambda_{1-\alpha}$
0,30	0,975	0,10	1,235	0,02	1,518	0,005	1,731
0,20	1,072	0,05	1,358	0,01	1,628	0,001	1,950

Критерий Колмогорова пессимистический, то есть он склонен давать скорее отрицательный, чем положительный ответ. В этом D -критерий дополняет критерий Пирсона. Если оба критерия дают одинаковый ответ, то этому ответу можно доверять. Если же критерий Пирсона дает положительный ответ, а D -критерий — отрицательный, то следует обратиться к третьему критерию.

П6.4.4. Критерий Мизеса (критерий ω^2)

Критерий использует эмпирическую функцию распределения (П6.30) и метрику типа среднеквадратического отклонения

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - F_n(x))^2 dF(x). \quad (\text{П6.31})$$

Подставляя (П6.30) в (П6.31) и выполняя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \int_{-\infty}^{x_1} (0 - F(x))^2 dF(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{k}{n} - F(x) \right)^2 dF(x) + \int_{x_n}^{\infty} (1 - F(x))^2 dF(x) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\left(F(x) - \frac{k-1}{n} \right)^3 - \left(F(x) - \frac{k}{n} \right)^3 \right) = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(F(x) - \frac{2k-1}{2n} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{П6.32})$$

Входящая в (П6.32) случайная величина K имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $MK = nF(x)$ и дисперсией $DK = nF(x)(1 - F(x))$. Отсюда

$$MF_n(x) = M(K/n) = F(x); \quad DF_n(x) = DK/n^2 = F(x)(1 - F(x))/n.$$

Теперь можно найти математическое ожидание случайной величины ω^2 :

$$\begin{aligned} M\omega^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} M(F(x) - F_n(x))^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (MF_n(x) - F^2(x)) F(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} DF_n(x) dF(x) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(1 - F(x)) dF(x) = \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

Чтобы математическое ожидание не зависело от объема выборки, надо умножить ω^2 на n . Тогда критерий и его математическое ожидание находят по формулам

$$u = n\omega^2; \quad M(n\omega^2) = nM\omega^2 = \frac{1}{6}.$$

Аналогично находят дисперсию ω^2 и $n\omega^2$:

$$D\omega^2 = \frac{4n-3}{180n^3}; \quad Du = D(n\omega^2) = \frac{4n-3}{180n}.$$

При увеличении n дисперсия критерия стремится асимптотически к значению $1/45$. Уже при $n > 40$ можно считать, что $Du \approx 1/45$. Квантили распределения Мизеса $F_M(z) = P(n\omega^2 < z)$ по уровню $1 - \alpha$, необходимые для нахождения границы критической области, приведены в табл. П2.

Таблица П2. Квантили распределения Мизеса

α	$z_{1-\alpha}$	α	$z_{1-\alpha}$	α	$z_{1-\alpha}$	α	$z_{1-\alpha}$
0,30	0,1843	0,10	0,3473	0,03	0,5489	0,01	0,7435
0,20	0,2412	0,05	0,4614	0,02	0,6198	0,001	1,1679

Критерий Мизеса является нейтральным и способен сглаживать отдельные даже большие, но маловероятные выбросы. Вместе с тем он довольно сложен при вычислении значения критерия.

П7. Таблицы стандартных распределений

Таблица П3. Распределение Пуассона $\Pi(m, a) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a}$

m	$\Pi(m, a)$									
	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$	$a = 1,0$
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0,9953	9825	9631	9384	9098	8781	8442	8088	7725	7358
2	0,9999	9989	9964	9921	9856	9769	9659	9526	9371	9197
3	—	9999	9997	9992	9982	9966	9942	9909	9865	9810
4	—	—	—	9999	9998	9996	9992	9986	9977	9963
5	—	—	—	—	—	—	9999	9998	9997	9994

m	$\Pi(m, a)$									
	$a = 1,1$	$a = 1,2$	$a = 1,3$	$a = 1,4$	$a = 1,5$	$a = 1,6$	$a = 1,7$	$a = 1,8$	$a = 1,9$	$a = 2,0$
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	0,6990	6626	6268	5918	5578	5249	4932	4628	4337	4060
2	0,9004	8795	8571	8335	8088	7834	7572	7306	7036	6767
3	0,9743	9662	9569	9463	9344	9212	9068	8913	8747	8571
4	0,9946	9923	9893	9857	9814	9763	9704	9636	9559	9473
5	0,9990	9985	9978	9968	9955	9940	9920	9896	9868	9834
6	0,9999	9997	9996	9994	9991	9987	9981	9974	9966	9955

m	$\Pi(m, a)$									
	$a = 2,1$	$a = 2,2$	$a = 2,3$	$a = 2,4$	$a = 2,5$	$a = 2,6$	$a = 2,7$	$a = 2,8$	$a = 2,9$	$a = 3,0$
0	0,1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	0,3796	3546	3309	3084	2873	2674	2487	2311	2146	1991

m	$\Pi(m, a)$									
	$a = 2,1$	$a = 2,2$	$a = 2,3$	$a = 2,4$	$a = 2,5$	$a = 2,6$	$a = 2,7$	$a = 2,8$	$a = 2,9$	$a = 3,0$
2	0,6496	6227	5960	5697	5438	5184	4936	4695	4460	4232
3	0,8386	8194	7993	7787	7576	7360	7141	6919	6696	6472
4	0,9379	9275	9162	9041	8912	8774	8629	8477	8318	8128
5	0,9796	9751	9700	9653	9580	9510	9433	9349	9258	9161
6	0,9941	9925	9906	9884	9858	9828	9794	9756	9713	9665
7	0,9985	9980	9974	9967	9958	9947	9934	9919	9901	9881
8	0,9997	9995	9994	9991	9989	9985	9981	9976	9969	9962

Таблица П4. Квантили распределения Пуассона по уровню α

m	x_α							
	$\alpha = 0,975$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,90$	$\alpha = 0,80$	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$
0	0,025	0,0515	0,105	0,223	1,609	2,303	2,996	3,689
1	0,242	0,3505	0,532	0,824	2,994	3,890	4,744	5,572
2	0,619	0,8175	1,102	1,535	4,279	5,322	6,296	7,225
3	1,090	1,3665	1,745	2,297	5,515	6,681	7,754	8,767
4	1,623	1,970	2,433	3,090	6,721	7,994	9,154	10,242
5	2,202	2,613	3,152	3,904	7,906	9,275	10,513	11,668
6	2,815	3,286	3,895	4,734	9,075	10,532	11,842	13,059
7	3,454	3,981	4,656	5,576	10,232	11,771	13,148	14,423
8	4,115	4,695	5,432	6,428	11,380	12,995	14,435	15,763
9	4,796	5,426	6,221	7,289	12,519	14,206	15,705	17,085
10	5,491	6,169	7,021	8,157	13,651	15,407	16,962	18,390
11	6,201	6,924	7,829	9,031	14,777	16,598	18,208	19,682
12	6,922	7,689	8,646	9,910	15,897	17,782	19,442	20,962
13	7,654	8,474	9,470	10,794	17,013	18,958	20,669	22,230
14	8,396	9,297	10,300	11,682	18,125	20,128	21,886	23,490
15	9,145	10,036	11,135	12,574	19,233	21,292	23,097	24,740
16	9,903	10,832	11,976	13,469	20,338	22,452	24,301	25,983
17	10,668	11,635	12,822	14,368	21,440	23,606	25,499	27,219
18	11,439	12,442	13,672	15,268	22,538	24,707	26,692	28,448
19	12,217	13,255	14,526	16,173	23,635	25,903	27,879	29,671
20	13,000	14,072	15,383	17,078	24,728	27,045	29,062	30,889

Таблица П5. Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	3000	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3314	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3600	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4100	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
2,0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,9	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
3,0	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936

Таблица П6. Квантили распределения Стьюдента по уровню $1 - \alpha/2$

k	$t_{1-\alpha/2}$	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,001$
1	3,078	6,314	12,706	24,452	31,821	63,657	127,3	636,6	
2	1,886	6,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	31,660	
3	1,638	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	12,922	
4	1,533	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	8,610	
5	1,476	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	6,869	
6	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,307	4,317	5,959	
7	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	5,408	
8	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	5,041	
9	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,781	
10	1,372	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	4,587	
12	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	4,313	
14	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	4,140	
16	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	4,015	
18	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,922	
20	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,849	
22	1,321	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,792	
24	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,745	
26	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,704	
28	1,313	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,674	
38	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,646	
∞	1,283	1,648	1,965	2,241	2,326	2,586	2,820	3,291	

Список литературы

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному вычислению. — М.: Высш. шк., 1965. — 466 с.
2. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М.: Физматлит, 1963. — 236 с.
3. Рябишин И. А., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. — М.: Радио и связь, 1981. — 264 с.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 548 с.
5. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. — М.: Госстатиздат, 1958. — 326 с.

Алфавитный указатель

International Standard Organization, 99
Total Quality Management, 99

А

автоматизация проектирования, 52
алгоритм ортогонализации, 167
алгоритм разрезания, 166
АСОИУ
 математическое обеспечение, 54

Б

безгранично делимое задание, 276

В

вейбулловская модель, 396
вероятность безотказного применения, 32
вероятность безотказной работы, 25, 26, 181, 205
вероятность выполнения ожидаемого задания, 247
ветвь, 215
ветвящаяся структура, 161
ветвящаяся структура типа дерево, 214
вибрация
 гармоническая, 43
 квазигармоническая, 43
 узкополосная случайная, 43
 широкополосная случайная, 43
виброизолятор, 45
виброускорение, 43
внутренняя точка, 161
воздействие
 атмосферного давления, 39
 биологических факторов, 40
 влаги
 на медь, 37
 на олово, 38

воздействие (*продолжение*)
 песка и пыли, 39
 солнечного излучения, 38
 тепловое
 апериодическое, 36
 непрерывное, 36
 периодическое, 36

восстанавливаемый элемент, 241
восстановление, 19
время восстановления объекта, 21
время устранения отказа, 73

Г

геометрическая модель Моранды, 393
гиперболическая модель роста
 надежности, 399
графический метод описания логических связей, 85

Д

двухполюсная структура, 161
деградация ресурсов, 120
дефектное изделие, 51
дублирование дисков, 124

Ж

жизненный цикл ФПК, 53
 предпроектная подготовка, 53
 системный анализ, 53
 сопровождение, 53
 эксплуатация, 53
жизненный цикл элемента
 период нормальной эксплуатации, 58
 период приработки, 58
 период старения, 58

З

- зависимость отказов
 - стохастическая, 83
 - функциональная, 83
- замыкающее множество, 162
- запас живучести
 - максимальный, 200
 - минимальный, 200
- защита изделий, 41
 - исключение недопустимых контактов, 42
 - от коррозии, 42
 - от плесени, 42
 - применение допустимых контактов, 42
 - электрохимическая, 42
- защита целостности данных, 124
- зеркальное отображение дисков, 124
- ЗИП
 - групповой, 303
 - двухуровневая система, 304
 - одиночный, 303

И

- иерархические системы, 213
- избыточные ресурсы, 119
- изделие
 - многократного циклического применения, 24
 - непрерывного длительного применения, 24
 - однократного применения, 24
- изделия
 - конкретного назначения, 24
 - необслуживаемые, 24
 - обслуживаемые, 24
 - общего назначения, 24
- индикатор
 - безотказной работы, 84
 - отказов, 84
 - событий, 84
- инициирующее событие, 371
- инициирующие события, 388
 - источник, 365
- интенсивность восстановления, 28
- интенсивность потока отказов, 29
- использование массивов дисков, 124
- испытания
 - исследовательские, 50
 - комплексные, 50, 405

испытания (*продолжение*)

- контрольные, 405
- на внезапные отказы, 405
- на постепенные отказы, 405
- определяющие, 405
- отработочные, 50
- предпусковые, 50
- с полной выборкой, 405
- с усеченной выборкой, 405
- стендовые, 405
- тренировочные, 49

К

- качество продукции, 51
- классификация климатических районов, 40
- классификация климатического исполнения изделий
 - по типу КР, 41
 - по типу помещений, 41
- комплексная отладка, 363
- композиция распределений, 64, 132
- конгруэнтное множество, 367
- контроль качества, 52
- корректность программ, 115
- коэффициент
 - готовности, 186
 - контролируемой готовности, 32
 - оперативной готовности нестационарный, 31
- коэффициент готовности
 - нестационарный, 30
 - стационарный, 30
- коэффициент готовности систем, 199
- коэффициент технического использования, 33
- критерий надежности, 24
- критерий отказа, 24
- критерий предельного состояния, 24

Л

- логико-вероятностный метод, 165
- локализация отказа, 73

М

- мажорирование, 121
- мажорирующий элемент, 149
- марковская модель, 126, 129
 - идеальный контроль, 91
 - неидеальный контроль, 95

марковская точка, 126
математическая модель надежности, 57
метод анализа надежности, 177
метод Колмогорова, 175
метод перебора гипотез, 161
метод эквивалентных схем, 163
многополюсная структура, 161
многосвязная система
 второго класса, 222
 первого класса, 219
 третьего класса, 223
многофазные системы, 283
многофункциональные системы, 320
модель безотказности, 66
модель Ийуду, 397
модель контроля и диагностирования, 75
модель Липова, 394
модель Мусы—Гамильтона, 395
модель надежности, 83
модель надежности восстанавливаемого элемента, 66
 марковская, 76
 полумарковская, 78
модель надежности системы
 марковская, 173
 немарковская, 174
 полумарковская, 173
модель невосстанавливаемого элемента, 58
модель Сукерта, 396
модель Уолла—Фергюссона, 396
модель функционирования
 марковская, 66
 полумарковская, 66
модель Шика—Волвертона, 393
модифицированный логико-вероятностный метод, 218
молодеющие системы, 291
мостиковая схема, 160

Н

нагруженный режим, 94
назначение сроков профилактики
 календарный принцип, 47
 комбинированный принцип, 47
 регламентный принцип, 46
наладка аппаратуры, 74
неиссякающий источник пополнения, 303
ненагруженный режим, 92
неограниченное восстановление, 91

неполная гамма-функция, 60
неполное оповещение о состоянии сети, 224
непроизводительные потери рабочего времени, 238
нормирование надежности, 88
нормы надежности, 88

О

общее нагруженное резервирование
 с дробной кратностью, 137
 с целой кратностью, 137
общее ненагруженное резервирование
 с дробной кратностью, 138
общее резервирование
 двукратное, 152
 с дробной кратностью, 153
 с кратностью $1/2$, 149
объект, 18
 невосстанавливаемый, 24
однофункциональные системы, 320
описание белого ящика, 360
описание черного ящика, 360
основное свойство резервирования, 141
остаточное число дефектов, 363
отказ, 19
 внезапный, 19
 конструктивный, 20
 ложный сигнал, 20
 необесценивающий, 108
 обесценивающий, 108
 обрыв, 20
 перемежающийся, 19
 полный, 20
 постепенный, 19
 производственный, 20
 самоустраняющийся, 19
 скрытый, 19
 устойчивый, 19
 частичный, 20
 эксплуатационный, 20
 явный, 19
отказ резервированной системы, 302
отрабочные испытания, 50

П

пополнение
 по заданному уровню, 304
парадокс резервирования, 141
параметр потока восстановлений, 30

парирование, 116
переключатель резерва, 143
периферийная точка, 160
показатели достаточности
 комплекта ЗИП, 304
показатели надежности, 23
 единичные, 23
 комплексные, 23, 30
показатели сохраняемости, 28
 гамма-процентный срок
 сохраняемости, 28
 средний срок сохраняемости, 28
полумарковская модель, 126
 идеальный контроль, 96
 неидеальный контроль, 96
пополнение
 непрерывное, 304
 периодическое, 304
 с экстренными доставками, 304
поправочные коэффициенты по i -му
 фактору, 64
последовательная система, 83, 84, 250
поток отказов
 без последствий, 68
 классификация, 68
 нестационарный пуассоновский, 69
 обобщенный пуассоновский, 70
 ординарный, 68
 простейший, 69
 рекуррентный, 70
 с ограниченным последствием, 68
 со сложным последствием, 68
 стационарный, 67
 стационарный рекуррентный, 72
 характеристики, 67
предельное состояние объекта, 22
предпусковые испытания, 50
принцип параллелизма, 117
программа обеспечения надежности, 100
проектирование ПО
 этапы, 53
простая точка соединения, 161
профилактика
 методы, 46
 режимы, 47
 неплановый, 47
 плановый, 47
 смешанный, 47
сроки проведения, 46

Р

раздельное резервирование, 140
размыкающее множество, 162
разрезание по элементу, 163
ранг связности, 219
распределение
 Вейбулла, 61
 гамма-распределение, 60
 гиперэкспоненциальное, 63
 логарифмически нормальное, 62
 равномерное, 61
 Рэлея, 61
 усеченное нормальное, 61
 экспоненциальное, 59
 Эрланга, 60
расчет показателей надежности, 76
резерв времени, 107
 мгновенно пополняемый, 113
 непополняемый, 112
резервирование, 102, 104
 алгоритмическое, 109
 временное, 106
 групповое, 110
 информационное, 108
 общее, 110
 раздельное, 110
 с включением замещением, 111
 с дробной кратностью, 111
 с постоянно включенным резервом, 111
 с целой кратностью, 110
 скользящее, 110
 структурное, 105
 функциональное, 106

С

САПР, 52
САПР-Н, 52
свойства объекта
 безотказность, 20
 дефектность, 17
 долговечность, 22
 надежность, 17
 наработка, 20
 ремонтпригодность, 21
 сохраняемость, 22
 точность, 17
свойства точечных оценок
 несмещенность, 454
 состоятельность, 454
 эффективность, 454

система

в узком смысле, 22

в широком смысле, 23

системы с ветвящейся структурой, 213

системы с временным резервированием, 107

состояние объекта

неработоспособное, 18, 19

работоспособное, 18, 19

среднее число моментов восстановления, 29

среднее число отказов, 28

средняя наработка до первого

отказа, 27, 184

средняя наработка на отказ, 30, 203

стационарный коэффициент готовности, 243

стендовые испытания, 405

структурная модель Нельсона, 397

структурная модель роста надежности, 397

структурное дублирование аппаратуры, 121

структурное резервирование

методы, 109

структурный элемент, 22

суммарное непроизводительное время, 238

суперпозиция распределений, 63

Т

тренировка изделия, 49

тренировочные испытания, 49

У

узел, 161

улучшение восстанавливаемости, 103

уменьшение интенсивности отказов, 102

уменьшение наработки, 102

Ф

факторные модели, 365

факторы надежности АПК

ВВФ специальных сред, 35

конструктивные, 35

производственные, 35

радиационные, 35

термические, 35

эксплуатационные, 35

ВВФ электромагнитных полей, 35

климатические, 36

форсированные испытания, 50

функционально самостоятельная

операция, 320

функциональный программный

комплекс, 53

Ээкспоненциальная модель Джелинского-
Моранды, 392

экспоненциальная модель Шумана, 390

элемент

в узком смысле, 22

в широком смысле, 22

эффект домино, 84

Черкесов Геннадий Николаевич

**Надежность аппаратно-программных комплексов
Учебное пособие**

Главный редактор	<i>Е. Строганова</i>
Заведующий редакцией	<i>А. Кривцов</i>
Руководитель проекта	<i>А. Крузеништерн</i>
Технический редактор	<i>В. Шендерова</i>
Литературный редактор	<i>Н. Рощина</i>
Художник	<i>Н. Биржаков</i>
Иллюстрации	<i>Л. Родионова, В. Шендерова, М. Шендерова</i>
Корректоры	<i>А. Моносов, И. Смирнова, Н. Солнцева</i>
Верстка	<i>Р. Гришанов</i>

Лицензия ИД № 05784 от 07.09.01.

Подписано к печати 30.07.04. Формат 70×100/16. Усл. п. л. 38,7.

Тираж 4000. Заказ 845

ООО «Питер Принт», 194044, Санкт-Петербург, пр. Б. Сампсониевский, д. 29а.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Техническая книга»

190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПИТЕР»
предлагают эксклюзивный ассортимент компьютерной, медицинской,
психологической, экономической и популярной литературы

РОССИЯ

Москва м. «Калужская», ул. Бутлерова, д. 17б, офис 207, 240; тел./факс (095) 777-54-67;
e-mail: sales@piter.msk.ru

Санкт-Петербург м. «Выборгская», Б. Сампсониевский пр., д. 29а;
тел. (812) 103-73-73, факс (812) 103-73-83; e-mail: sales@piter.com

Воронеж ул. 25 января, д. 4; тел. (0732) 27-18-86;
e-mail: piter-vrn@vmail.ru; piter@comch.ru

Екатеринбург ул. 8 Марта, д. 267б; тел./факс (343) 225-39-94, 225-40-20;
e-mail: piter-ural@r66.ru

Нижний Новгород ул. Премудрова, д. 31а; тел. (8312) 58-50-15, 58-50-25;
e-mail: piter@infonet.nnov.ru

Новосибирск ул. Немировича-Данченко, д. 104, офис 502;
тел./факс (3832) 54-13-09, 47-92-93, 11-27-18, 11-93-18; e-mail: piter-sib@risp.ru

Ростов-на-Дону ул. Калитвинская, д. 17в; тел. (8632) 95-36-31, (8632) 95-36-32;
e-mail: jupiter@rost.ru

Самара ул. Новосадовая, д. 4; тел. (8462) 37-06-07; e-mail: piter-volga@sama.ru

УКРАИНА

Харьков ул. Суздальские ряды, д. 12, офис 10–11, т. (057) 712-27-05, 712-40-88;
e-mail: piter@tender.kharkov.ua

Киев пр. Красных Казаков, д. 6, корп. 1; тел./факс (044) 490-35-68, 490-35-69;
e-mail: office@piter-press.kiev.ua

БЕЛАРУСЬ

Минск ул. Бобруйская д., 21, офис 3; тел./факс (37517) 226-19-53; e-mail: piter@mail.by



Ищем зарубежных партнеров или посредников, имеющих выход на зарубежный рынок.
Телефон для связи: **(812) 103-73-73.**
E-mail: grigorjan@piter.com



Издательский дом «Питер» приглашает к сотрудничеству авторов.
Обращайтесь по телефонам: **Санкт-Петербург — (812) 327-13-11,**
Москва — (095) 777-54-67.



Заказ книг для вузов и библиотек: (812) 103-73-73.
Специальное предложение — e-mail: kozin@piter.com

Черкесов Геннадий Николаевич — доктор технических наук, профессор. Область его научной деятельности — качество, надежность, безопасность, живучесть и эффективность сложных систем. Им разработаны новые эффективные логико-вероятностные методы исследования вероятностных характеристик структурно сложных систем, создано новое научное направление теории надежности — теория временной избыточности (резервирования времени). Г. Н. Черкесовым проведены прикладные исследования резервированных систем в различных предметных областях (компьютерная техника, системы связи, управления, энергетики, технологические системы, машиностроение и др.). Преподает на кафедре информационных и управляющих систем факультета технической кибернетики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Автор 180 научных трудов, в том числе 12 монографий, 7 учебных и 20 научно-методических пособий, 16 сертифицированных алгоритмов и программ 120 статей, 2 изобретений.

Это учебное пособие предназначено для студентов, изучающих курс теории надежности и другие дисциплины вероятностного цикла, аспирантов, слушателей учебных центров повышения квалификации и переподготовки в области информатики, инженеров-разработчиков аппаратно-программных комплексов ответственных систем, инженеров служб надежности промышленных предприятий.

В данное издание включены новые актуальные разделы: «Надежность систем с ограниченным ЗИП» (глава 9) и «Оценка надежности АПК с учетом характеристик программного и информационного обеспечения» (глава 10). Уже издававшиеся разделы также существенно переработаны с учетом достижений теории надежности и современных требований практики оценки надежности, насыщены примерами из реальных проектов. В книге учтен многолетний опыт чтения автором курсов лекций по теории надежности и другим дисциплинам вероятностного цикла.

Данное пособие является усовершенствованным и доработанным вариантом опубликованного в 1975 году учебного пособия Черкесова Г. Н. «Основы теории надежности АСУ», прошедшего многолетнюю апробацию в учебном процессе СПбГТУ и других вузов.

